

Свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и их графики

$$y = \operatorname{tg} x$$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, является нечетной и периодической с периодом π .

Покажем, что на промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

Покажем, что на промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$,

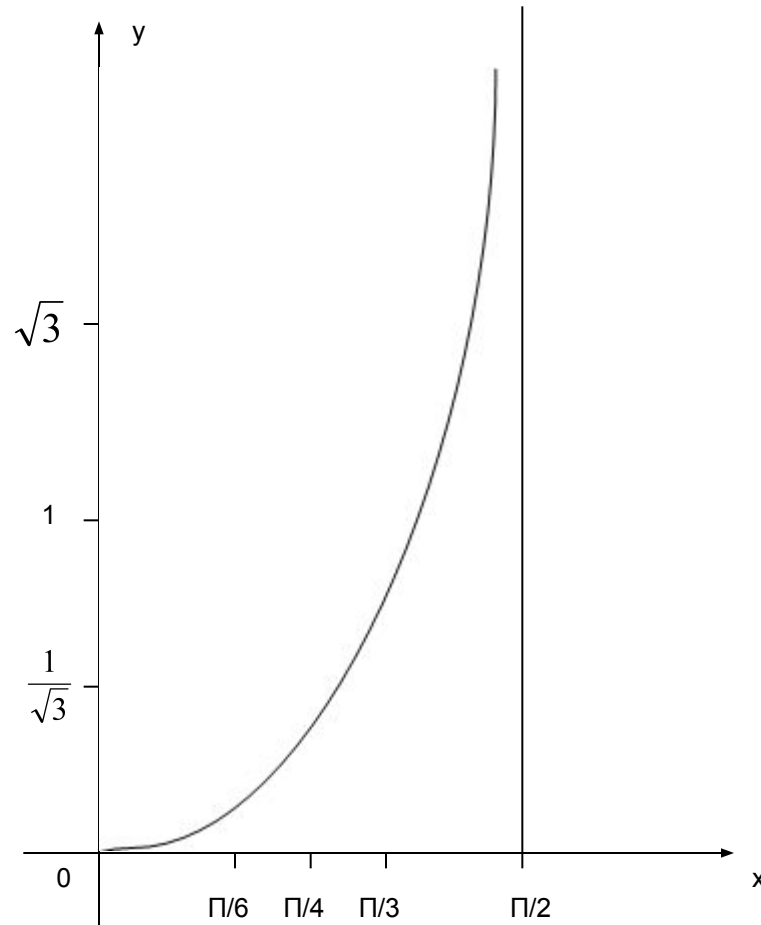
т.е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. По условию $0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$, а по

свойствам функции $y = \cos x$ имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда

$0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$. Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$

и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$ получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$

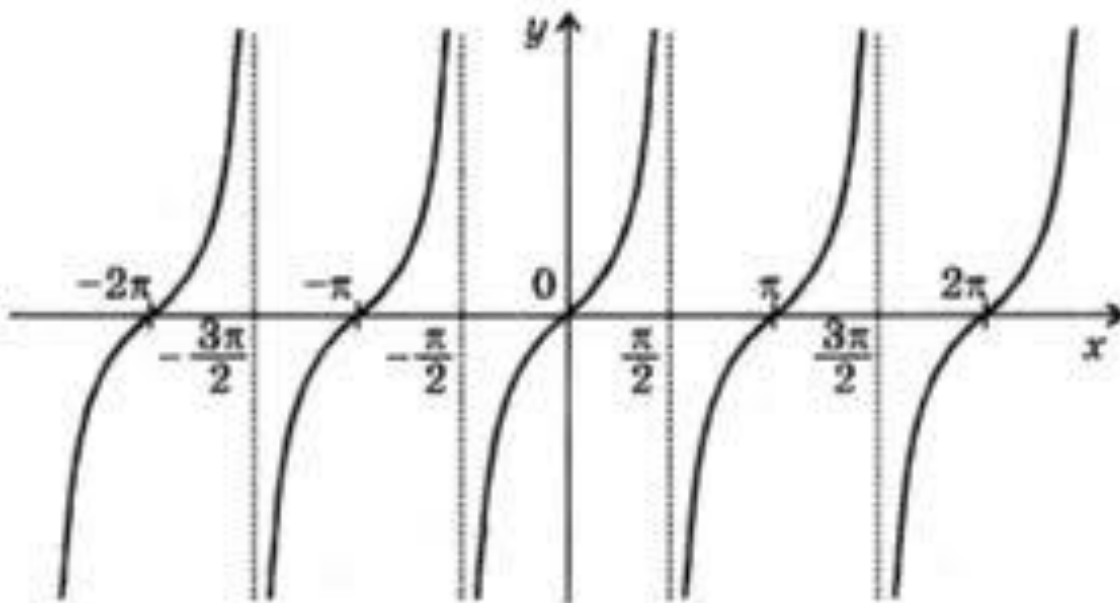
Построим график на промежутке $[0; \pi/2)$ и отразим его симметрично относительно начала координат, получим график этой функции на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$



При $x = \pm \frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \pi/2$ и x приближается к $\pi/2$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ возрастает и поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \pi/2$. Аналогично при отрицательных значениях x , больших $-\pi/2$ и приближающихся к $-\pi/2$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = -\pi/2$, т.е. прямые $x = \pi/2$ и $x = -\pi/2$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения:

Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом Π , следовательно график этой функции получается на интервале от $(-\Pi/2; \Pi/2)$ сдвигами вдоль оси абсцисс на Πk , где $k \in \mathbb{Z}$



Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1) Область

определения – множество всех

действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

2) Множество значений $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом π

4) Нечетная.

5) Функция принимает значение, равно 0, при

$$\chi = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Положительные значения на интервале $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
 $n \in \mathbb{Z}$

Отрицательные $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Возрастающая $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Задача 1: Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ принадлежащие отрезку $[-\pi; 3\pi/2]$

Построим графики функций $y=2$ и $y=\operatorname{tg} x$. Эти графики пересекаются в 3-х точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$. т.к. функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π , то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ: $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Задача 2: Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leq 2$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 3\pi/2]$

Построим графики функций $y=2$ и $y=\operatorname{tg} x$. Из графика видно, что график функции $y=\operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y=2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $(-\pi/2; x_1]$ и $(\pi/2; x_2]$.

Ответ: $x \in [-\pi; -\pi + \operatorname{arctg} 2]$, $x \in (-\pi/2; \operatorname{arctg} 2]$, $x \in (\pi/2; \pi + \operatorname{arctg} 2]$

Сравнить числа:

$$\begin{aligned} &\text{tg } \pi/5 \text{ и } \text{tg } \pi/7 \\ &\text{tg } \pi/5 > \text{tg } \pi/7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{tg } 7\pi/8 \text{ и } \text{tg } 8\pi/9 \\ &\text{tg } 7\pi/8 < \text{tg } 8\pi/9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{tg } (-7\pi/8) \text{ и } \text{tg } (-8\pi/9) \\ &\text{tg } (-7\pi/8) > \text{tg } (-8\pi/9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{tg } (-\pi/5) \text{ и } \text{tg } (-\pi/7) \\ &\text{tg } (-\pi/5) > \text{tg } (-\pi/7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{tg } 2 \text{ и } \text{tg } 3 \\ &\text{tg } 2 < \text{tg } 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{tg } 1 \text{ и } \text{tg } 1,5 \\ &\text{tg } 1 < \text{tg } 1,5 \end{aligned}$$

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

- Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика ctg необходимо сдвинуть график tg на $\pi/2$ влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox . Графики tg и ctg состоят из бесконечного множества одинаковых периодически повторяющихся ветвей.

Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

- Область определения-
множество всех действительных
чисел $x \neq \pi k; k \in \mathbb{Z}$
- Множество значений-
множество $\mathbb{R}$ всех
действительных чисел
- Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с
периодом $T = \pi$
- Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная
- Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
значения, равные нулю при
- -положительные значения на
интервалах $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in \mathbb{Z}$
- -отрицательные значения на
интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right); k \in \mathbb{Z}$
- Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является
убывающей на каждом
интервале $(\pi k; \pi + \pi k); k \in \mathbb{Z}$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$

