

Arccos. Решение уравнений
 $\cos t = a$

Упражнение:

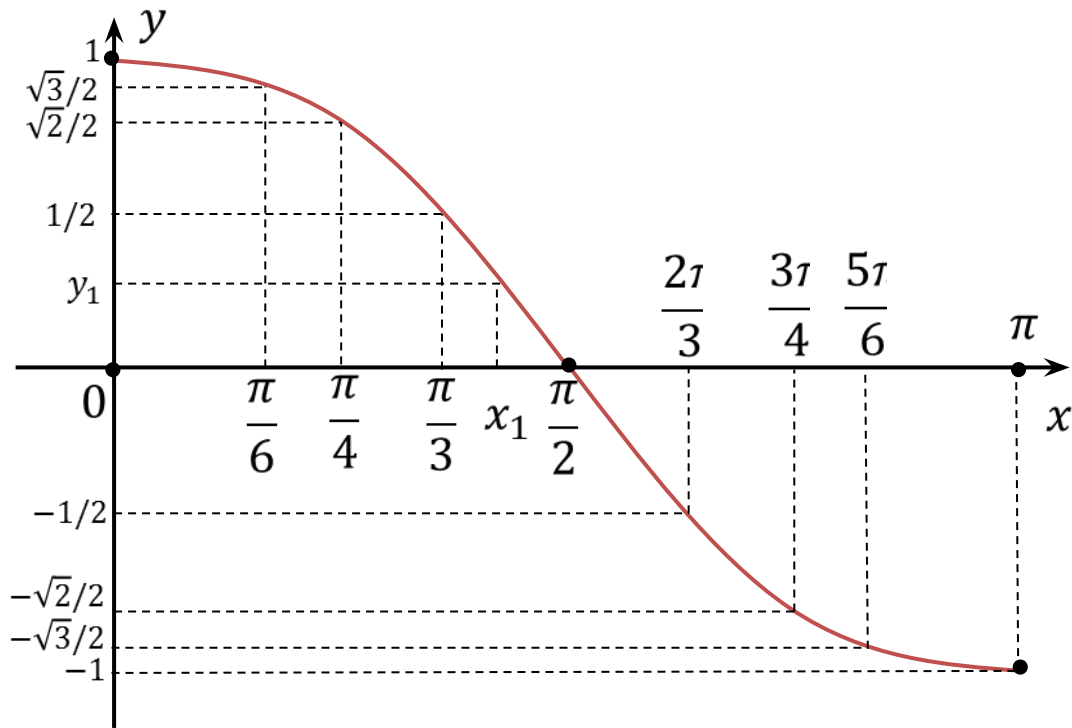
Решить уравнения:

$\sin t = 3$ – не имеет решения, так как $3 \notin [-1; 1]$

$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi k, k \in Z$

$\cos t = -3$ – не имеет решения, так как $-3 \notin [-1; 1]$

$\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k, k \in Z$



$$f(x) \in E(f)$$

Функция монотонно убывает
на этом промежутке

$$x_1 = \arccos y_1$$

если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{2} \right| < 1, \\ \frac{\pi}{3} \in [0; \pi], \\ \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| < 1, \\ \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi], \\ \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

СВОЙСТВО $\arccos a$:

Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \arccos a + \arccos(-a) &= \pi \\ \arccos(-a) &= \pi - \arccos a. \end{aligned}$$

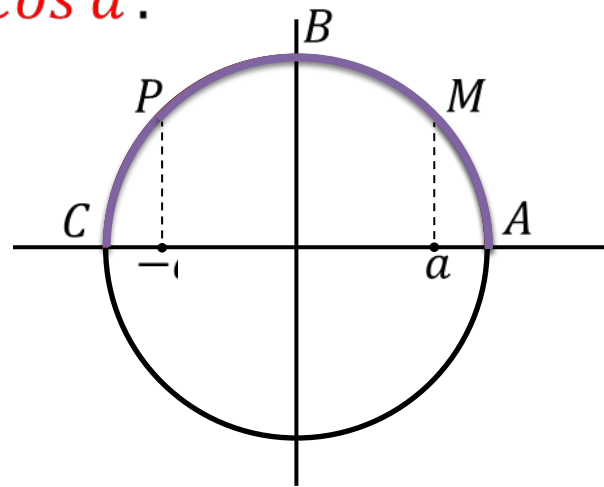
Доказательство:

$$\arccos a = \widehat{AM},$$

$$\arccos(-a) = \widehat{AP},$$

$$\widehat{AM} = \widehat{PC},$$

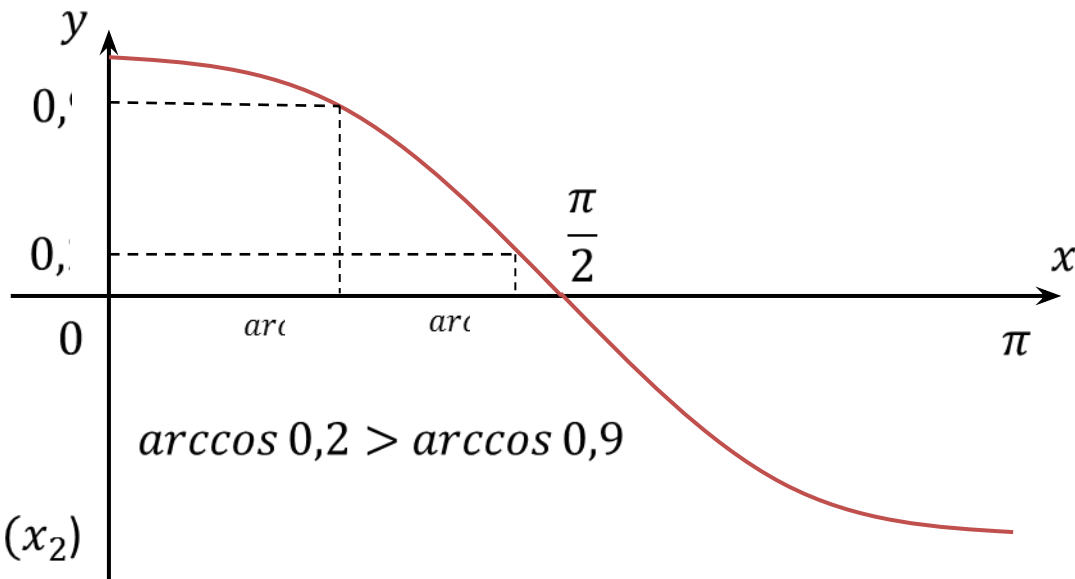
$$\arccos a + \arccos(-a) = \widehat{AP} + \widehat{PC} = \pi$$



Задача

Сравнить числа: $\arccos 0,2$ и $\arccos 0,9$.

Решение:



$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Задача

Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Решение:

$$\arccos\frac{4}{5} = \alpha,$$

$$\arccos\frac{4}{5} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5}, \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

Задача

$$\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t$$

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$$

Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

Решение:

$$\arccos\left(-\frac{12}{13}\right) = \pi - \arccos\frac{12}{13},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = -\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{12}{13}\right),$$

$$\arccos\frac{12}{13} = \alpha,$$

$$\arccos\frac{12}{13} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{12}{13}, \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

$$-\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{12}{13} : \frac{5}{13} = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = -2,4$

Пример:

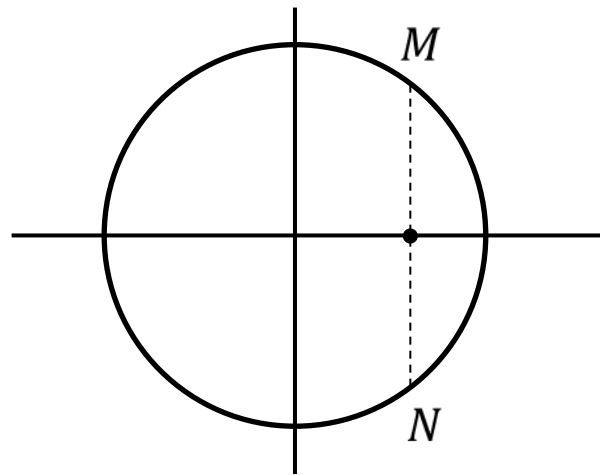
Решить уравнение $\cos t = \frac{3}{5}$.

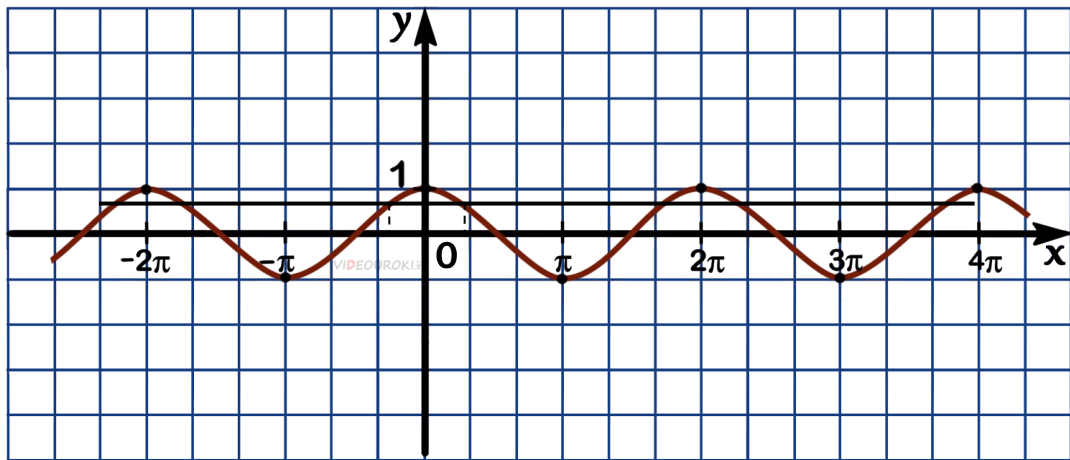
Решение:

$$M: \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$N: -\arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\pm \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

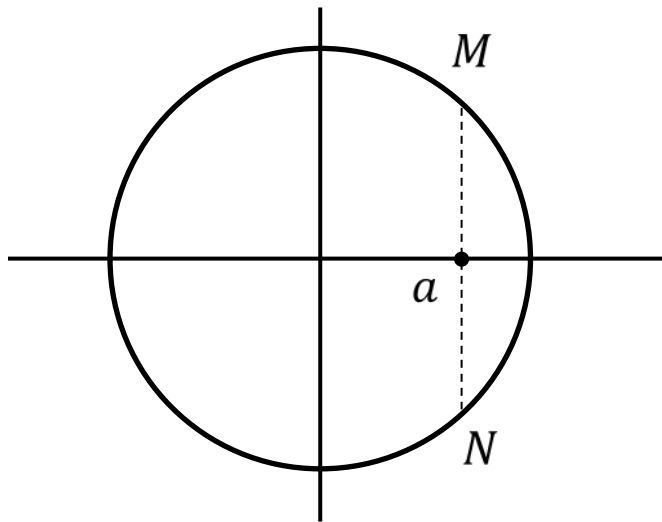




$$\arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$- \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pm \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

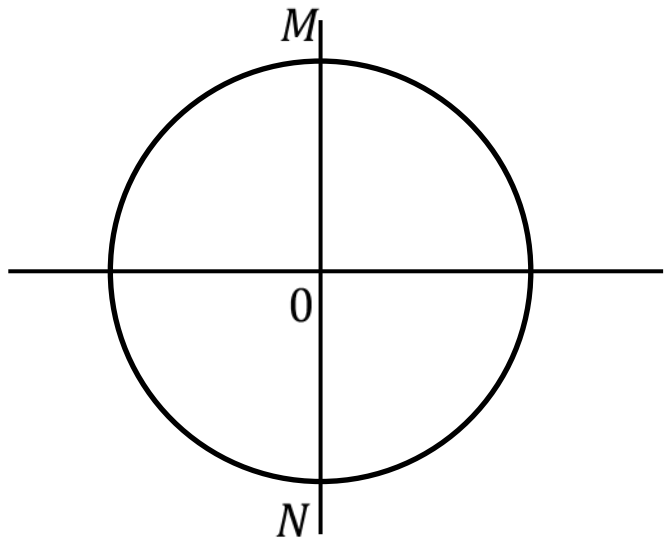


$$\cos t = a, a \in [-1, 1]$$

$$M: \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$N: -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



$$\cos t = 0$$

$$M: \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$N: -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

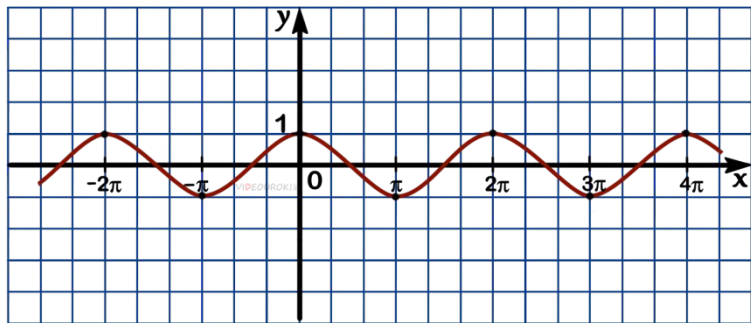
$$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

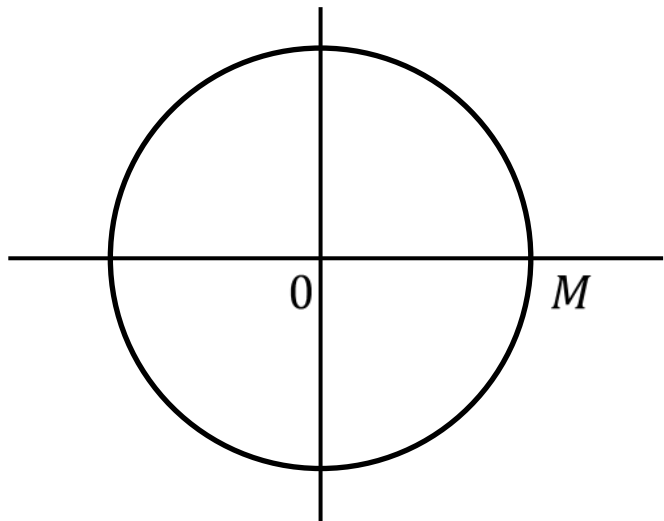
$$t = \pm \arccos 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$t = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$





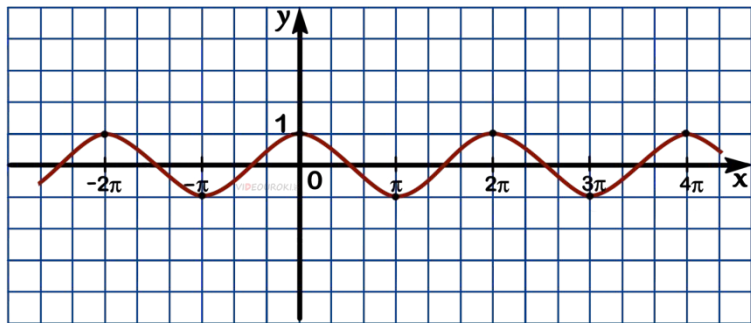
$$\cos t = 1$$

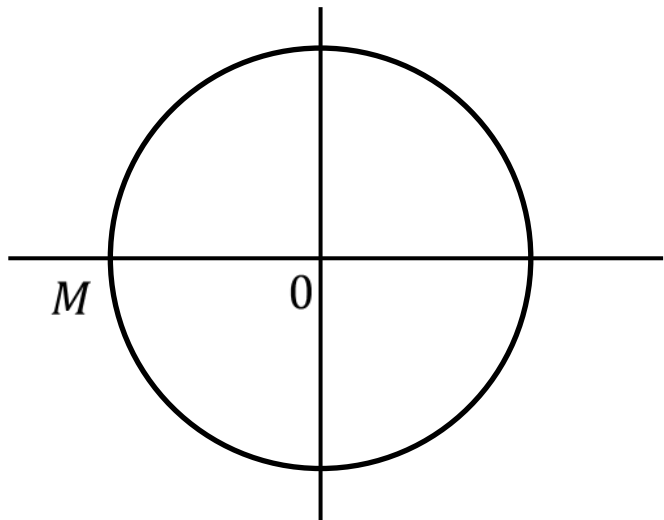
$$M: 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = \pm \arccos 1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos 1 = 2\pi k,$$

$$t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$





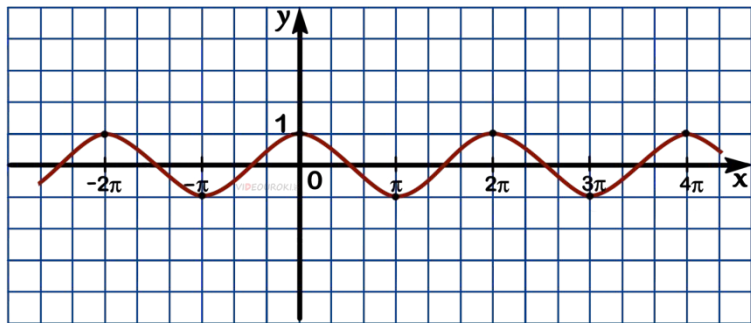
$$\cos t = -1$$

$$M: \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = \pm \arccos(-1) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi + 2\pi k,$$

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$



Пример:

Решить уравнение $\cos t = \frac{2}{5}$.

Решение:

$$\frac{2}{5} \in [-1, 1],$$

$$t = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Алгоритм решения уравнений вида

$$\cos t = a:$$

1. Уравнение будет иметь решение, если $a \in [-1, 1]$;
2. Общая формула решения:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$

Пример:

Решить уравнение $\cos^2 t - \cos t - 2 = 0$.

Решение:

$$\cos t = a,$$

$$a^2 - a - 2 = 0,$$

$$a = -1 \text{ или } a = 2,$$

$$\cos t = -1,$$

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.