Метод главных элементов для решения системы линейных уравнений

Студент группы: ФМ-12-15
Мижеев В. Ю.

Формулы:

- Запишем систему линейных уравнений следующим образом:

$A\bar{x} = \bar{b}$. (1)

Расширенная матрица A этой системы имеет вид:

(2)

[illegible]

продолжение

- На первом шаге элемент $a_{11} \neq 0$ называется ведущим. Разделим на него первую строку матрицы А, в результате получим:

(3)

продолжение

- Найдем x_1 из (3), подставим его значение во все остальные уравнения и тем самым исключим x_1из всех уравнений, кроме первого. Взяв теперь полученную систему без первого уравнения, повторяем этот процесс, беря в качестве ведущего элемента коэффициент при x_2 и т.д. Этот процесс, называемый прямым ходом метода Гаусса, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего $(n -$ ого) уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_n, т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду. Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное неизвестное x_n. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем $x_n - 1$ и т.д. Последним находим x_1из первого уравнения.

Схему вычислений по методу Гаусса с выбором главного элемента поясняет следующий пример:

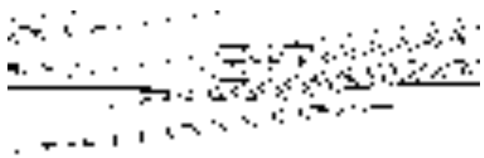
- $$\begin{aligned} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 3{,}17\,x_3 &= 2{,}18; \\ 1{,}12x_1 + 0{,}83x_2 - 2{,}16\,x_3 &= -1{,}15; \\ 0{,}18x_1 + 1{,}27x_2 + 0{,}76\,x_3 &= 3{,}23. \end{aligned}$$

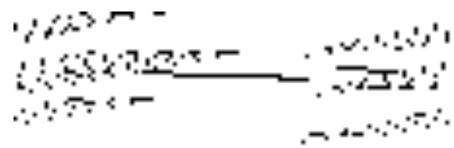
Решение ведется в таблице 1.

mi	Коэф-ты при неизвестных			Сво-бодн. члены	∑	∑′	
	x1	x2	x3				
А	–1 0,6814 –0,2397	2,74 1,12 0,18	–1,18 0,83 1,27	3,17 –2,16 0,76	2,18 –1,15 3,23	6,91 –1,36 5,44	—
Б	–1 0,1596	2,9870 –0,4768	0,0259 1,5528	— —	0,3355 2,7075	3,3484 3,7835	3,3485 3,7837
В	—	—	1,5569	—	2,7601	4,3170	4,3181

продолжение

- Выбираем максимальный элемент в столбцах x_1, x_2, x_3 раздела А (a_{13}=3,17). Заполняем столбец m_i раздела А, полученный делением элементов столбца x_3 (результат деления берется с обратным знаком) на максимальный элемент a_{13} =3,17:





продолжение

- В столбец $\sum$ записываются суммы коэффициентов строк матрицы А:

$$2{,}74+(-1{,}18)+3{,}17+2{,}18=6{,}91;$$

$$1{,}12+0{,}83+(-2{,}16)+(-1{,}15)=-1{,}36;$$

$$0{,}18+1{,}27+0{,}76+3{,}23=5{,}44.$$

продолжение

- Переход к разделу Б ведется следующим образом: строку, содержащую главный (ведущий) элемент, умножаем на m_i и прибавляем к соответствующей $i-$ ой строке. Результат записываем в раздел Б. Строка с ведущим элементом в раздел Б не переписывается.

$$2{,}74\times0{,}6814+1{,}12=2{,}9870;$$

$$(-1{,}18)\times0{,}6814+0{,}83=0{,}0259;$$

$$2{,}28\times0{,}6814+(-1{,}15)=0{,}3355;$$

$$6{,}91\times0{,}6814+(-1{,}36)=3{,}3485$$

(результат заносится в столбец $\sum'$).

продолжение

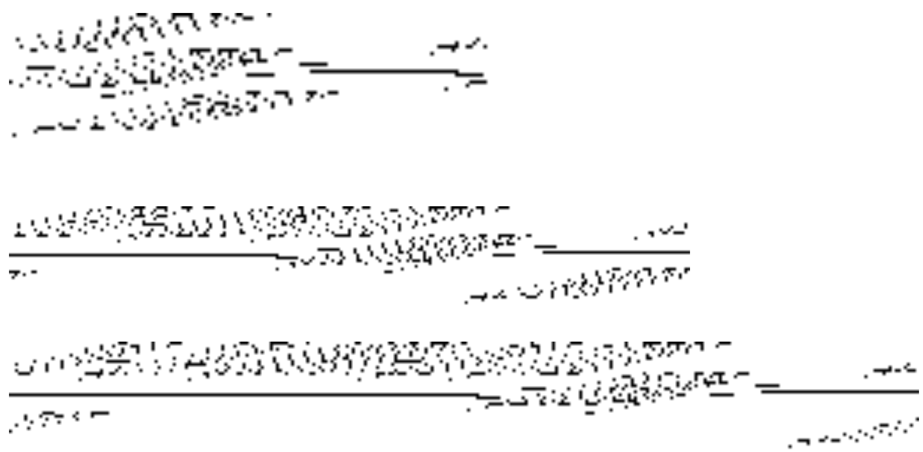
- Далее считает сумму $\sum$ в каждой строке раздела Б.

$$2{,}9870+0{,}0259+0{,}3355=3{,}3484;$$

$$-0{,}4768+1{,}5528+2{,}7075=3{,}7835.$$

продолжение

- Если столбцы $\sum$ и $\sum'$ совпадают (с заданной точностью), то вычисления выполнены верно и можно переходить к следующему шагу: выбираем главный элемент (2,9870), считаем mi и т.д.
- В результате обратного хода получаем:



продолжение

- Практически, вследствие вычислительных погрешностей, полученное методом Гаусса решение системы является приближенным. Покажем, как уточнить это решение.
- Пусть для системы получено приближенное решение Положим .
- Тогда для вектора поправки будем иметь

уравнение или

продолжение

- где [illegible] – вектор невязок для приближенного решения [illegible]. Таким образом, чтобы найти , [illegible] нужно решить систему с прежней матрицей А и новым вектором свободных членов [illegible]. Заметим, что преобразованные коэффициенты матрицы А можно не уточнять, так как при малых невязках соответствующие ошибки будут иметь более высокий порядок малости.

продолжение

- Найдем поправку [illegible] к полученному в нашем примере решению

Коэффициенты при неизвестных $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3$ уже имеются готовыми в таблице 1. Остается лишь преобразовать вектор свободных членов.

Прямой ход

mi	Коэф-ты при неизвестных			Свобод. члены	∑	∑′	
	Δ1	Δ2	Δ3				
А	–1 0,6814 –0,2397	2,74 1,12 0,18	–1,18 0,83 1,27	3,17 –2,16 0,76	–0,0001 –0,0003 –0,0964	4,7299 –0,2103 2,1136	—
Б	–1 0,1596	2,9870 –0,4768	0,0259 1,5528	— —	–0,0004 –0,0964	3,0125 0,9796	3,0127 0,9798
В	—	—	1,5569	—	–0,0964	1,4605	1,4604

Обратный ход.

- $\Delta 2=\frac{-0{,}0964}{1{,}5569}$=-0,0619
- $\Delta 1=\frac{-0{,}0004-0{,}0259*(-0{,}0619)}{2{,}9870}$=0,0004
- $\Delta 3=\frac{-0{,}0001-2{,}74*0{,}0004+1{,}18*(-0{,}0619)}{3{,}17}$=-0,0234
- Вектор  может служить для приближенной оценки абсолютной погрешности полученного решения.

Спасибо за внимание!