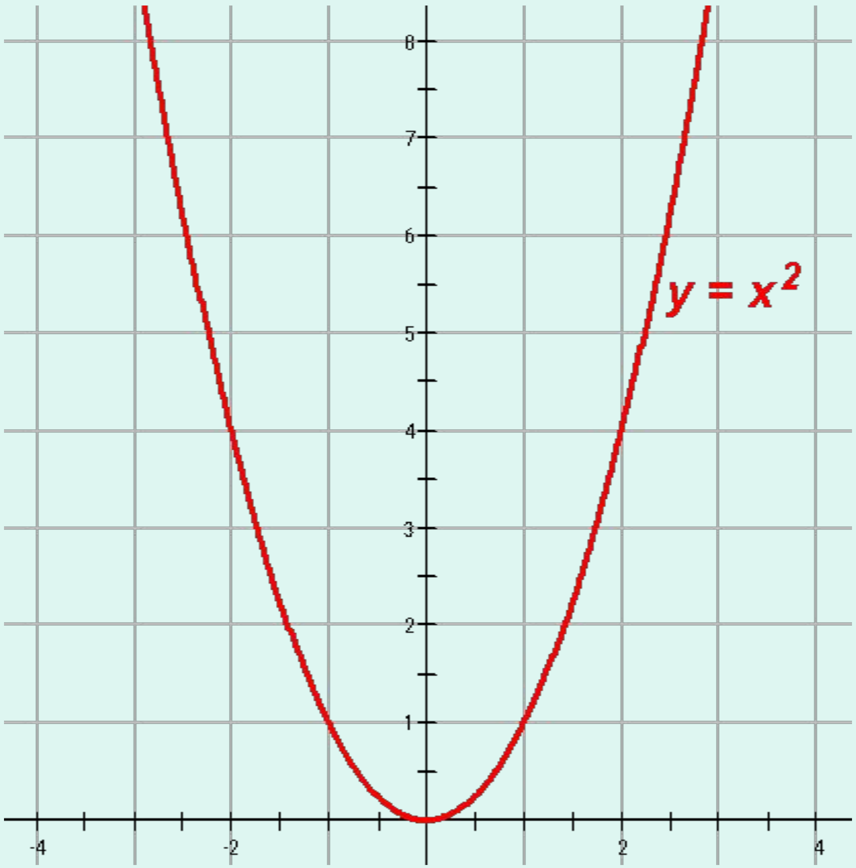
Простейшие преобразования графиков функций

Зная вид графика некоторой функции, можно при помощи геометрических преобразований построить график более сложной функции.

Рассмотрим график функции $y=x^2$ и выясним,как можно построить, используя сдвиги вдоль координатных осей, графики функций вида $y=(x-m)^2$ и $y=x^2+n$.



Пример 1.

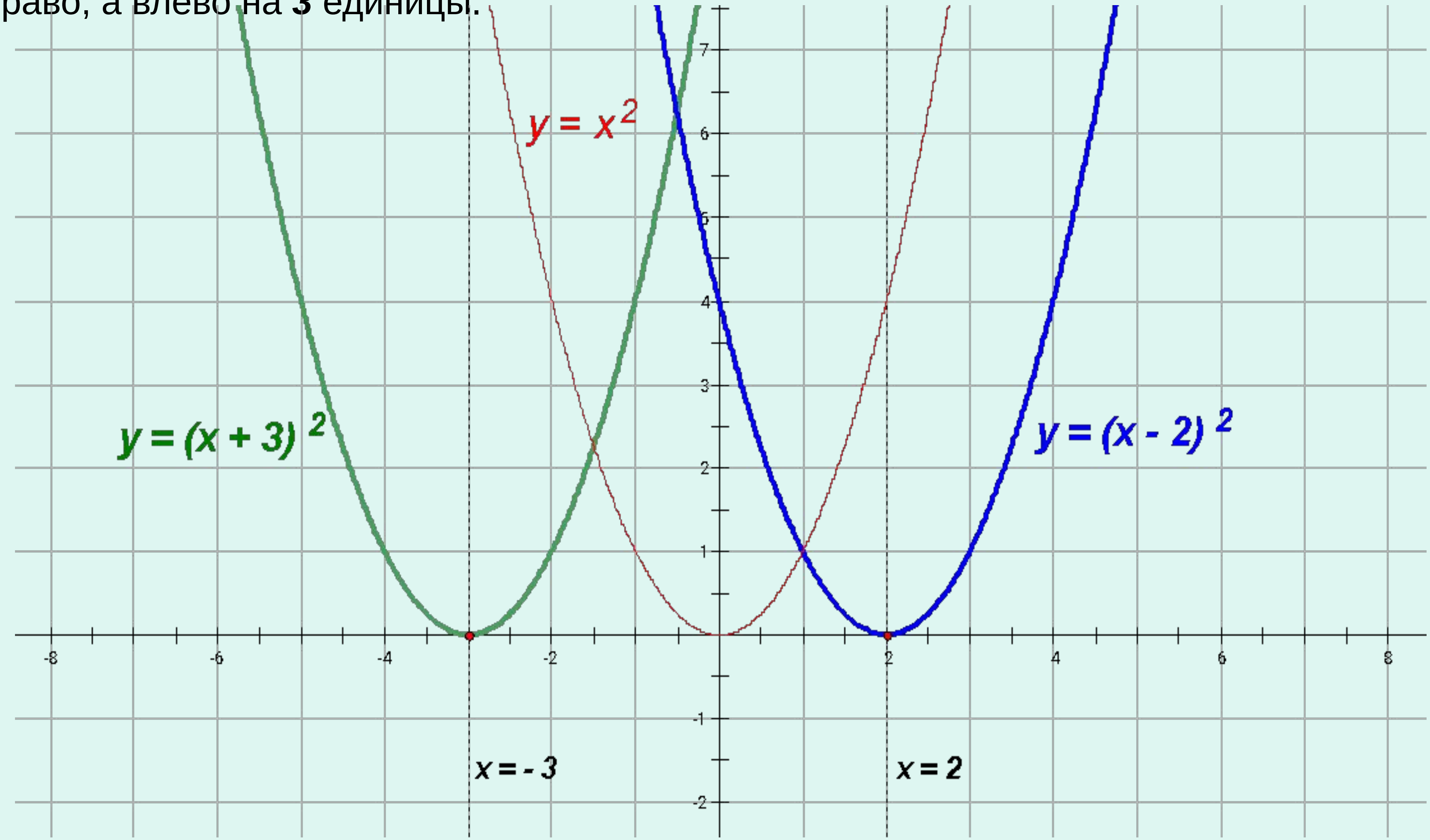
Построим график функции $y=(x-2)^2$, опираясь на график функции $y=x^2$ (щелчок мышкой). График функции $y=x^2$ есть некоторое множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение $y=x^2$ в верное числовое равенство. Обозначим это множество точек, то есть график функции $y=x^2$, буквой ***F***, а неизвестный нам пока график функции $y=(x-2)^2$ обозначим буквой ***G***. Сравним координаты тех точек графиков ***F*** и ***G***, у которых одинаковые ординаты. Для этого составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$(x-2)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Рассматривая таблицу (которую можно неограниченно продолжать и вправо и влево), замечаем, что одинаковые ординаты имеют точки вида $(x_0; y_0)$ графика ***F*** и $(x_0 + 2; y_0)$ графика ***G***, где x_0, y_0 – некоторые вполне определенные числа.

На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции $y=(x-2)^2$ можно получить из графика функции $y=x^2$ путем сдвига всех его точек вправо на **2** единицы (щелчок мышкой).

Таким образом, график функции $y=(x-2)^2$ может быть получен из графика функции $y=x^2$ сдвигом вправо на **2** единицы. Рассуждая аналогично, можно доказать, что график функции $y=(x+3)^2$ также может быть получен из графика функции $y=x^2$, но сдвигом не вправо, а влево на **3** единицы.



Хорошо видно, что осями симметрии графиков функций $y=(x-2)^2$ и $y=(x-3)^2$ являются соответственно прямые $x = 2$ и $x = -3$.

Чтобы увидеть графики, щелкни мышкой

Если вместо графика ***$y=(x - 2)^2$*** или ***$y=(x + 3)^2$*** рассмотреть график функции ***$y=(x - m)^2$***, где ***m*** – произвольное число, то в проведенном ранее рассуждении ничего принципиально не изменится.

Таким образом, из графика функции ***$y = x^2$*** можно получить график функции ***$y=(x - m)^2$*** с помощью сдвига вправо на ***m*** единиц в направлении оси ***Ox***, если ***$m > 0$***, или влево, если ***$m<0$***. График функции ***$y=(x - m)^2$*** является параболой с вершиной в точке ***(m; 0)***.

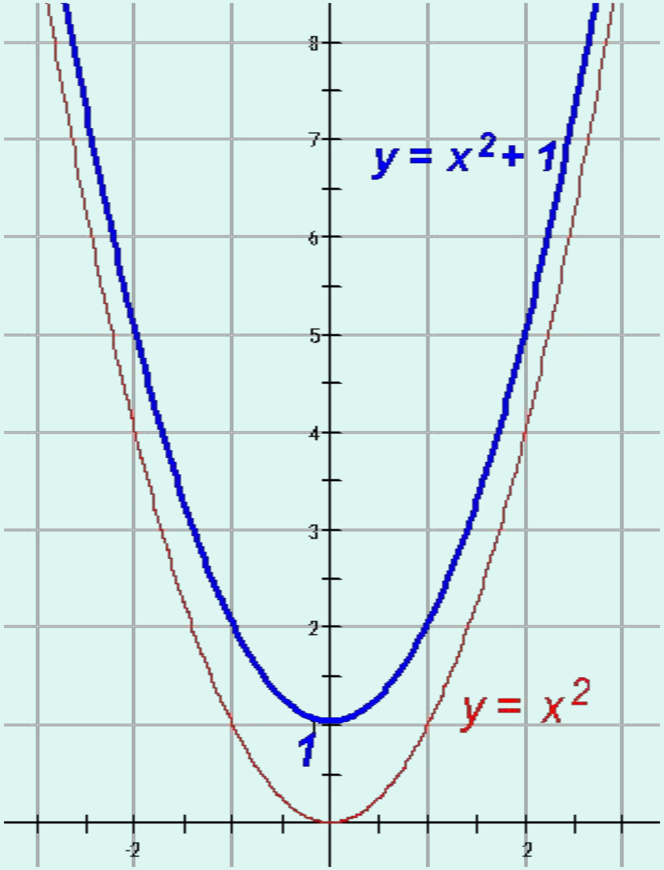
Этот вывод допускает еще **<u>большее обобщение</u>**:
график функции ***$y=f(x - m)$*** *можно получить из графика функции* ***$y=f(x)$*** *путем сдвига графика функции* ***$y=f(x)$*** *вправо на* ***m*** *единиц в направлении оси* ***Ox****, если* ***$m > 0$****, или влево, если* ***$m<0$****.*

Пример 2.

Построим график функции $y = x^2 + 1$, опираясь на график функции $y=x^2$ (щелчок мышкой). Сравним координаты точек этих графиков, у которых одинаковые абсциссы. Для этого составим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 1$	10	5	2	1	2	5	10

Рассматривая таблицу, замечаем, что одинаковые абсциссы имеют точки вида $(x_0; y_0)$ для графика функции $y=x^2$ и $(x_0; y_0 + 1)$ для графика функции $y = x^2 + 1$.



На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции $y=x^2 + 1$ можно получить из графика функции $y=x^2$ путем сдвига всех его точек вверх (вдоль оси Оу) на ***1*** единицу (щелчок мышкой).

Итак, зная график функции $y=x^2$, можно построить график функции $y=x^2+n$ с помощью сдвига первого графика вверх на n единиц, если $n>0$, или вниз на $|n|$ единиц, если $n<0$. Графиком функции $y=x^2+n$ является парабола с вершиной в точке $(0; n)$.

Обобщение:
график функции $y=f(x)+n$ *можно получить из графика функции* $y=f(x)$ *путем сдвига графика функции* $y=f(x)$ *вверх на* n *единиц в направлении оси* **Oy**, *если* $n>0$, *или вниз, если* $n<0$.

Вывод: *график функции* $y=f(x-m)+n$ *может быть получен из графика функции* $y=f(x)$ *с помощью последовательно выполненных двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси* **Ox** *на* m *единиц и сдвига графика* $y=f(x-m)$ *вдоль оси* **Oy** *на* n *единиц.*

Страница отображается по щелчку

Из выше сказанного следует, что графиком функции $y=(x - m)^2 + n$ является парабола с вершиной в точке $(m; n)$. Ее можно получить из параболы $y=x^2$ с помощью двух последовательных сдвигов.

Пример 3.

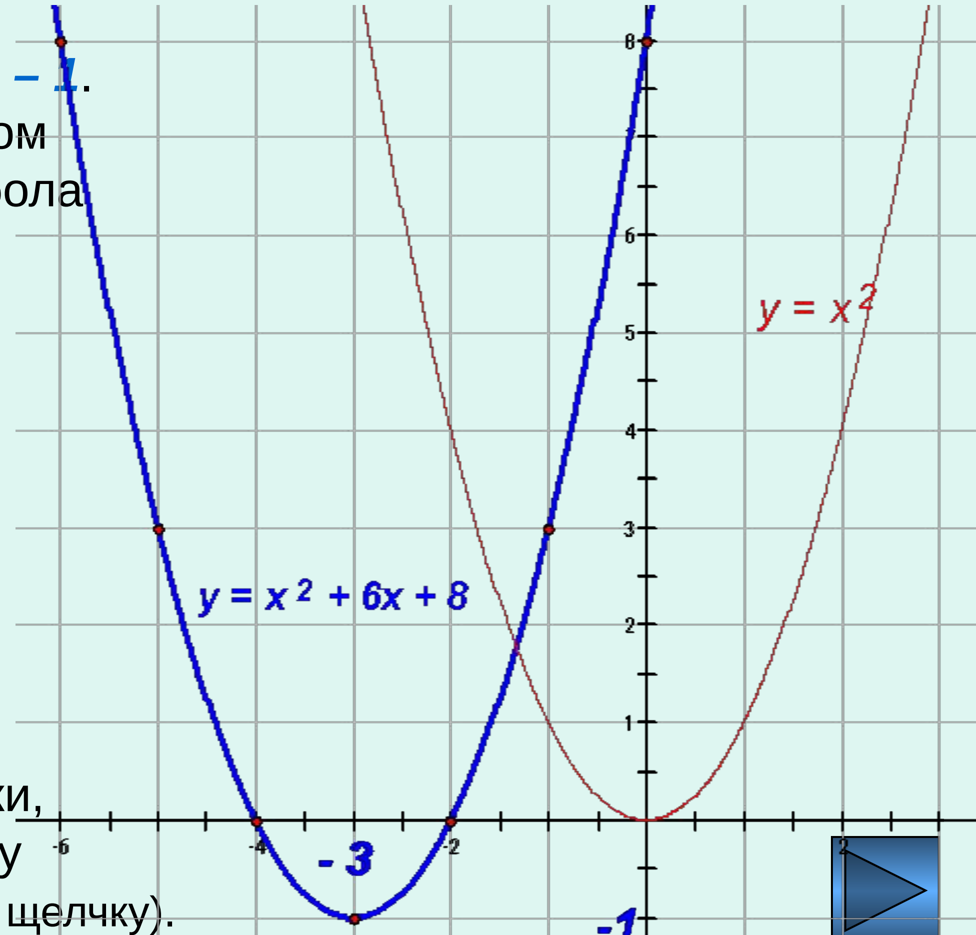
Докажем, что графиком функции $y = x^2 + 6x + 8$ является парабола, и построим график.

Решение. Представим трехчлен $x^2 + 6x + 8$ в виде $(x - m)^2 + n$. Имеем

$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x*3 + 3^2 – 1 = (x + 3)^2 – 1$.

Отсюда $y = (x + 3)^2 – 1$. Значит, графиком функции $y = x^2 + 6x + 8$ является парабола с вершиной в точке $(- 3; - 1)$. Учитывая, что ось симметрии параболы – прямая $x = - 3$, при составлении таблицы значения аргумента функции следует брать симметрично относительно прямой $x = - 3$:

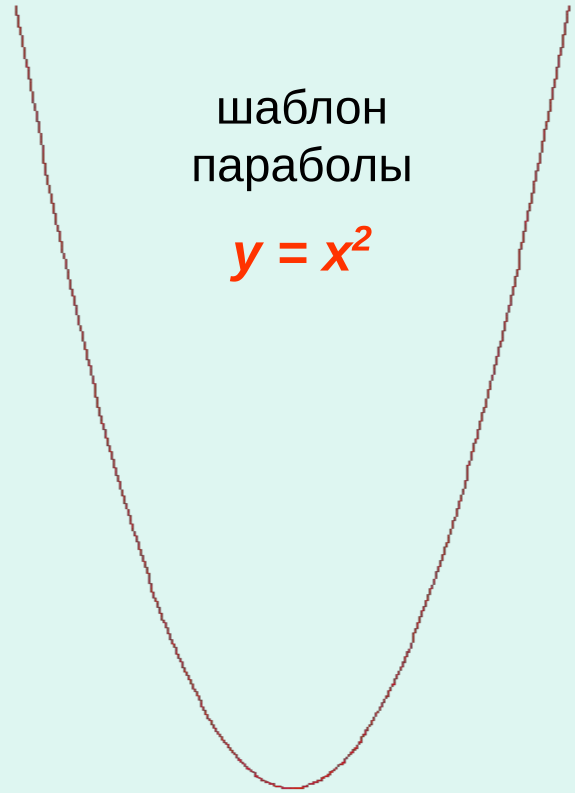
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	8	3	0	-1	0	3	8



Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу (щелчок мышкой), проводим параболу (по щелчку).

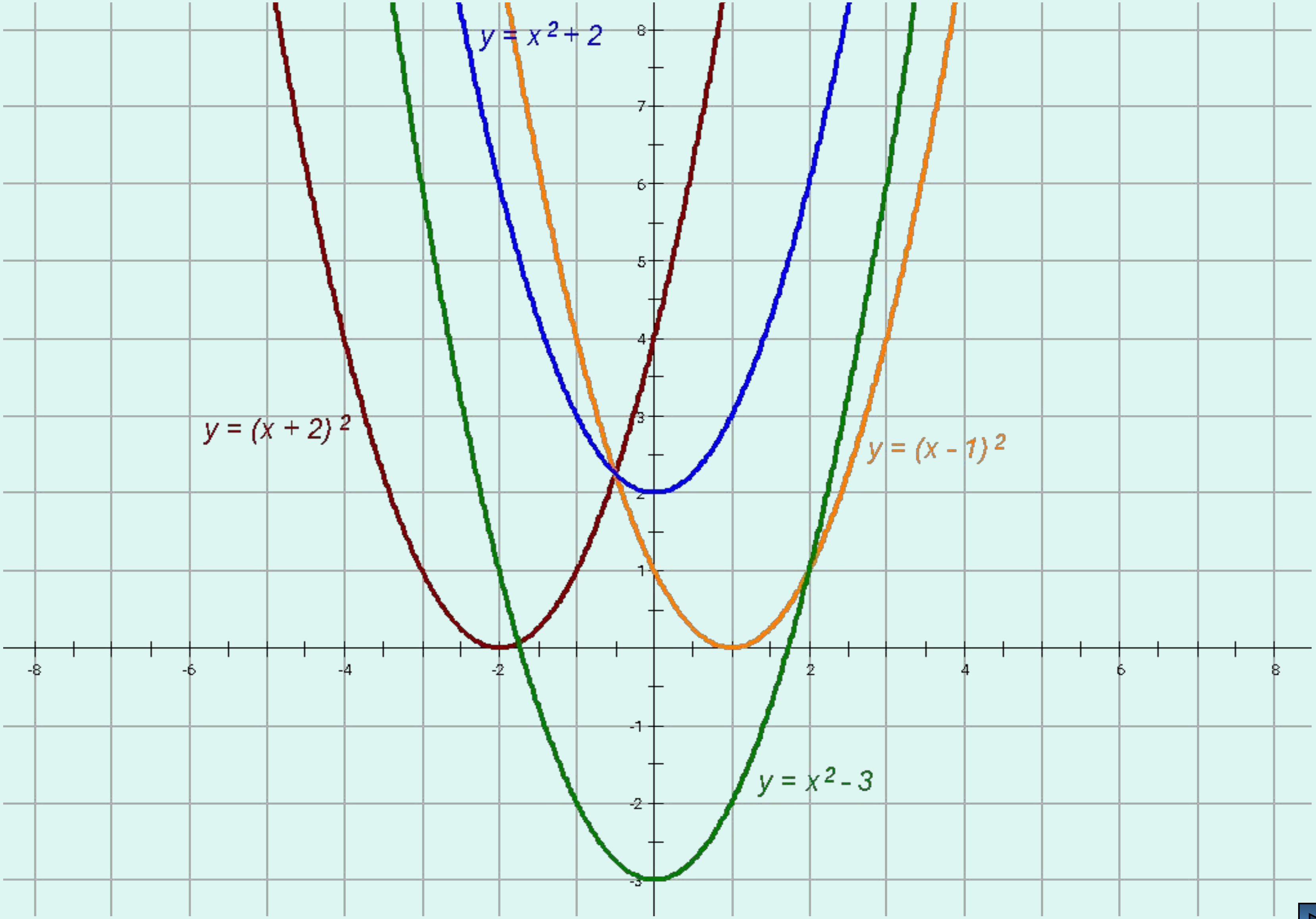
Постройте самостоятельно графики функций:

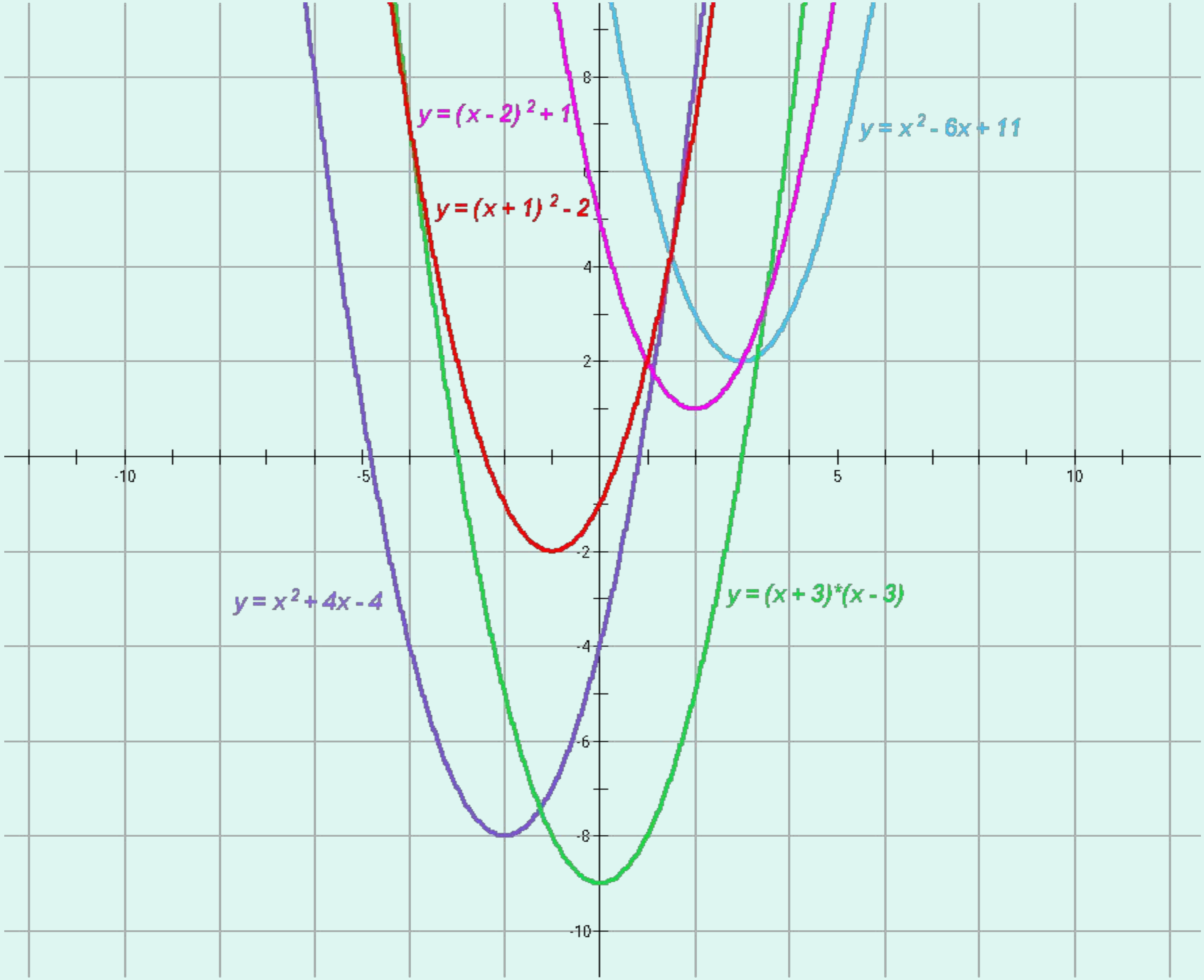
1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = x^2 – 3$;
3) $y = (x – 1)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x + 1)^2 – 2$;
6) $y = (x – 2)^2 + 1$;
7) $y = (x + 3)*(x – 3)$;
8) $y = x^2 + 4x – 4$;
9) $y = x^2 – 6x + 11$.



При построении графика функции вида $y=(x - m)^2 + n$ удобно пользоваться заранее заготовленным шаблоном параболы $y = x^2$.

Далее можно сверить свои результаты с тем, что должно быть в действительности


y = x 2 + 2
y = (x + 2) 2
y = (x - 1) 2
y = x 2 - 3
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8


$y = (x - 2)^2 + 1$
$y = x^2 - 6x + 11$
$y = (x + 1)^2 - 2$
$y = x^2 + 4x - 4$
$y = (x + 3)*(x - 3)$
-10
-5
5
10
8
4
2
-2
-4
-6
-8
-10