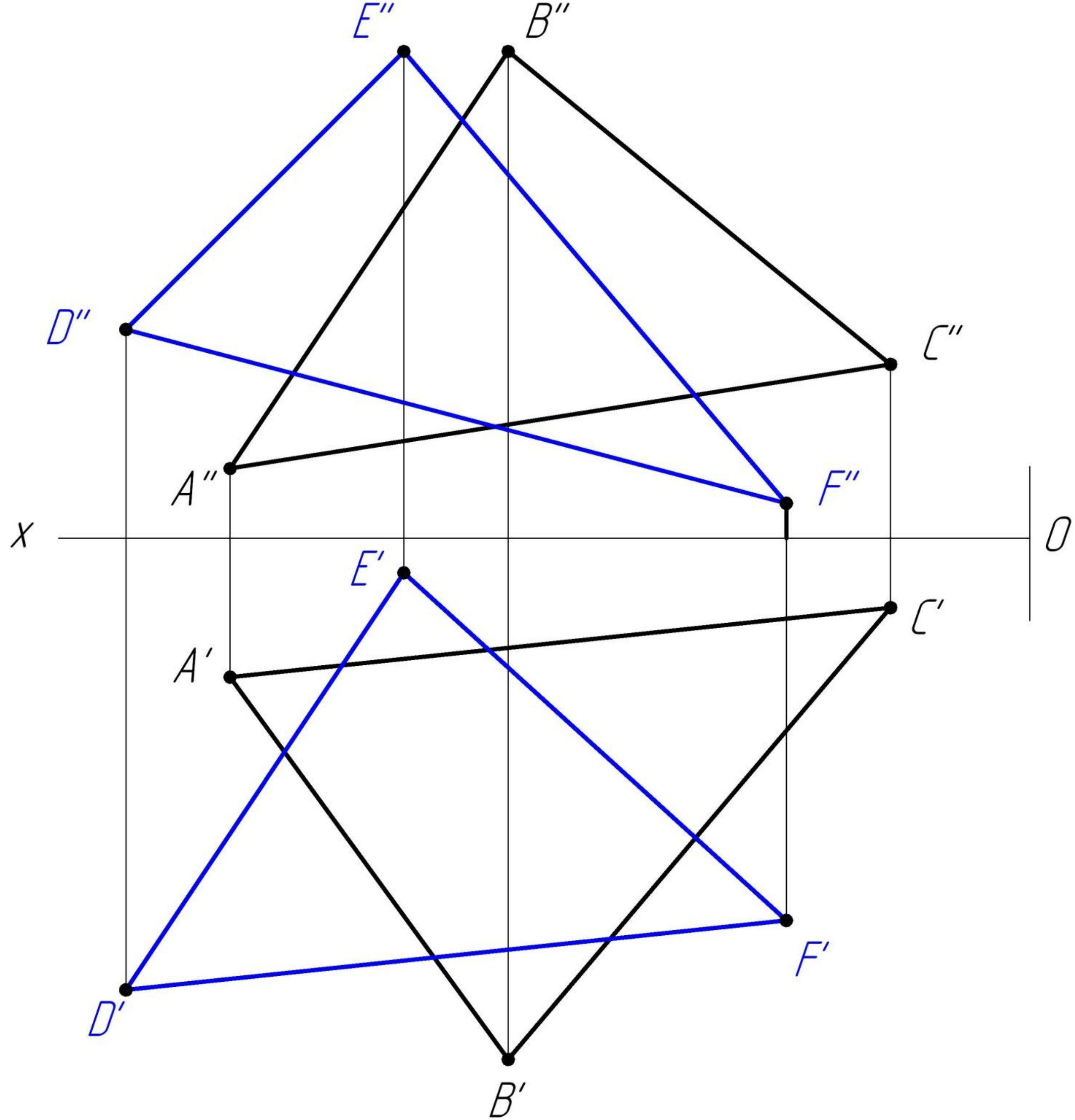
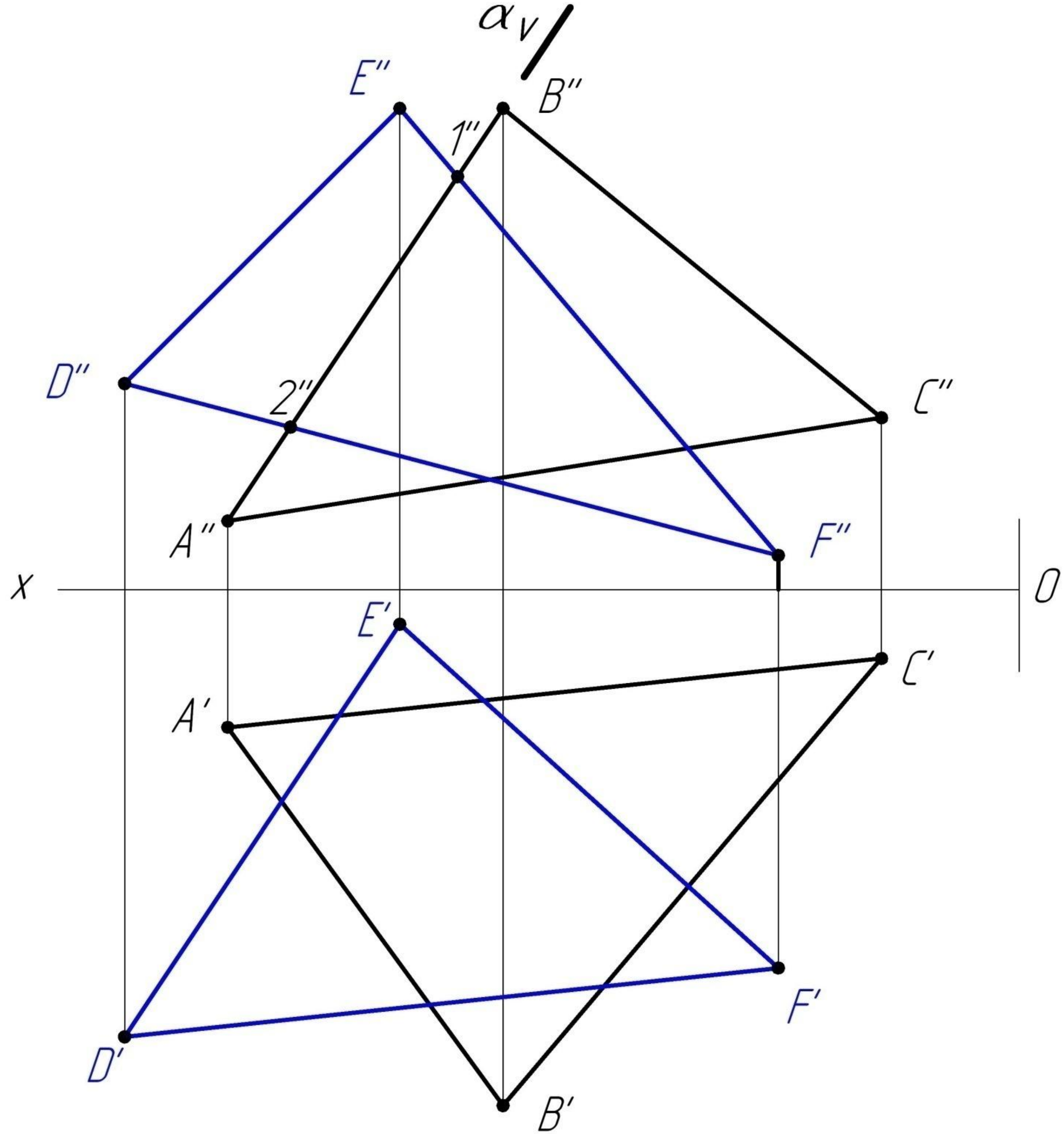
Лекция 6

«Взаимные положения прямой и плоскости, двух плоскостей»

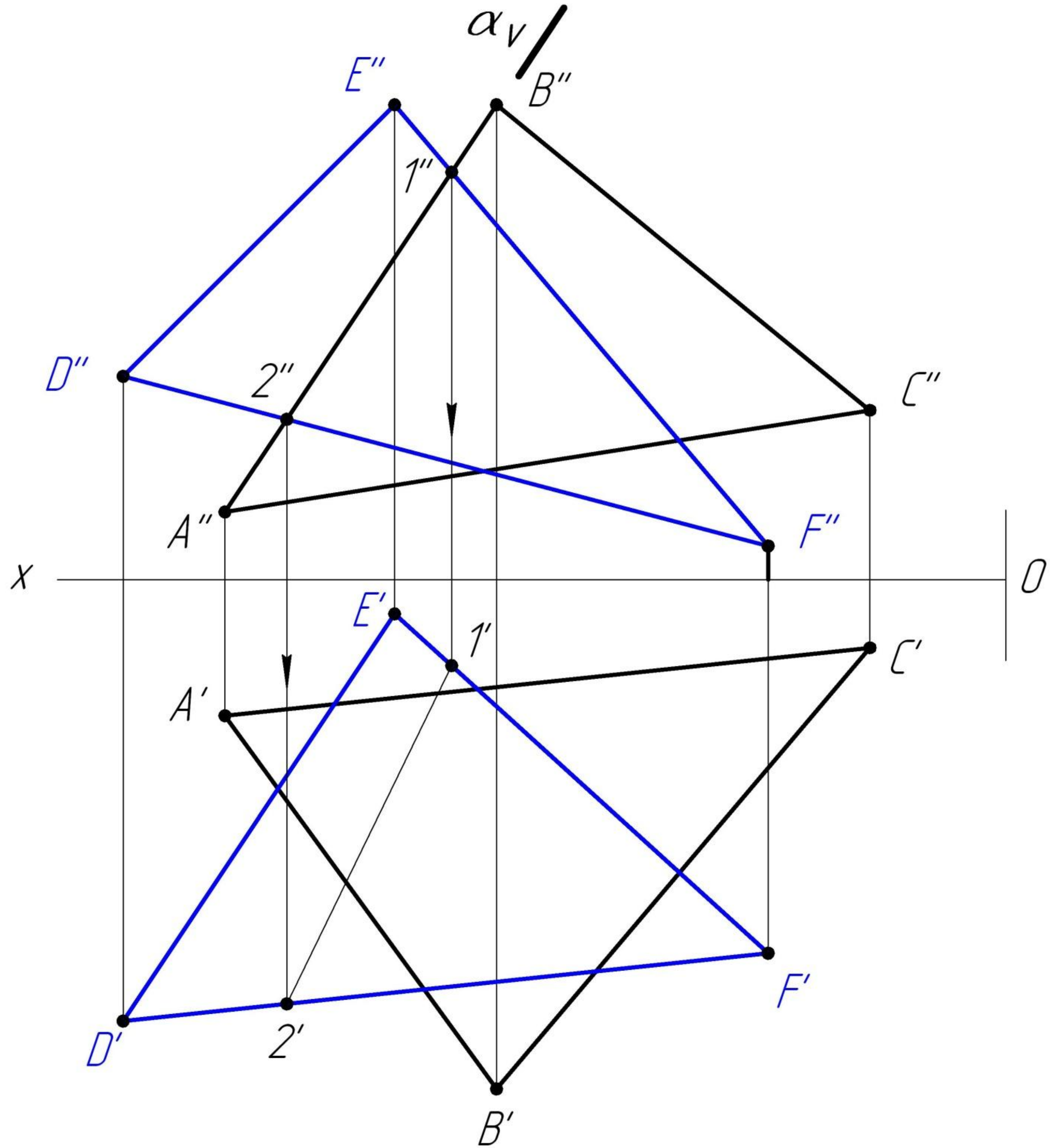
Задача: Построить линию пересечения двух треугольников ΔABC и ΔDEF, как линию соединяющую две точки встречи прямой с плоскостью.

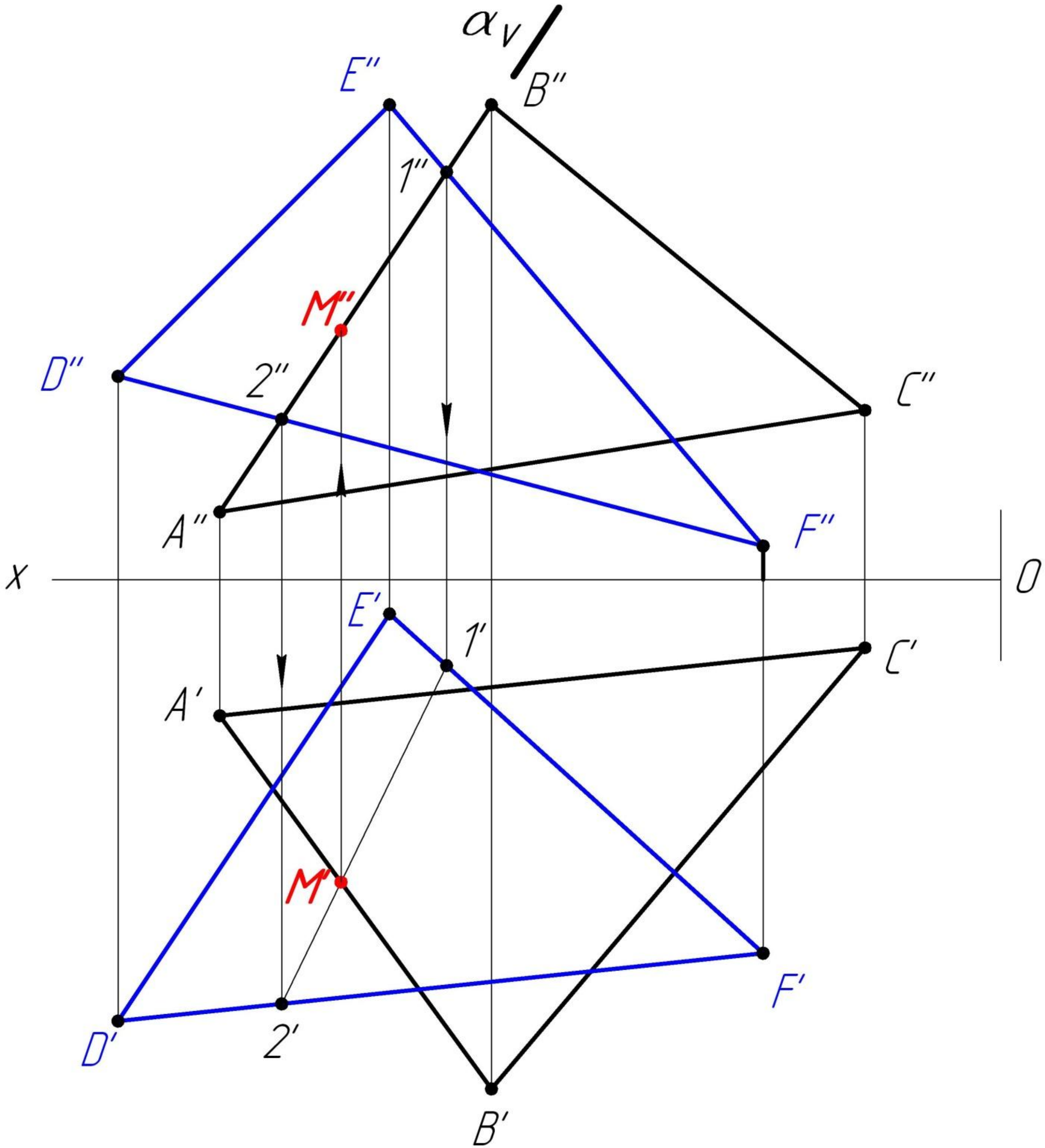
A(115, 20, 10)	D(130, 65, 30)
B (75, 75, 70)	E (90, 5, 70)
C (20,10, 25)	F (35,55, 5)


E''
B''
D''
C''
A''
F''
X
0
E'
C'
A'
F'
D'
B'

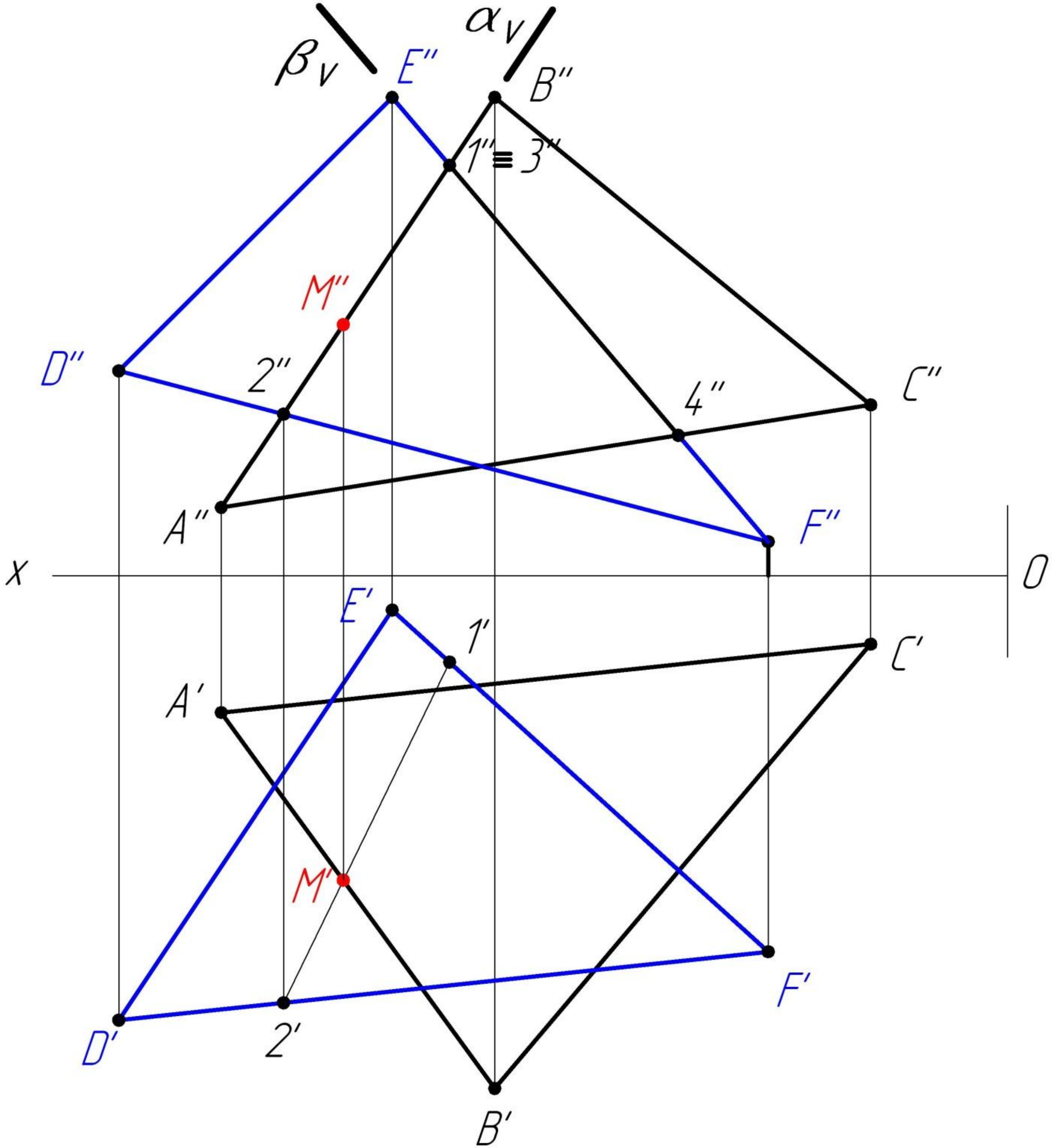


α_V
E''
B''
1''
D''
2''
C''
A''
F''
x
0
E'
C'
A'
F'
D'
B'

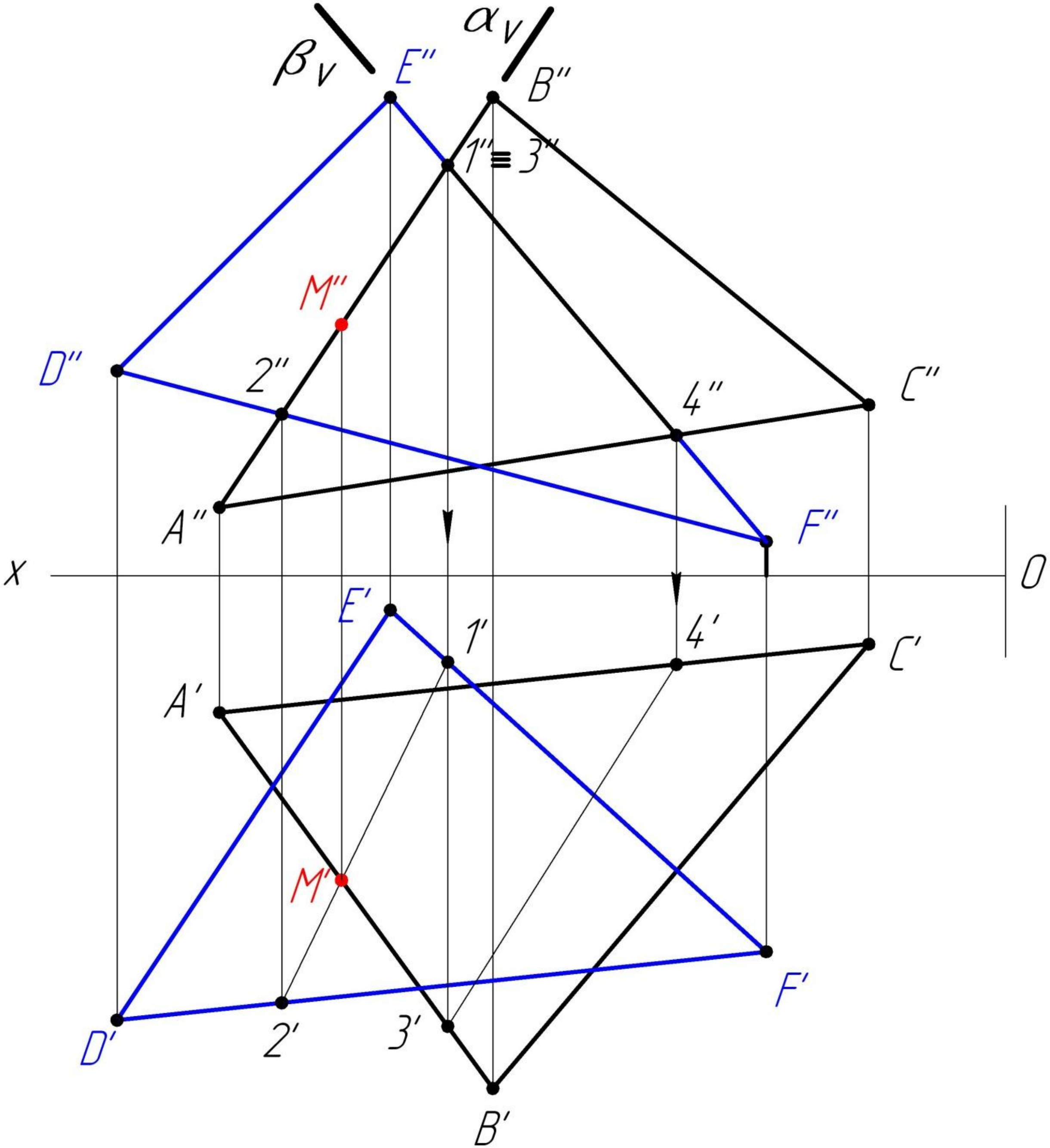

α_V
E''
B''
1''
D''
2''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
C'
A'
F'
D'
2'
B'



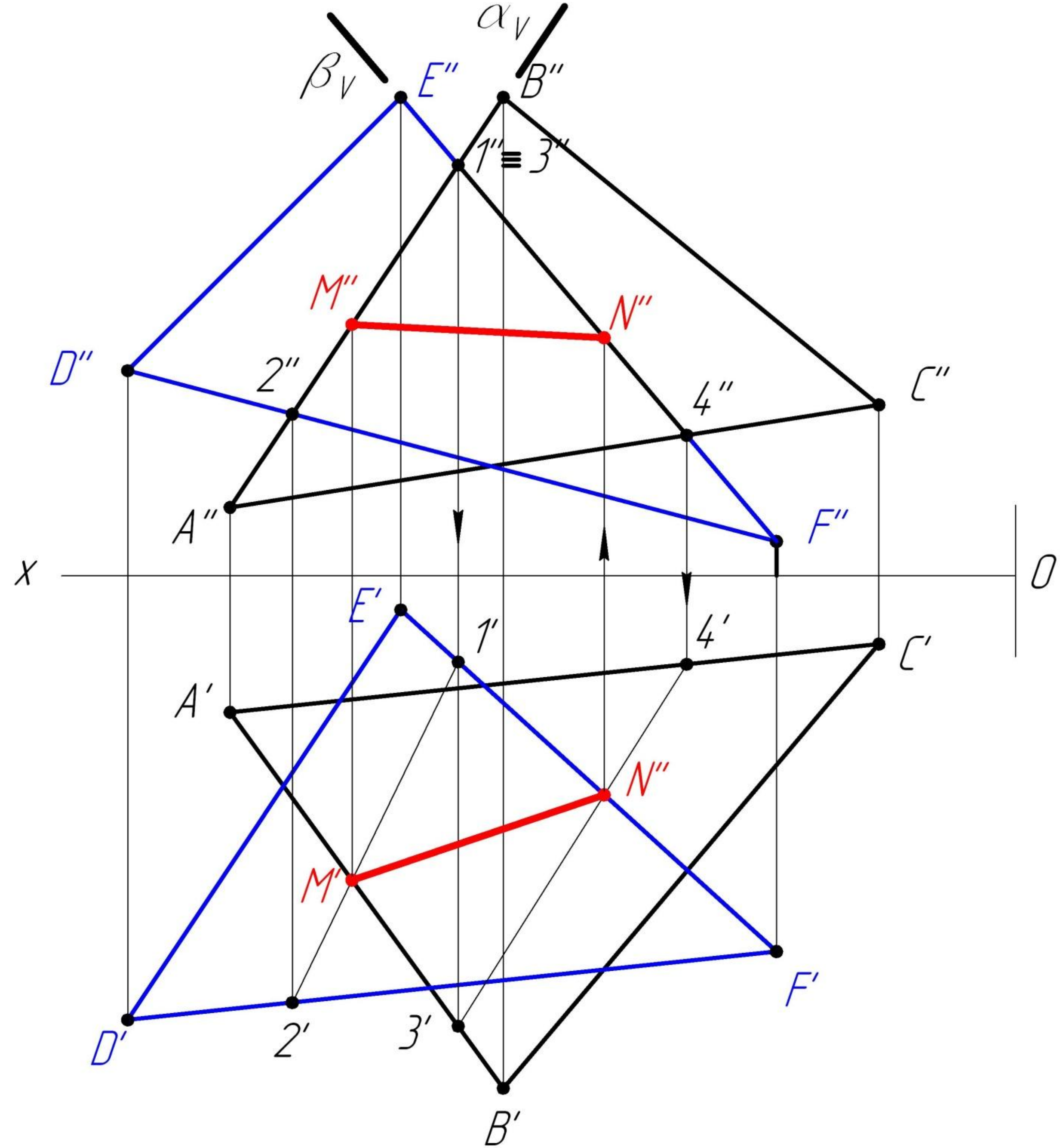
αV
E''
B''
1''
M''
D''
2''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
C'
A'
M'
F'
D'
2'
B'



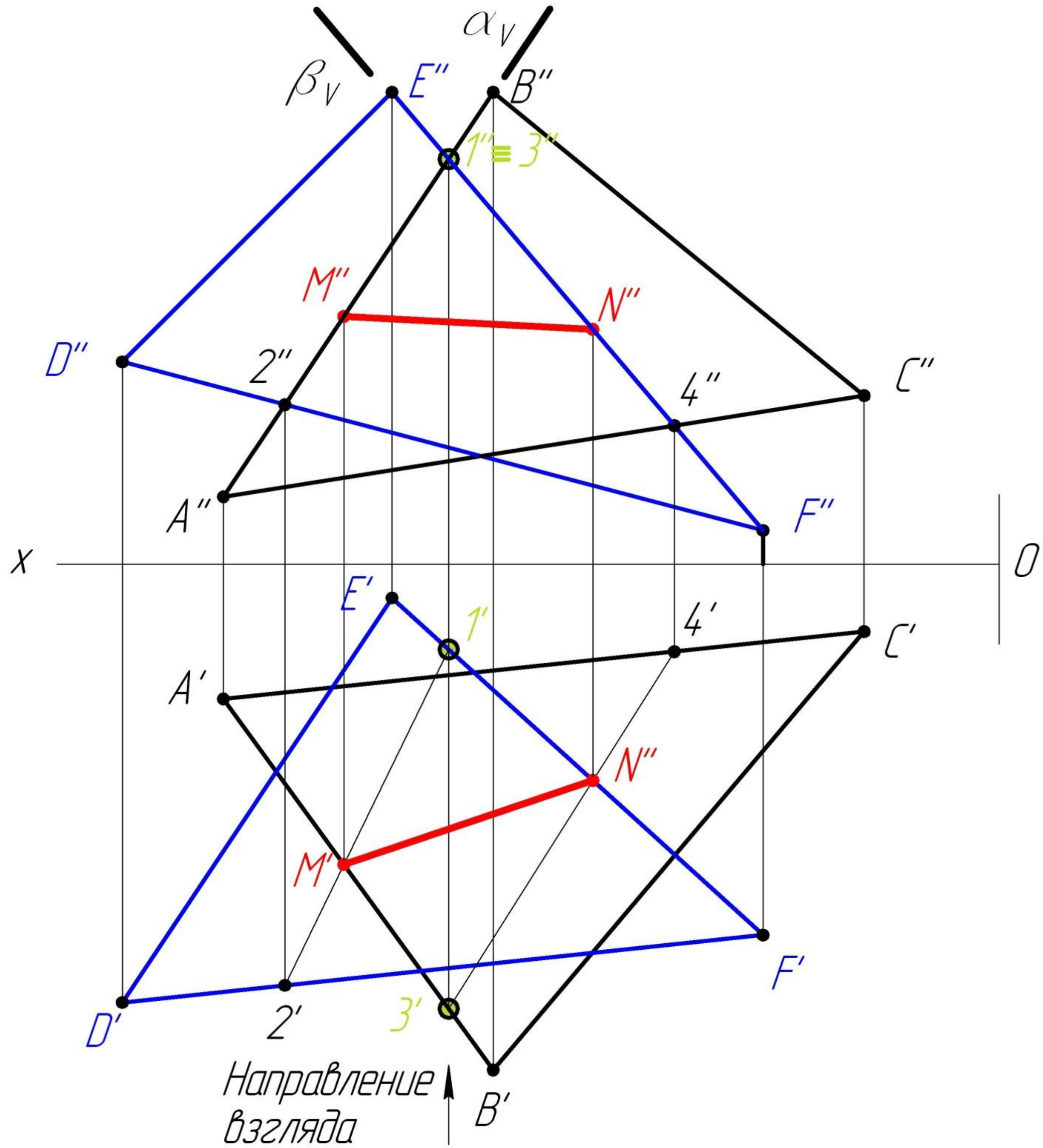
βV
αV
E''
B''
1''≡3''
M''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
C'
A'
M'
F'
D'
2'
B'



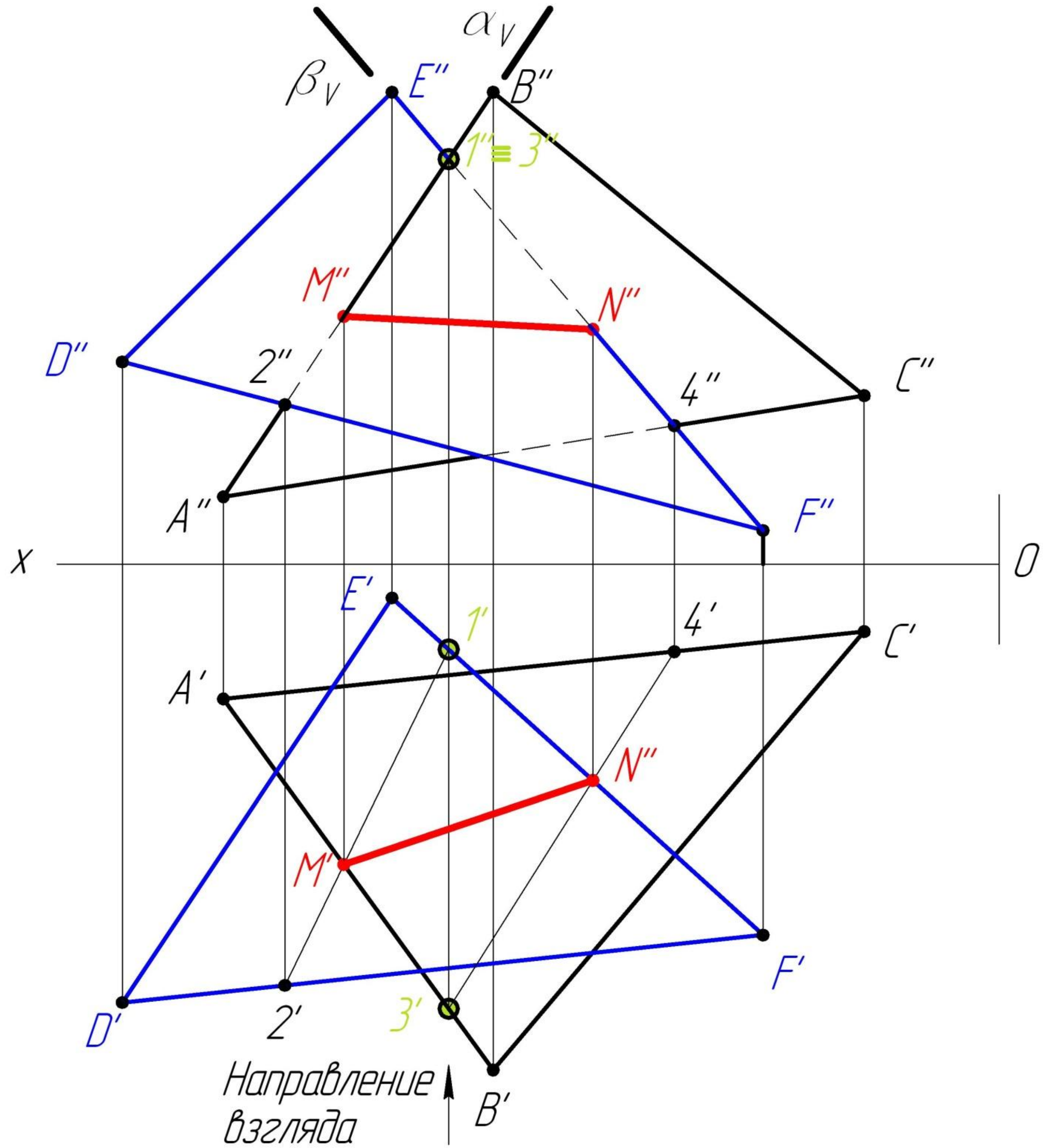
β_V
α_V
E''
B''
1''≡3''
M''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
M'
F'
D'
2'
3'
B'

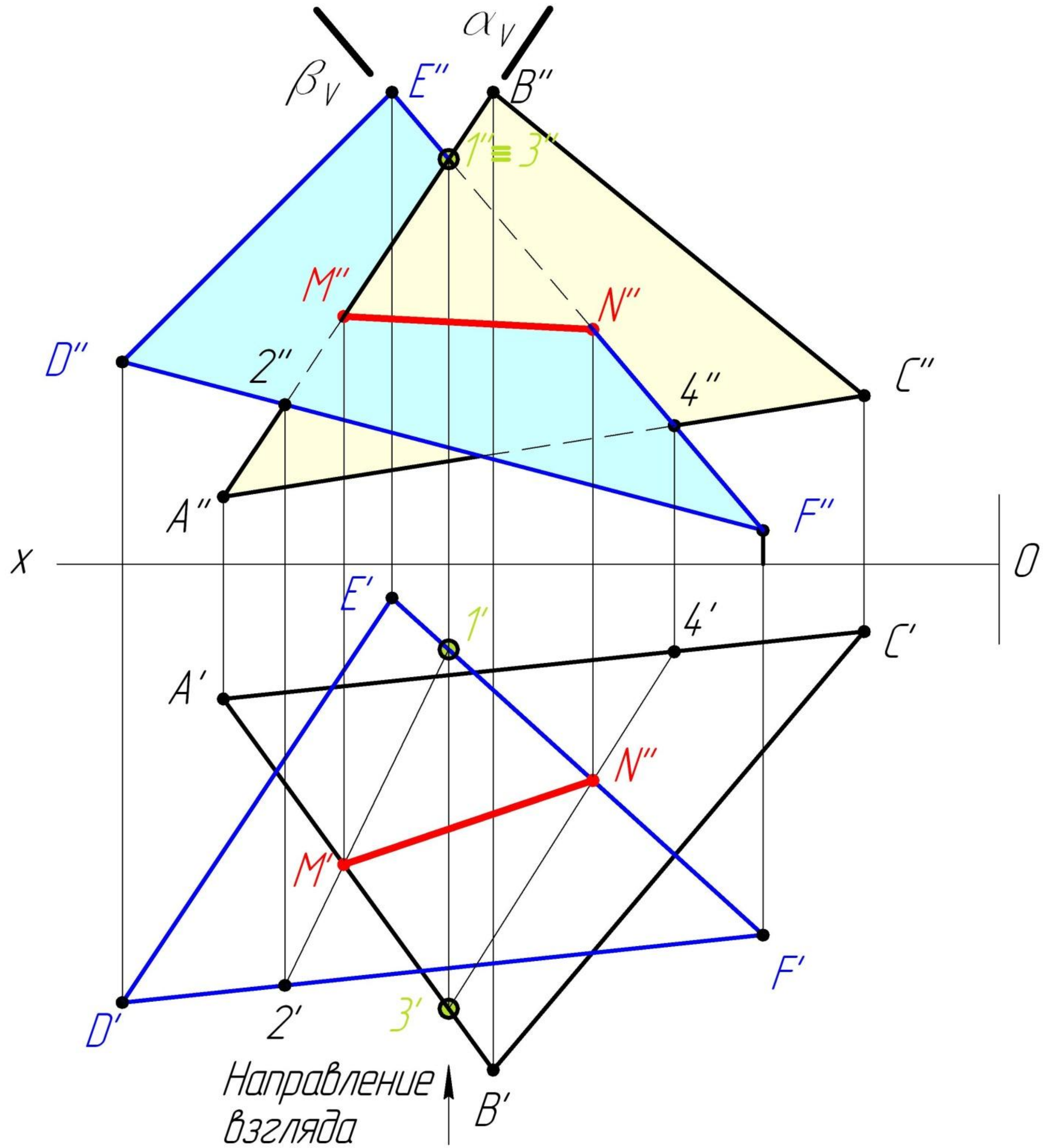


α_V
β_V
E''
B''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
F'
D'
2'
3'
B'

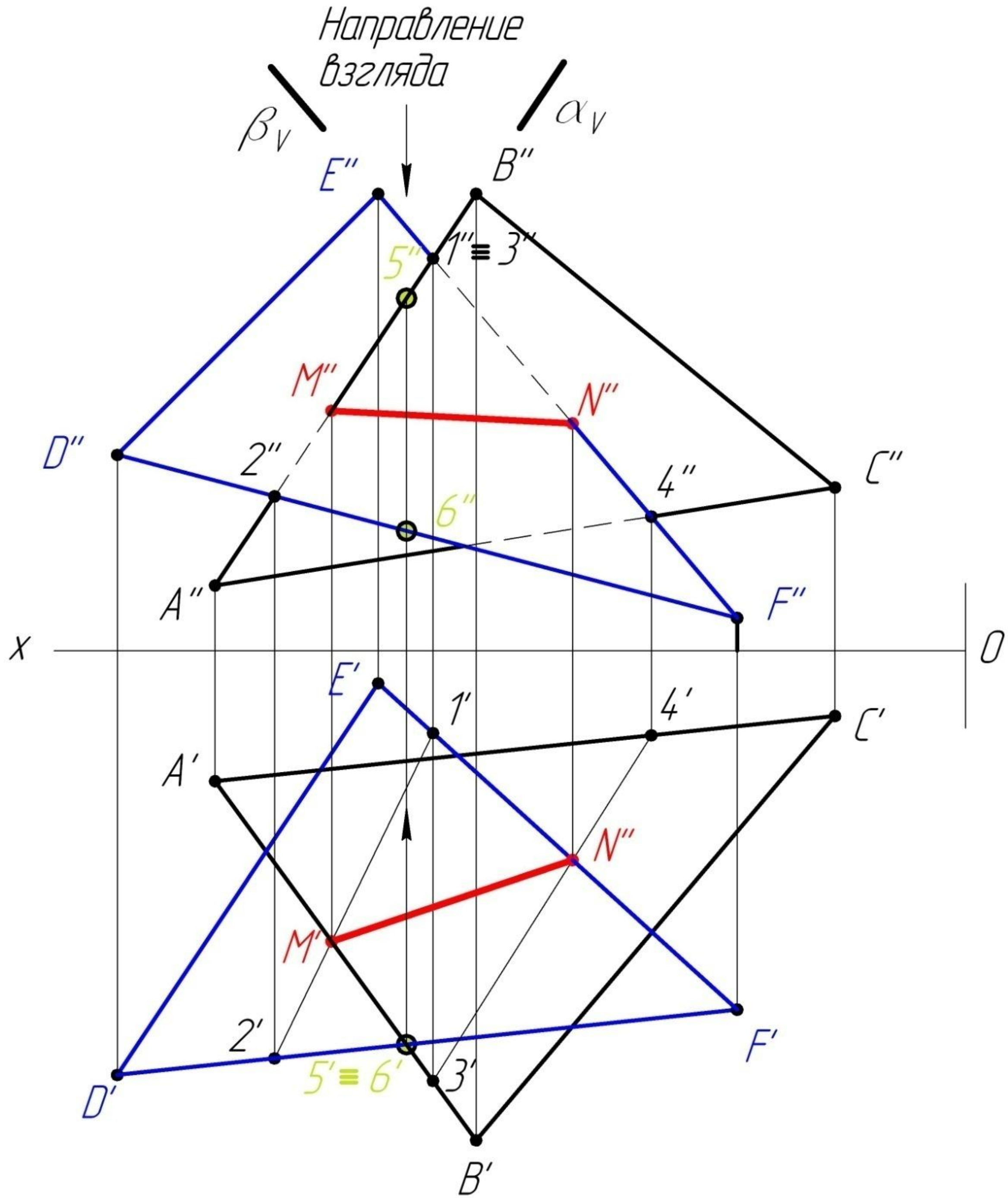


α_V
β_V
E''
B''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
X
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
F'
D'
2'
3'
Направление
взгляда
B'

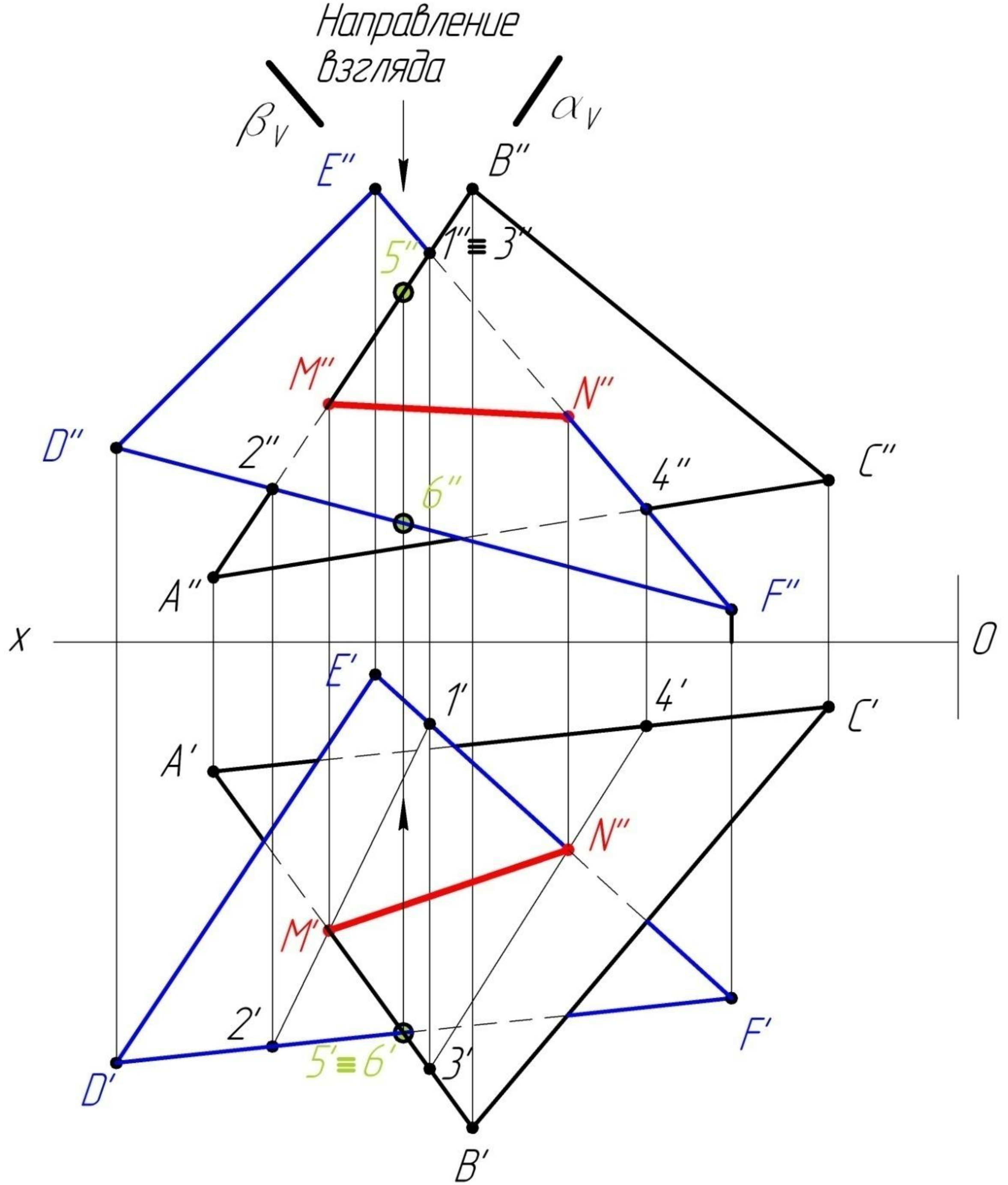

αV
βV
E''
B''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
F'
D'
2'
3'
Направление взгляда
B'

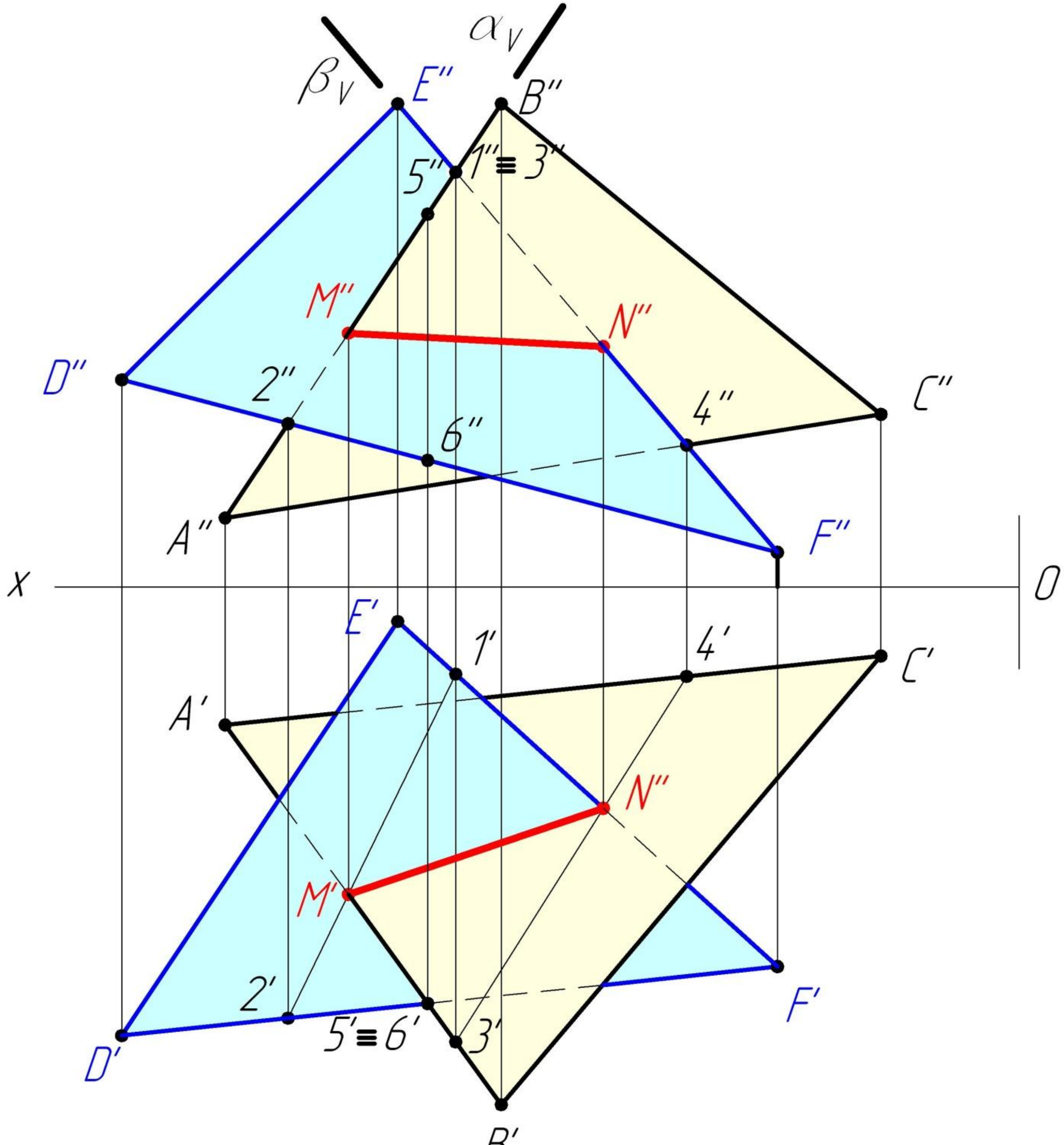


αV
βV
E''
B''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
F'
D'
2'
3'
B'
Направление
взгляда



Направление взгляда
β_V
α_V
E''
B''
5''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
6''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
2'
F'
5'≡6'
3'
D'
B'


Направление взгляда
β_V
α_V
E''
B''
5''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
4''
C''
6''
A''
F''
x
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
2'
F'
5'≡6'
3'
D'
B'



β_V
α_V
E''
B''
5''
1''≡3''
M''
N''
D''
2''
C''
4''
6''
A''
F''
X
0
E'
1'
4'
C'
A'
N''
M'
2'
F'
5'≡6'
3'
D'
B'

Алгоритм решения задачи

1. Заключаем сторону треугольника AB в фронтально-проецирующую плоскость α.

$AB \subset \alpha\ (\alpha_V)$; $\alpha \perp V$

2. Строим линию пересечения ΔDEF и плоскости α.

$\alpha \cap \Delta DEF = (1\text{-}2)$

3. Находим точку M пересечения линий AB и 1-2.

$(1\text{-}2) \cap AB = M$

4. Заключаем сторону треугольника EF в фронтально-проецирующую плоскость β.

$EF \subset \beta\ (\beta_V)$; $\beta \perp V$

5. Строим линию пересечения ΔABC и плоскости β.

$\beta \cap \Delta ABC = (3\text{-}4)$

6. Находим точку N пересечения линий EF и 3-4.

$(3\text{-}4) \cap EF = N$

7. Строим линию MN пересечения треугольников ΔABC и ΔDEF.

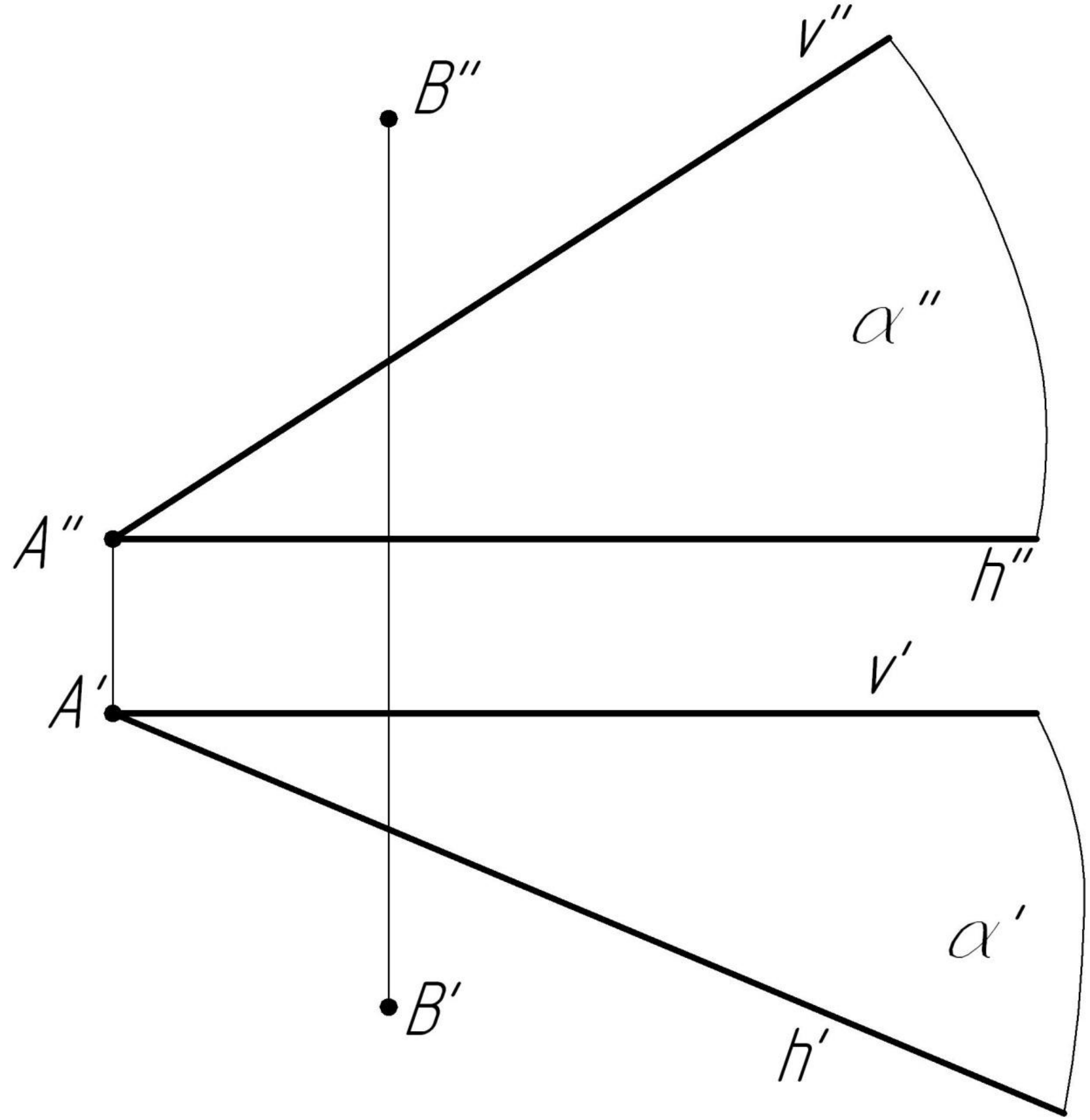
$[MN] = \Delta ABC \cap \Delta DEF$

8. Определяем видимость методом конкурирующих точек

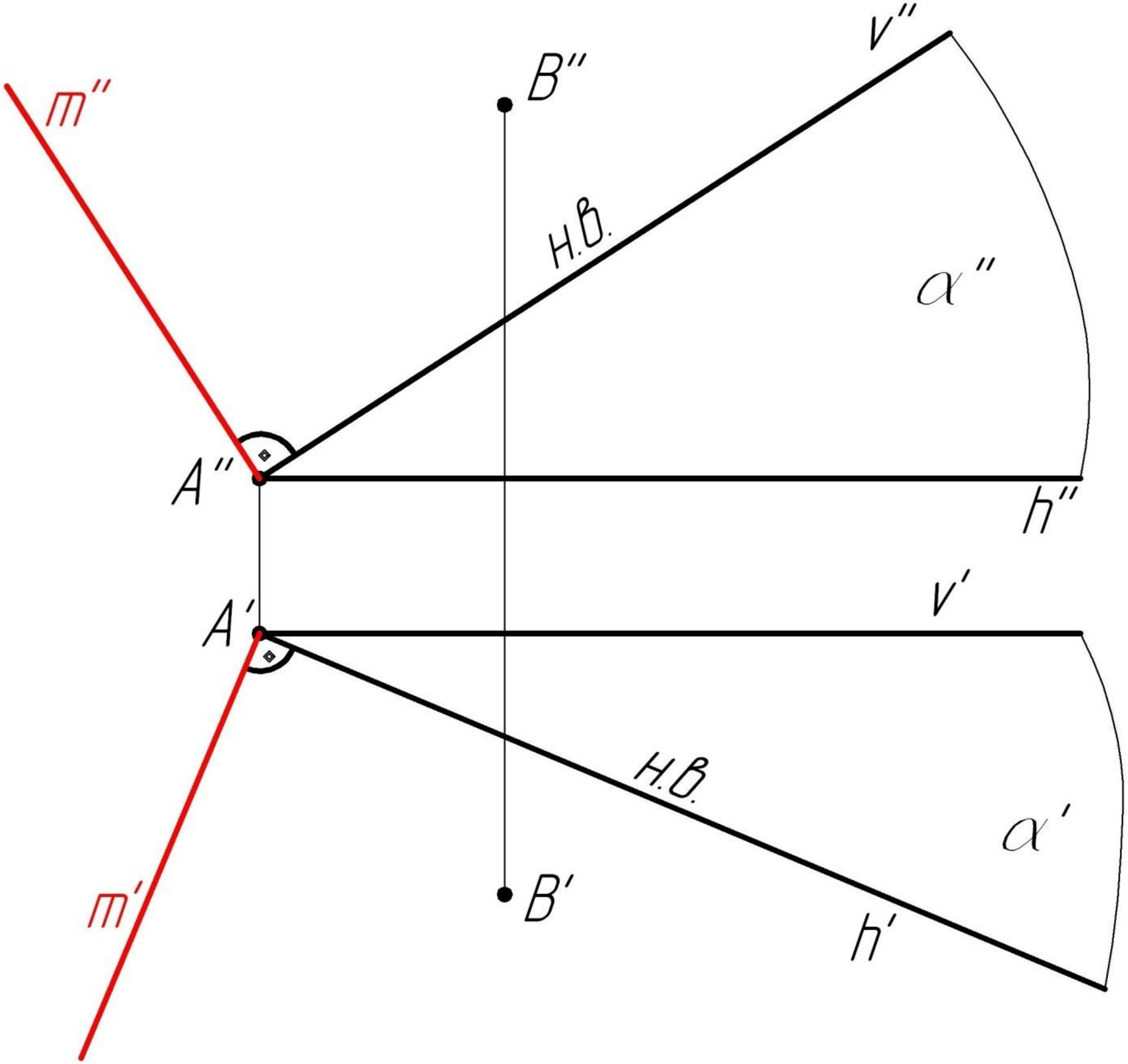
6.1. Перпендикулярность прямой и плоскости

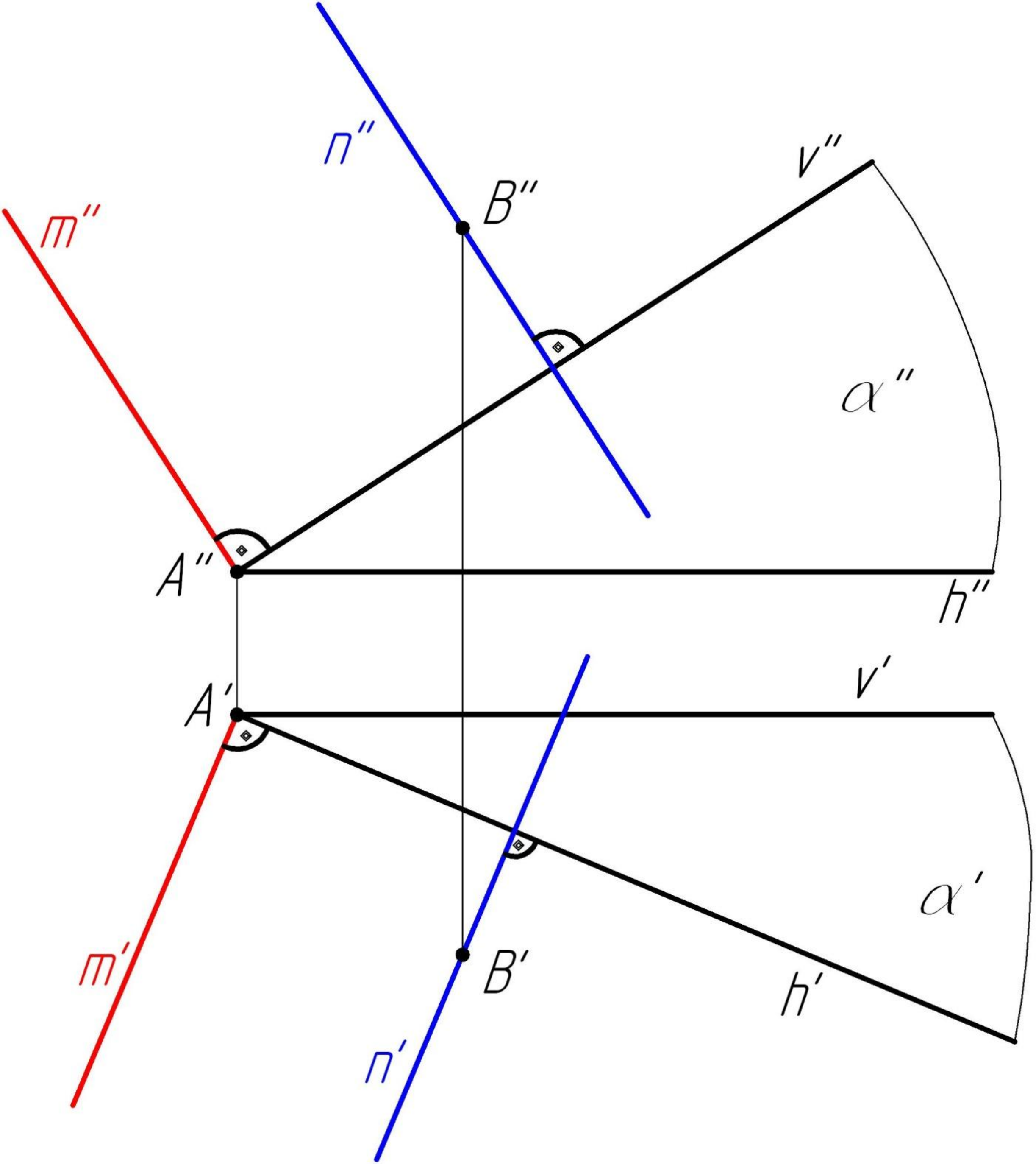
Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Пример 1: Из точки A и B провести прямые m и n перпендикулярные плоскости α.



Чтобы построить прямую, перпендикулярную плоскости, надо иметь на чертеже (или построить) горизонталь и фронталь этой плоскости. Тогда горизонтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна горизонтали, а фронтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна фронтали.


m''
B''
v''
Н.В.
α''
A''
h''
v'
A'
Н.В.
α'
m'
B'
h'



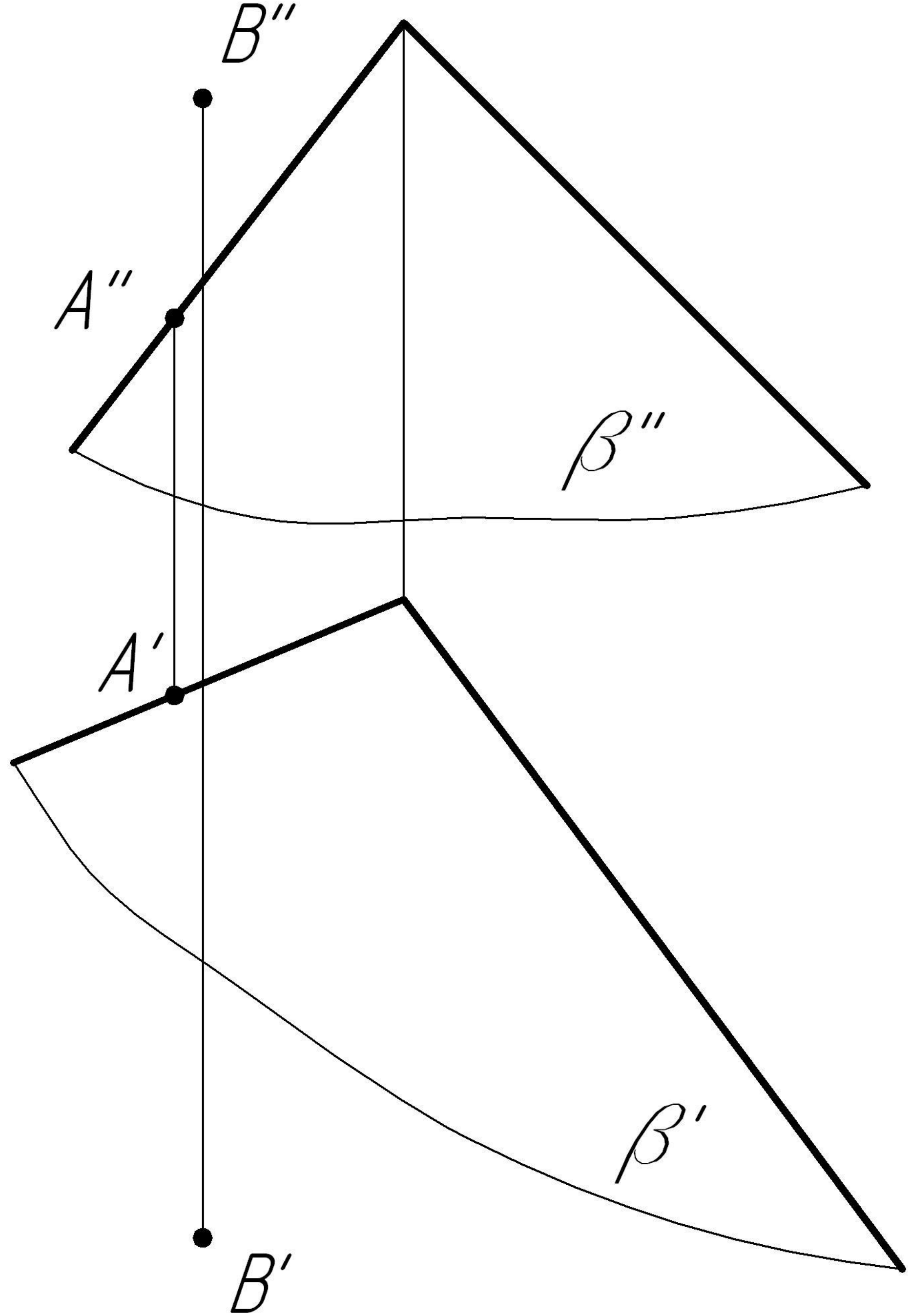
m' ⊥ h'; m'' ⊥ v'';

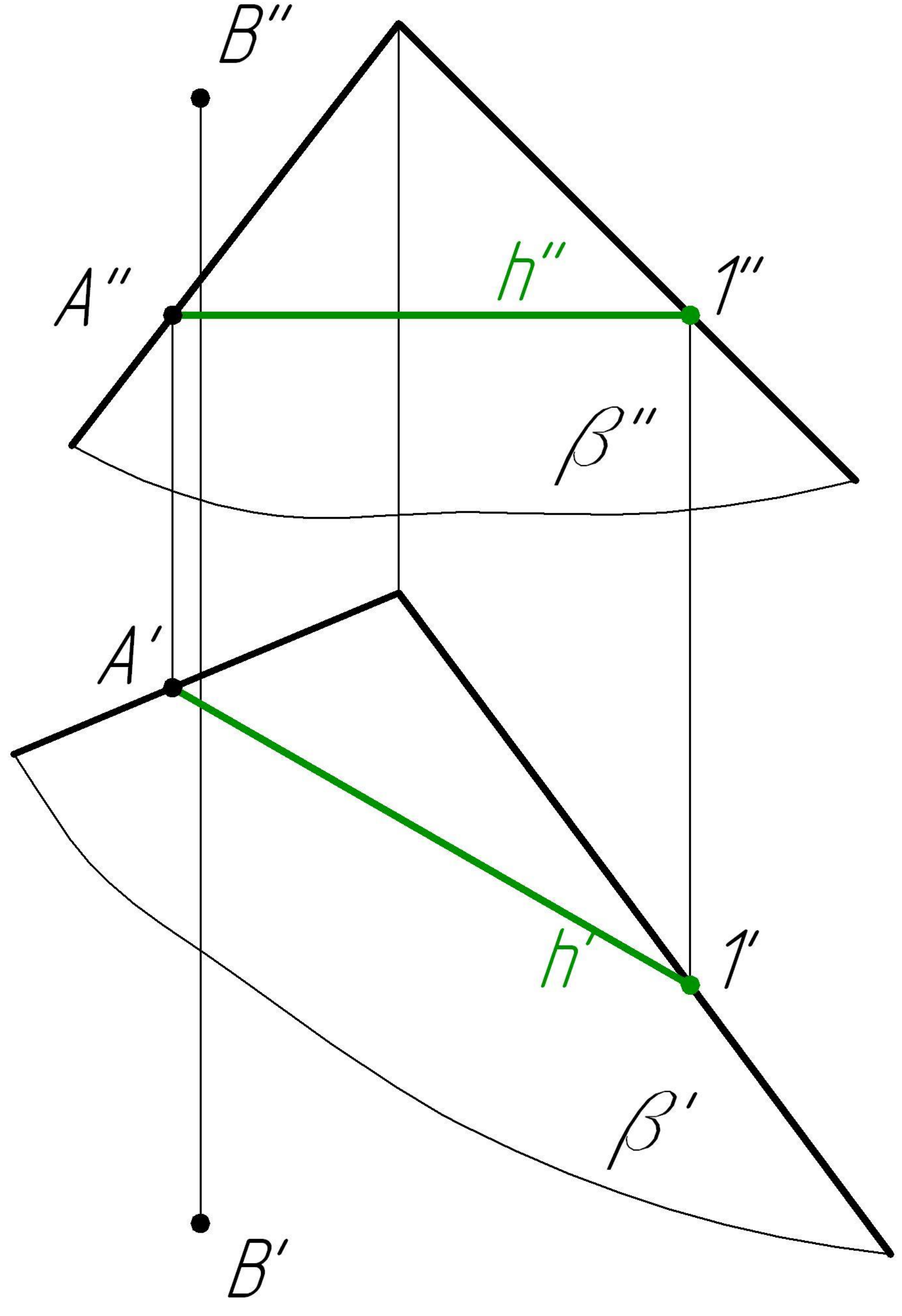
m ⊥ α (h ∩ v)

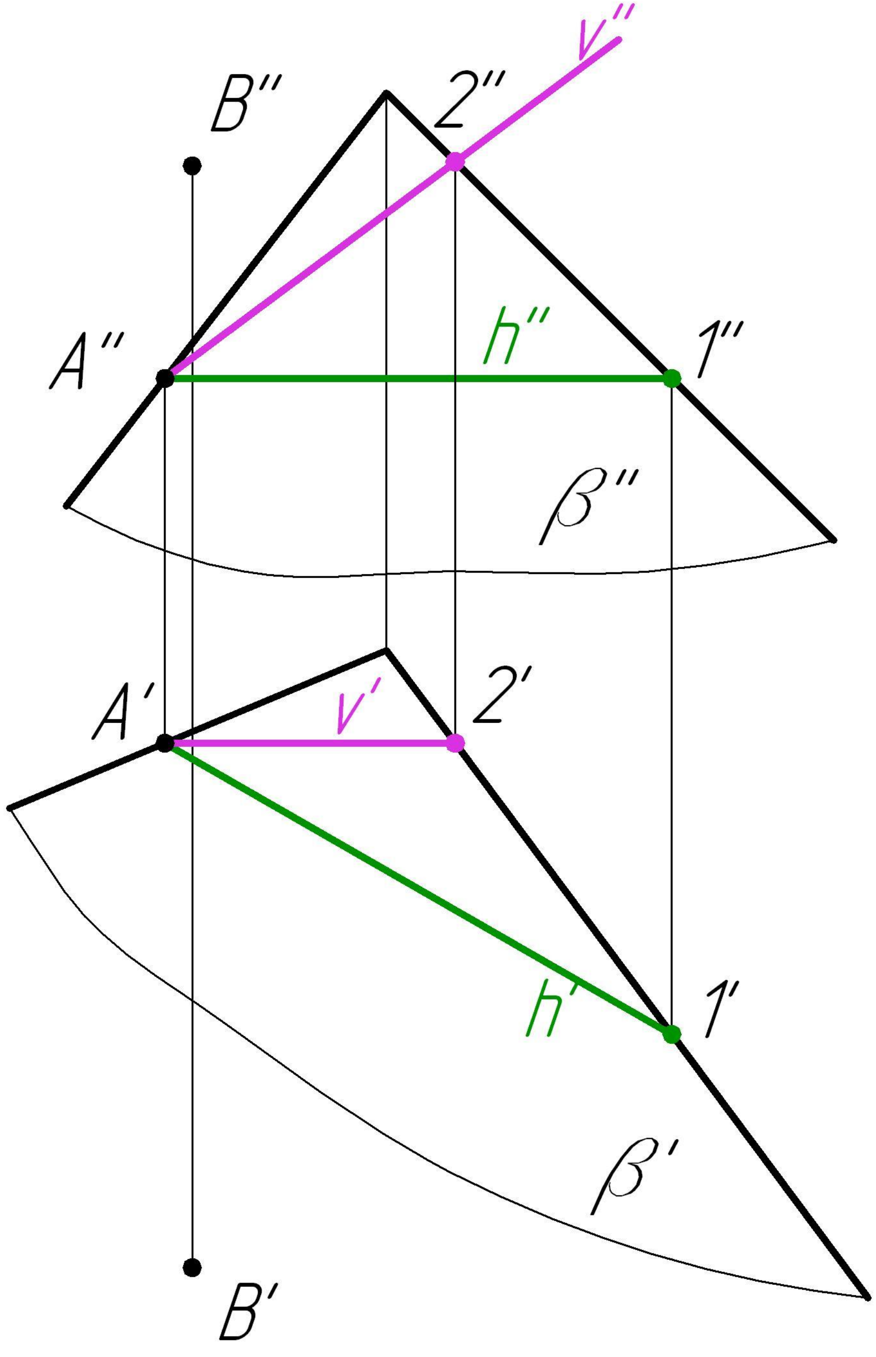
n' ⊥ h'; n'' ⊥ v'';

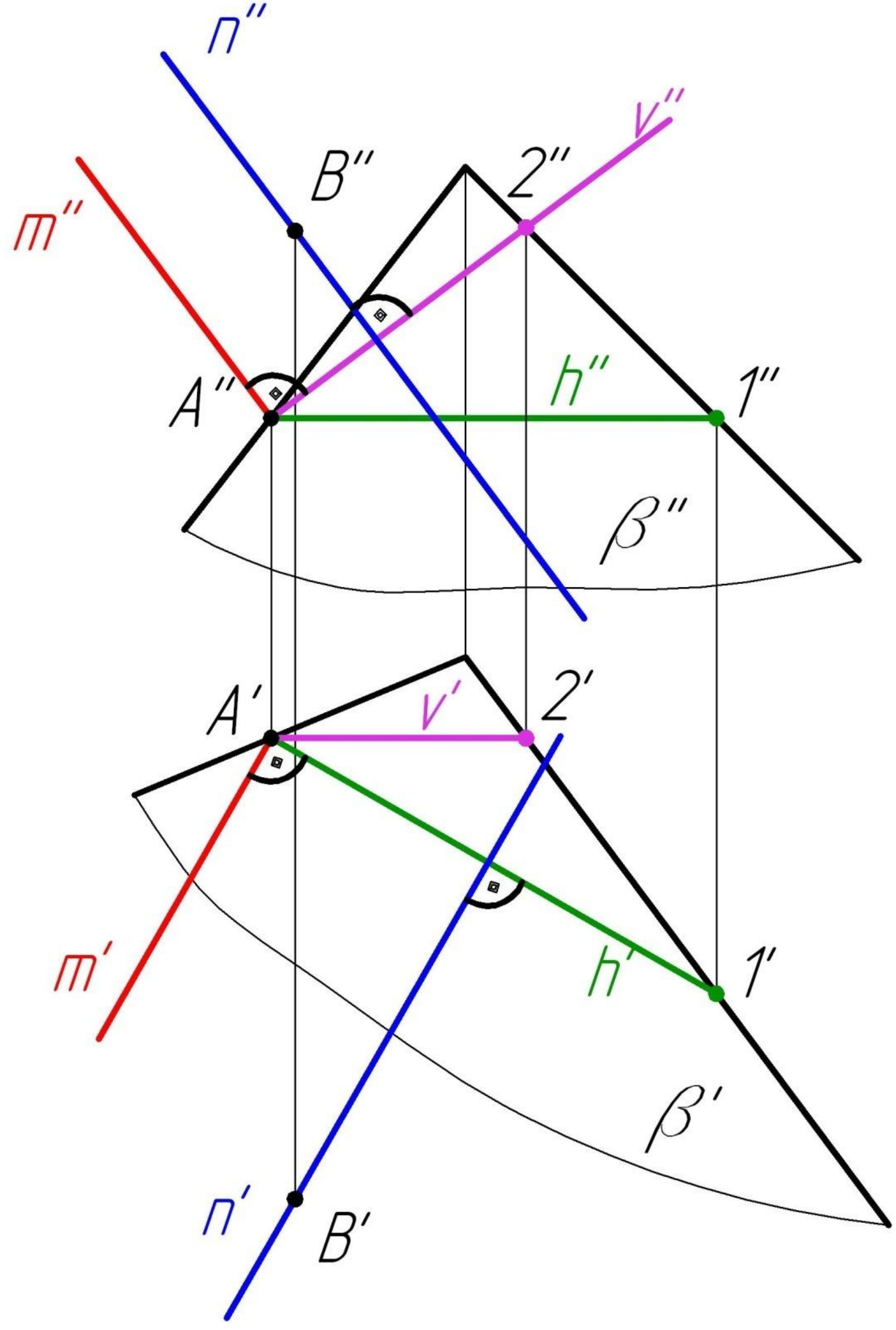
n ⊥ α (h ∩ v)

Пример 2: Из точки А и В провести прямые m и n перпендикулярные плоскости β.



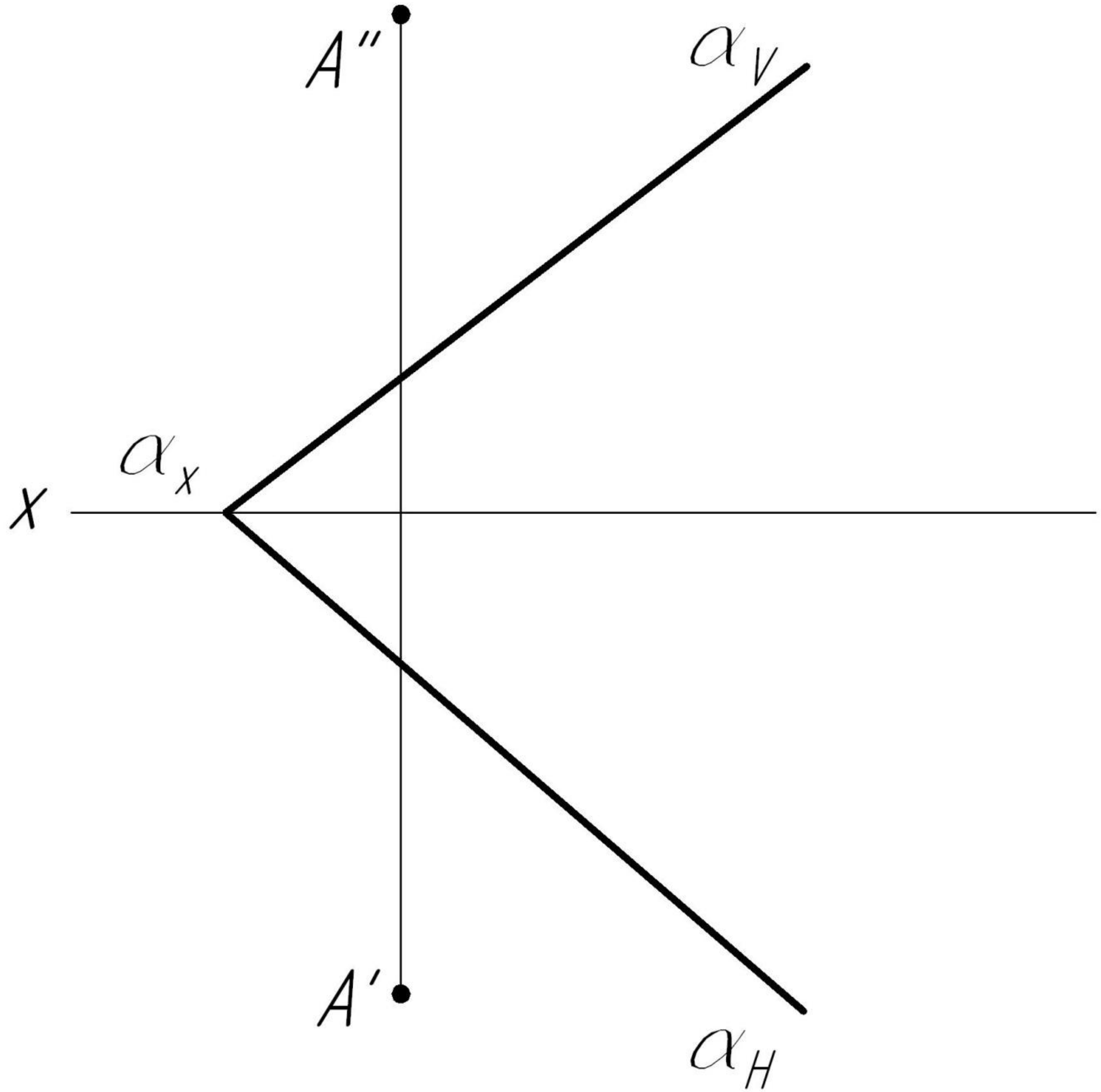

B''
A''
h''
1''
β''
A'
h'
1'
β'
B'

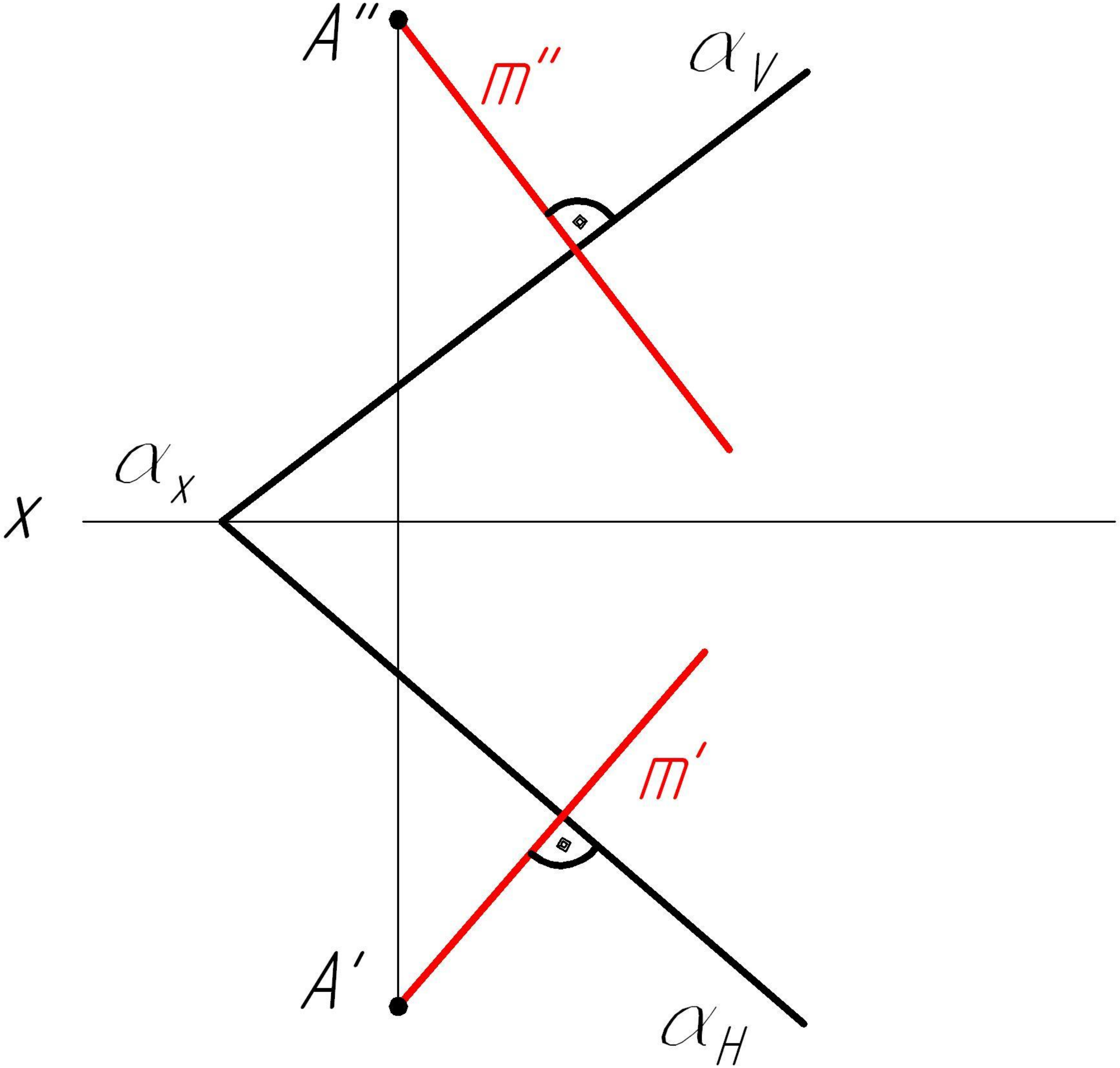

v''
B''
2''
A''
h''
1''
β''
A'
v'
2'
h'
1'
β'
B'



n''
m''
B''
2''
v''
A''
h''
1''
β''
A'
v'
2'
m'
h'
1'
β'
n'
B'

Если плоскость задана следами, то проекции перпендикуляра перпендикулярны одноименным следам плоскости.

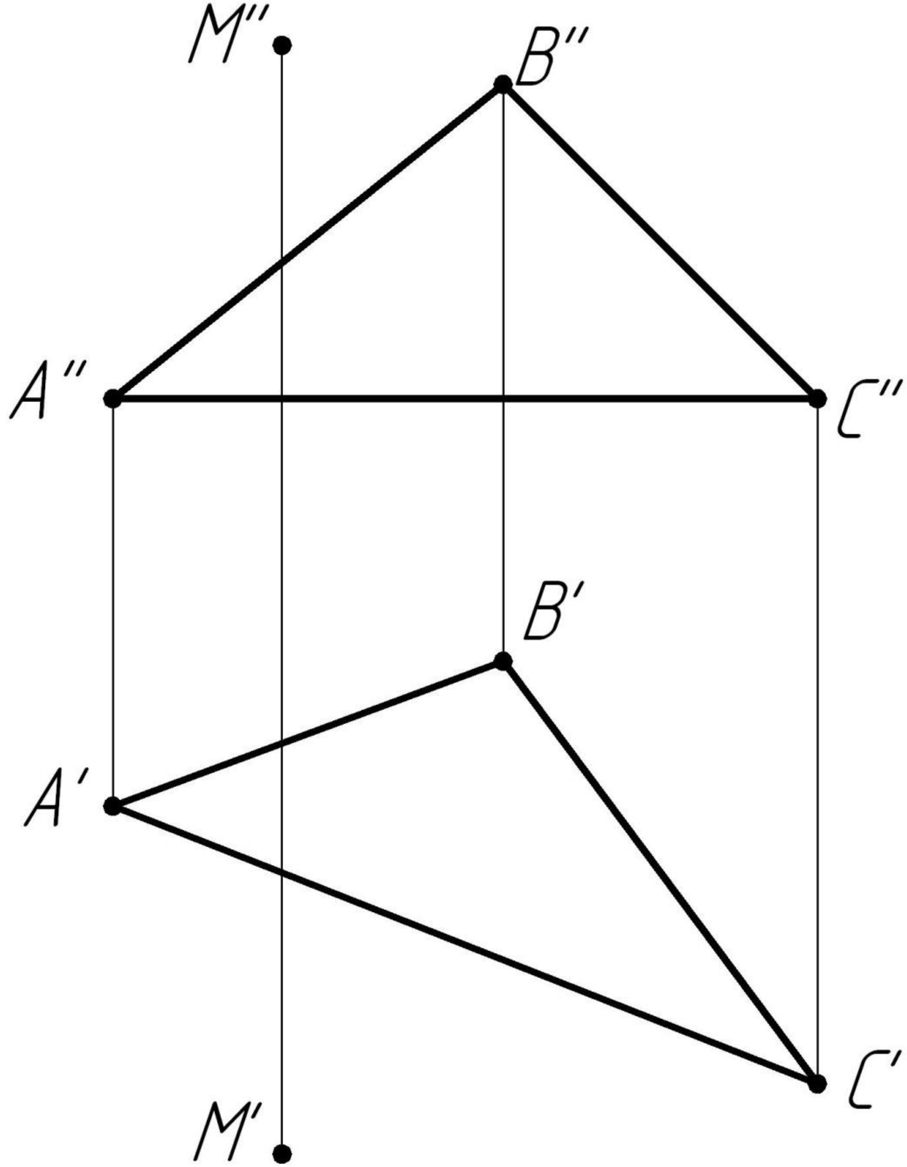


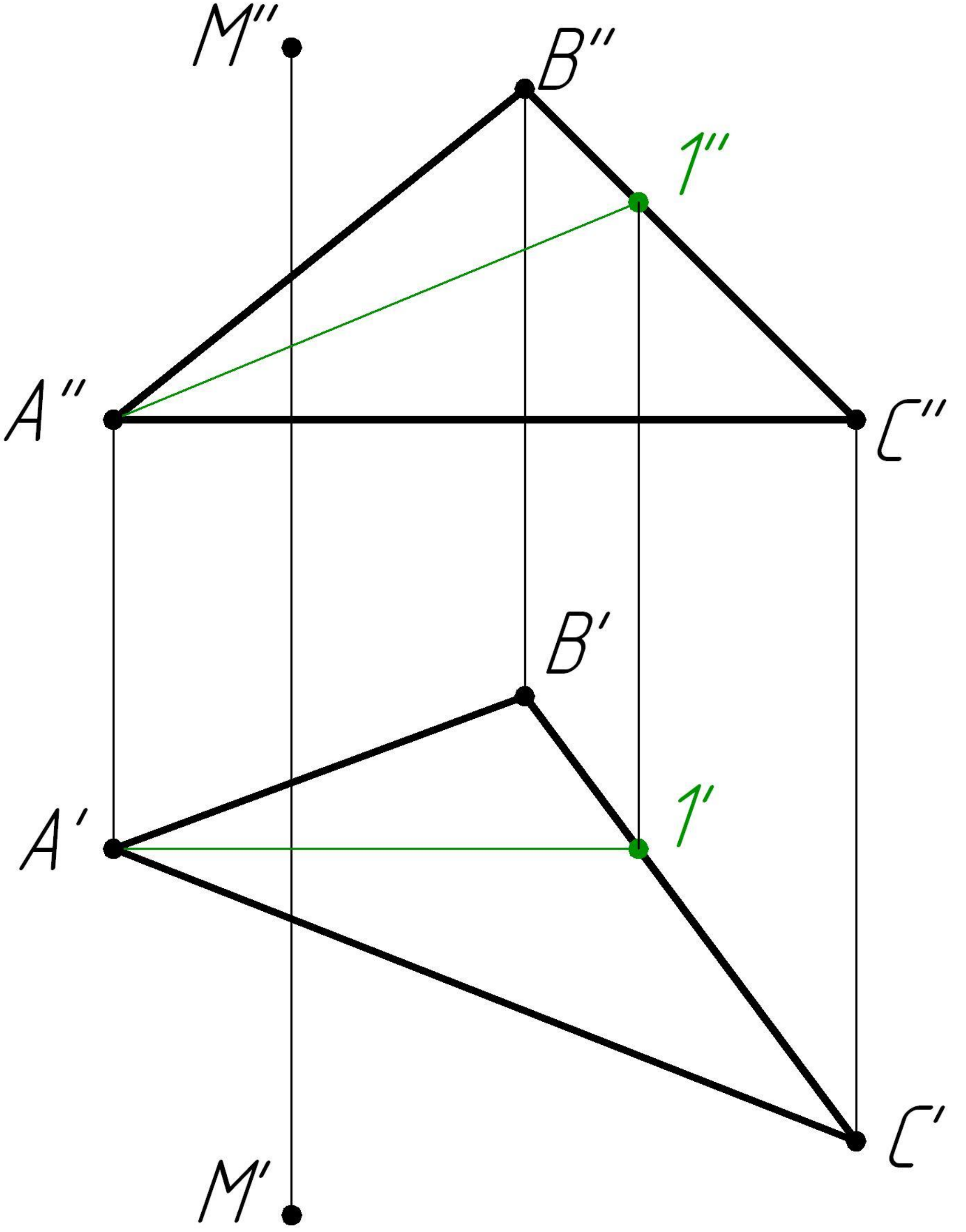


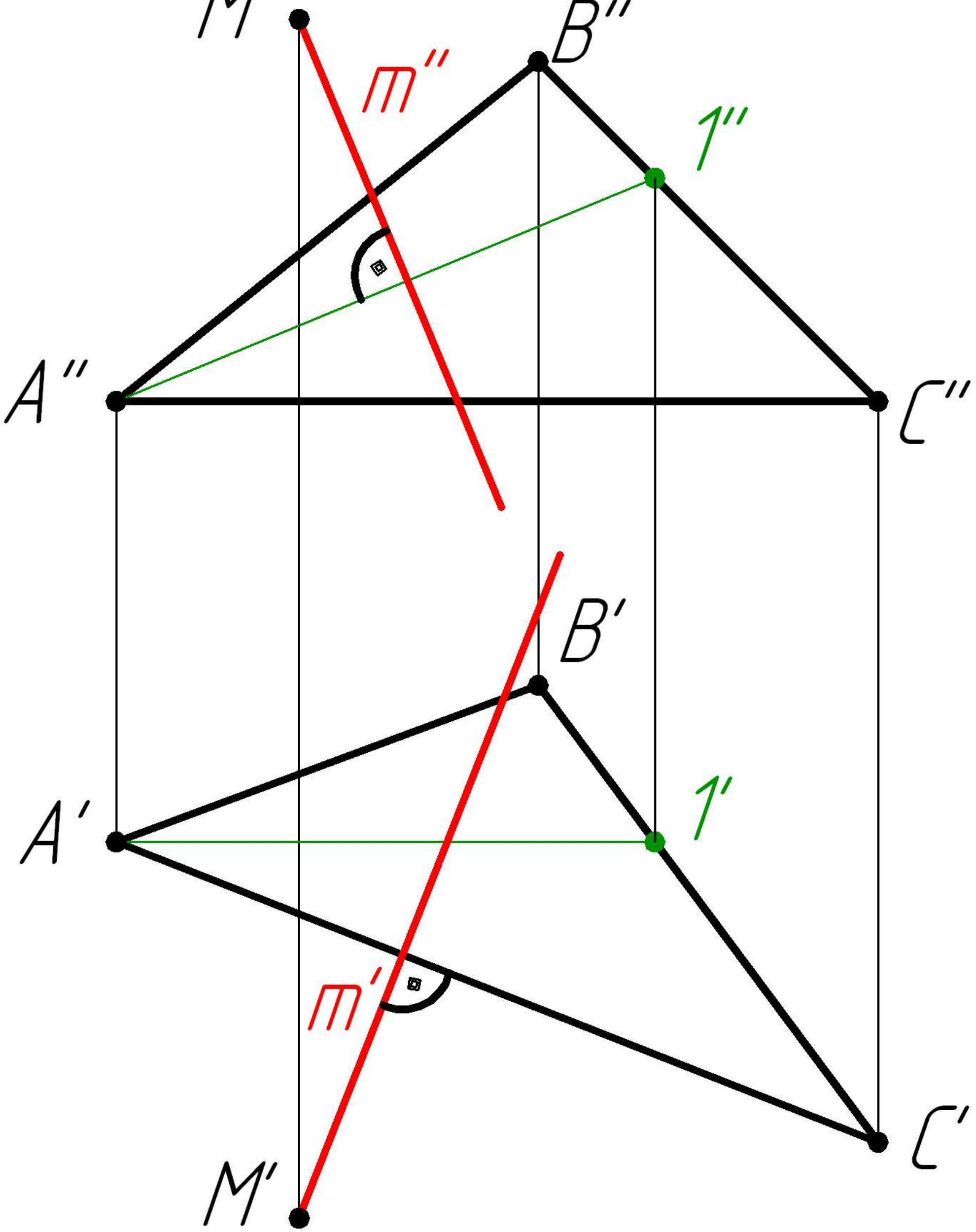
m' $\perp$ α_H; m'' $\perp$ α_V;

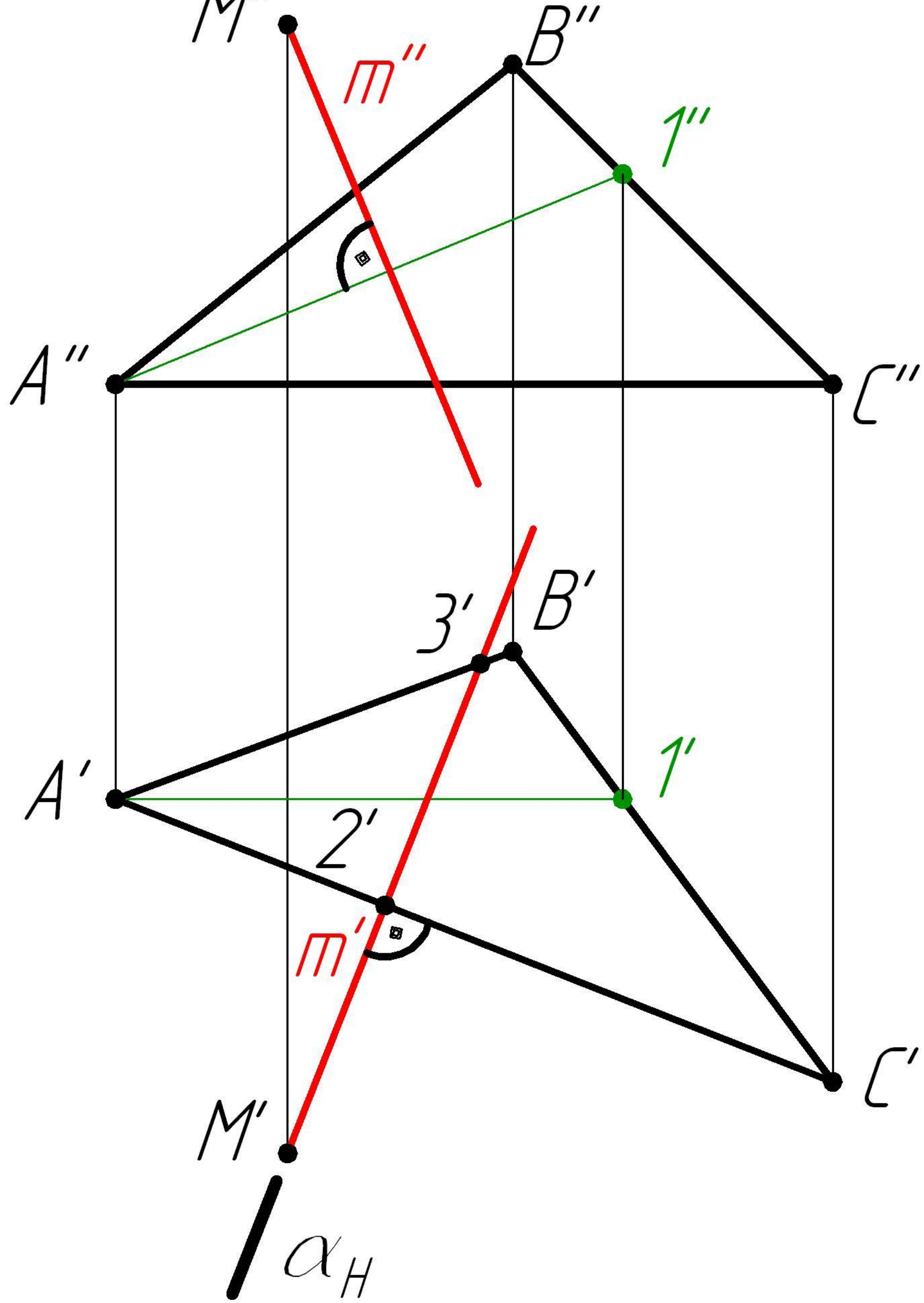
m $\perp$ α

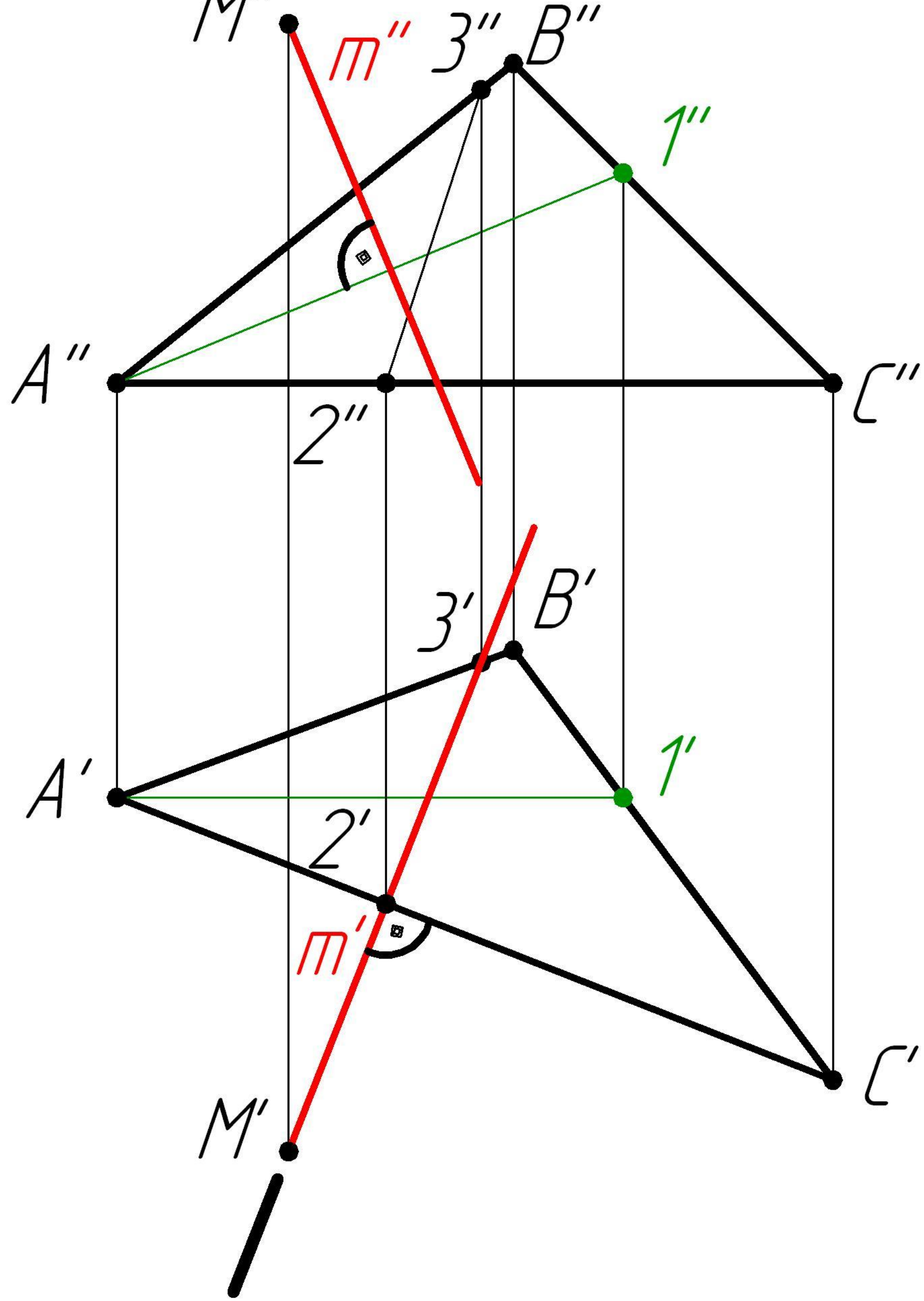
<u>Пример 3:</u> Определить расстояние от точки М до плоскости ΔАВС.

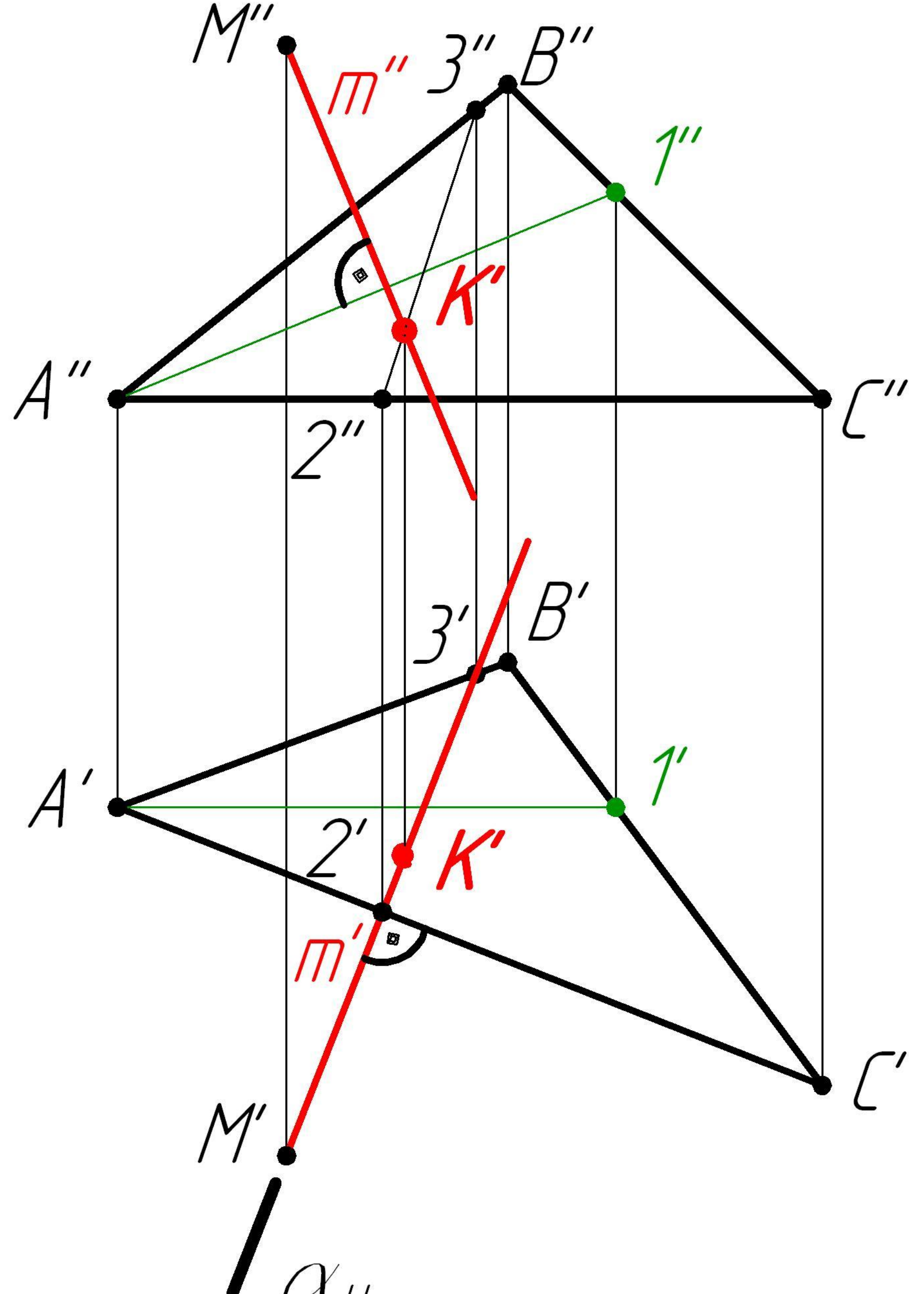



M''
B''
1''
A''
C''
B'
1'
A'
C'
M'

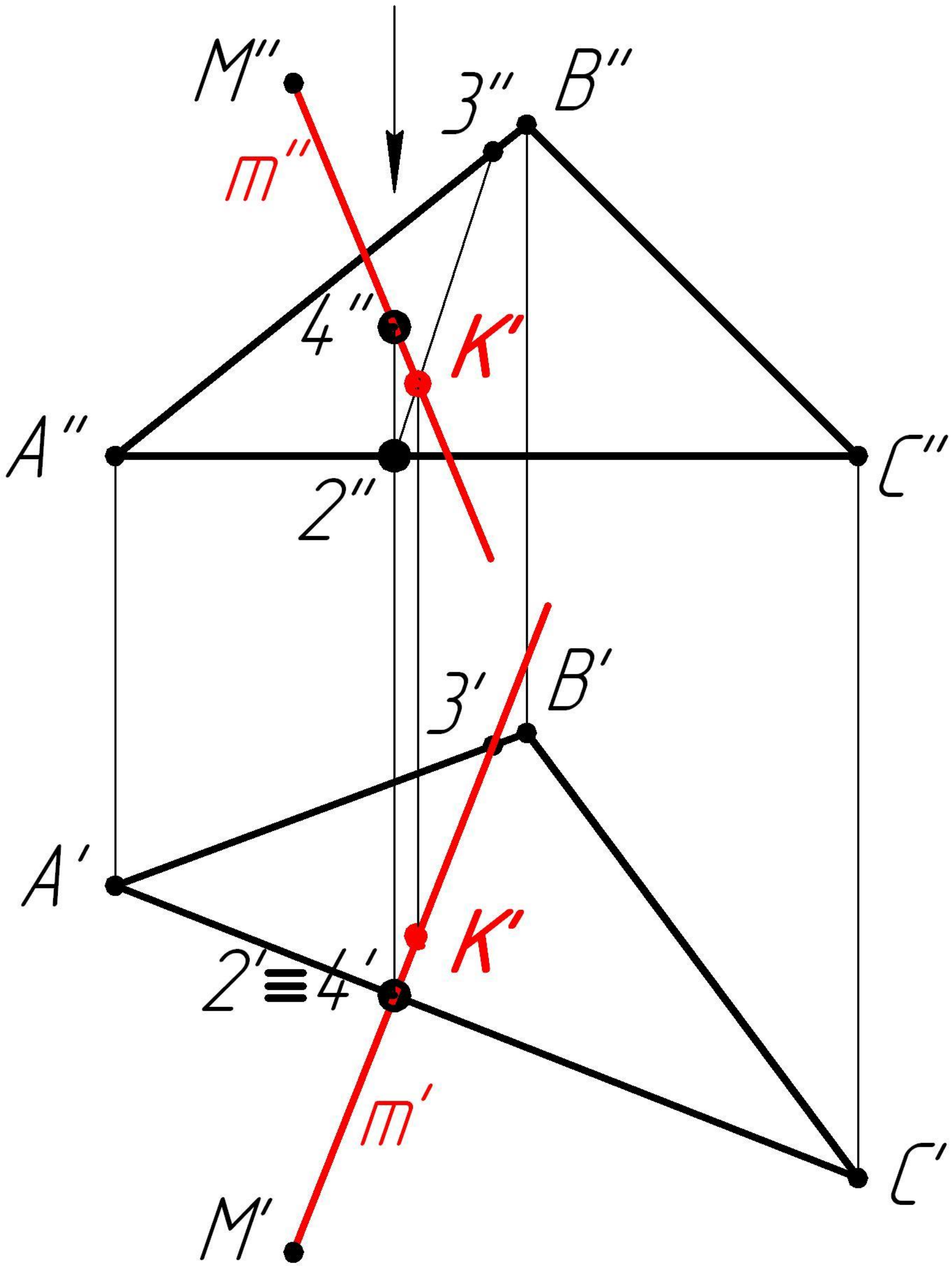

M''
B''
m''
1''
A''
C''
B'
1'
A'
m'
C'
M'

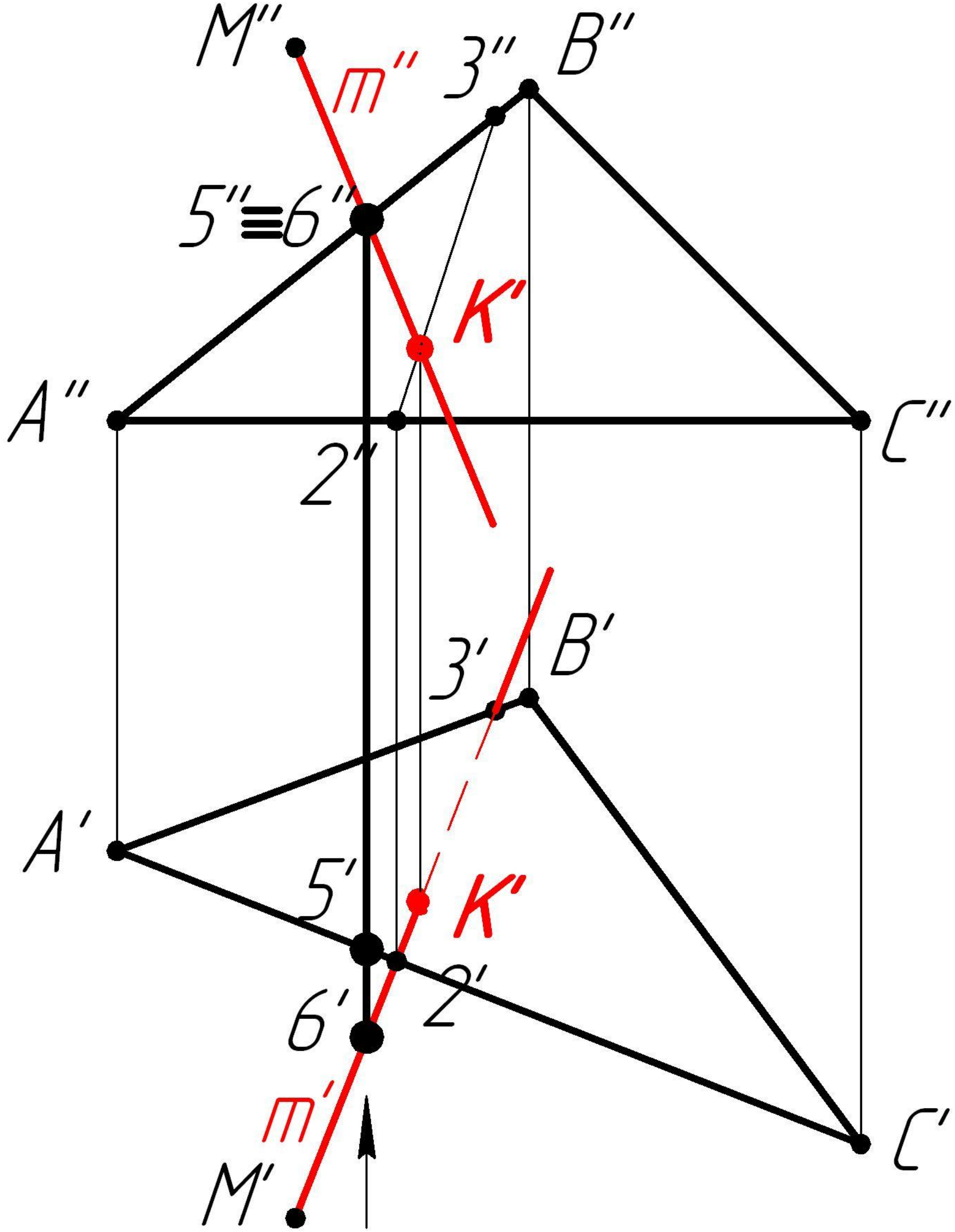

M''
B''
m''
1''
A''
C''
3'
B'
1'
A'
2'
m'
C'
M'
α_H

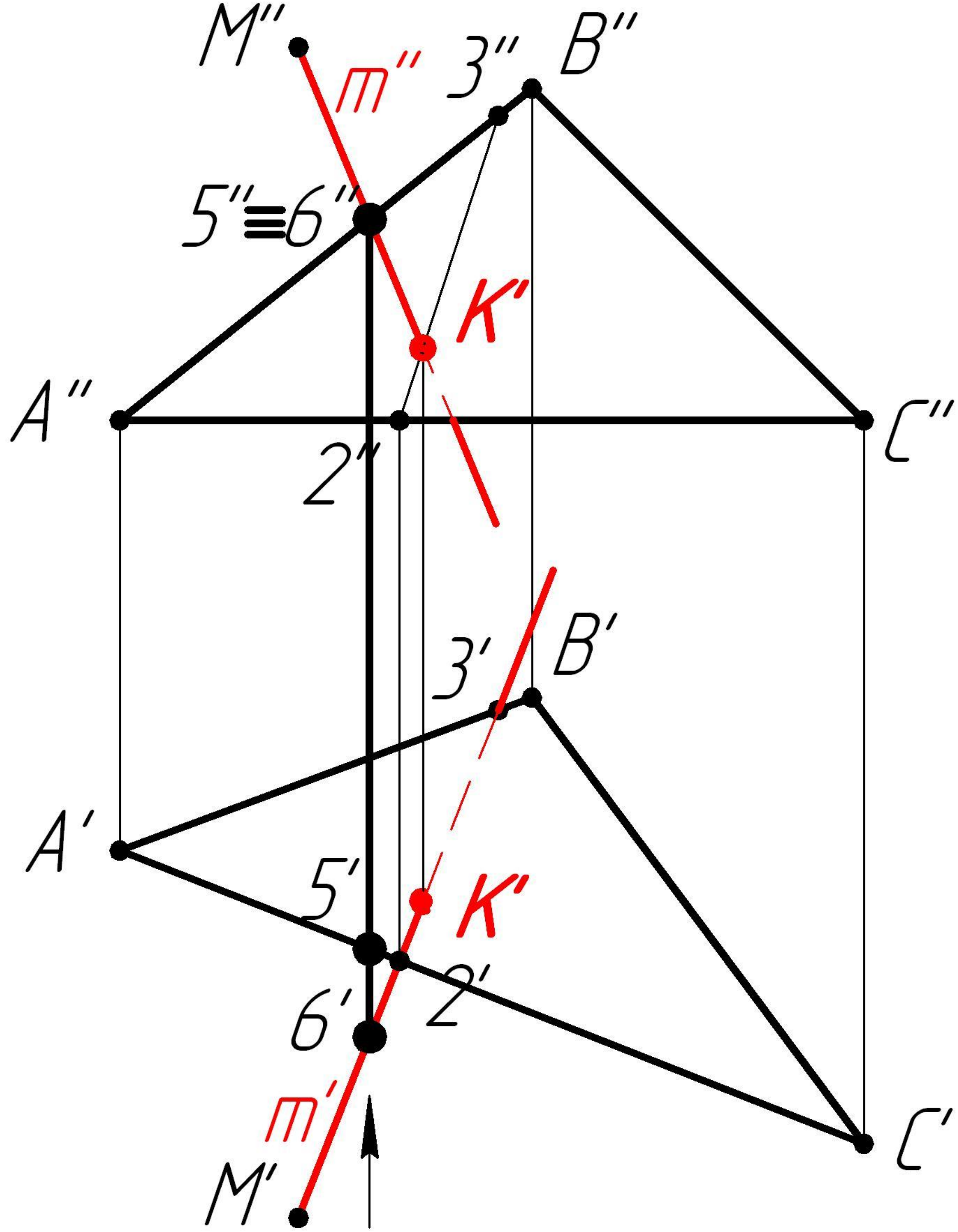

M''
m''
3''
B''
1''
A''
C''
2''
B'
3'
1'
A'
2'
m'
C'
M'

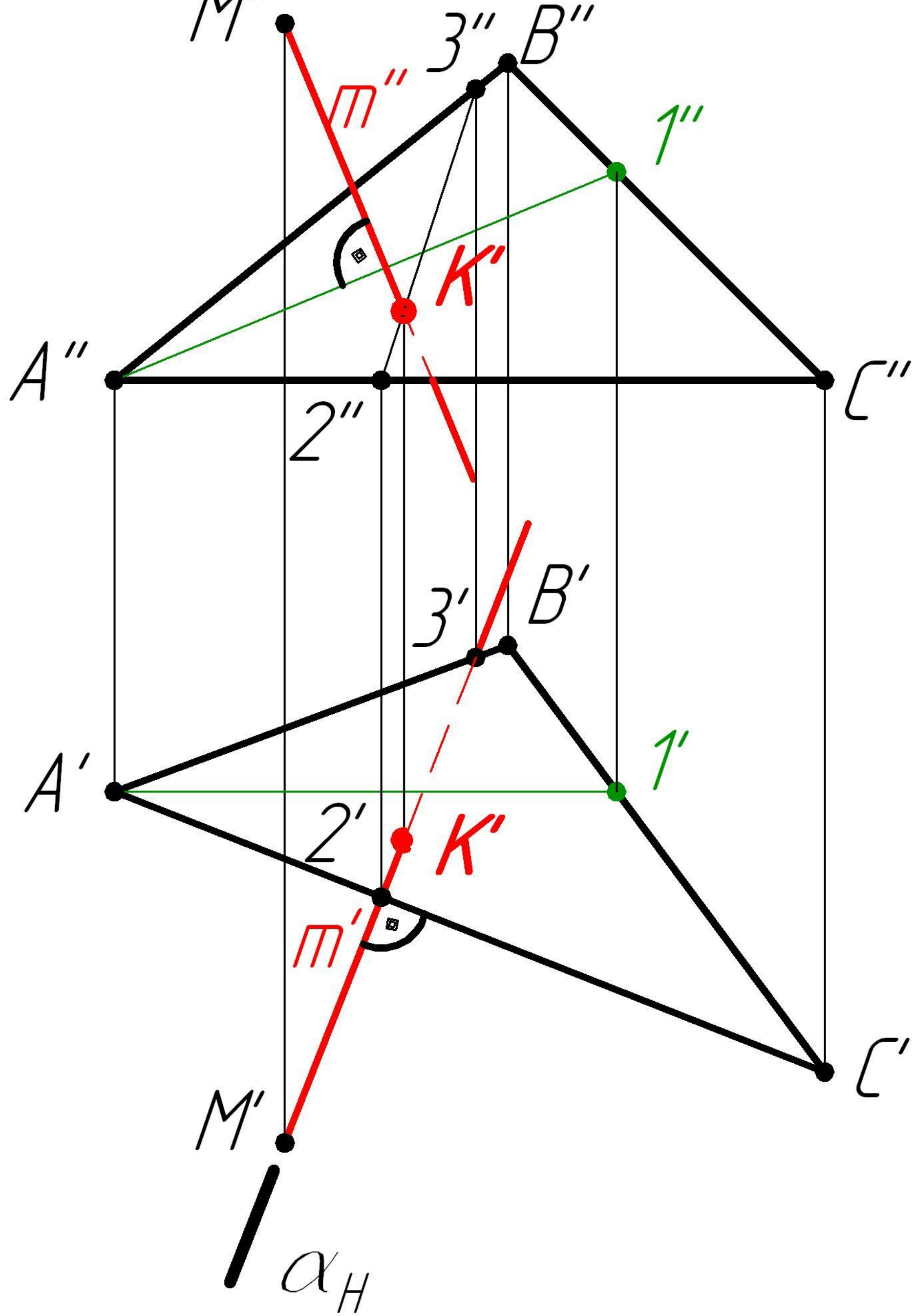


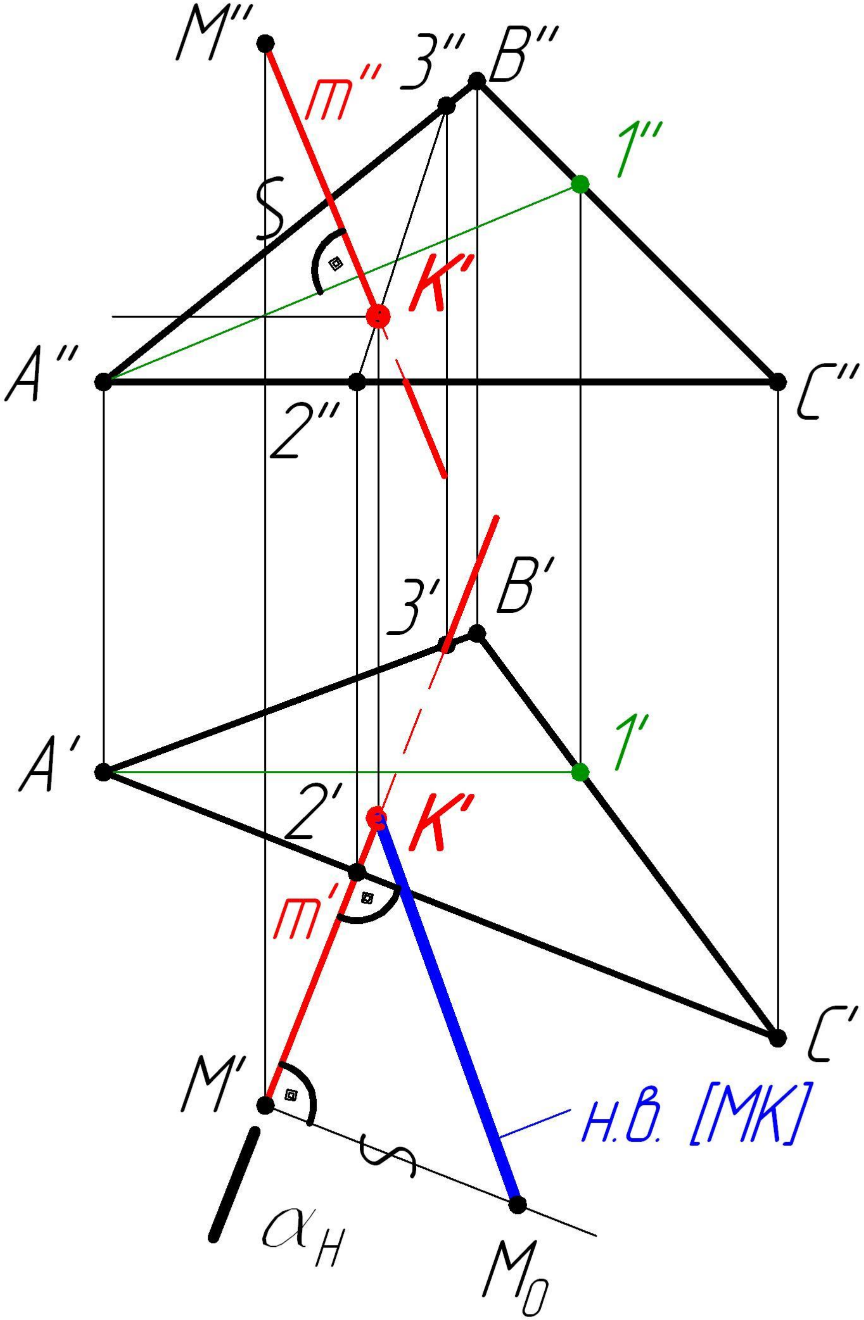
M''
m''
3''
B''
1''
K''
A''
C''
2''
3'
B'
1'
A'
2'
K'
m'
C'
M'
α_H


M''
3''
B''
m''
4''
K''
A''
C''
2''
3'
B'
A'
K'
2'≡4'
m'
C'
M'


M''
m''
3''
B''
5''≡6''
K'
A''
2''
C''
3'
B'
A'
5'
K'
2'
6'
m'
C'
M'


M''
m''
3''
B''
5''≡6''
K''
A''
C''
2''
3'
B'
A'
5'
K'
2'
6'
m'
C'
M'


M''
3''
B''
m''
1''
K''
A''
2''
C''
3'
B'
A'
1'
2'
K'
m'
C'
M'
α_H



1. 2/AC – горизонталь (A’C’ // OX).

Строим фронталь A-1 (A’1’ // OX)

2. m’ ⊥ A’C’; m’’ ⊥ A’’1’’ (m ⊥ ΔABC)

3. Заключаем m’ в горизонтально-проецирующую плоскость α

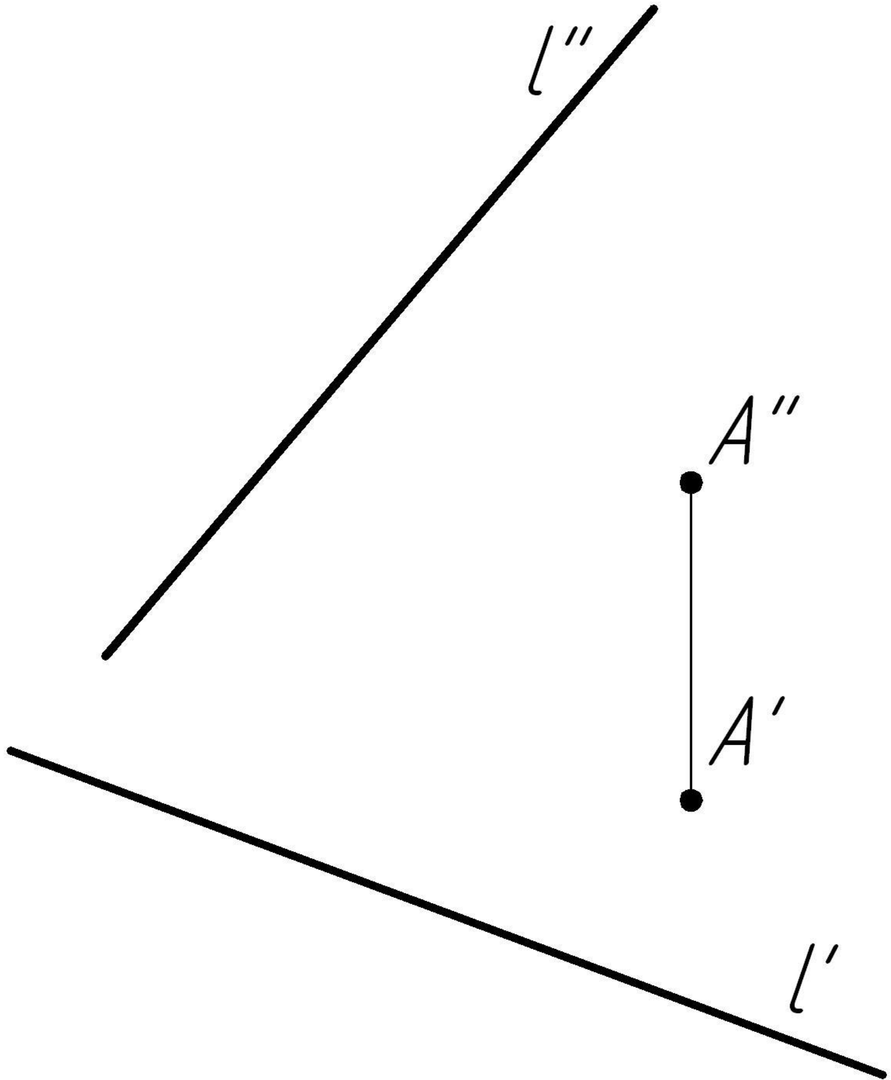
4. α ∩ ΔABC = (2-3)

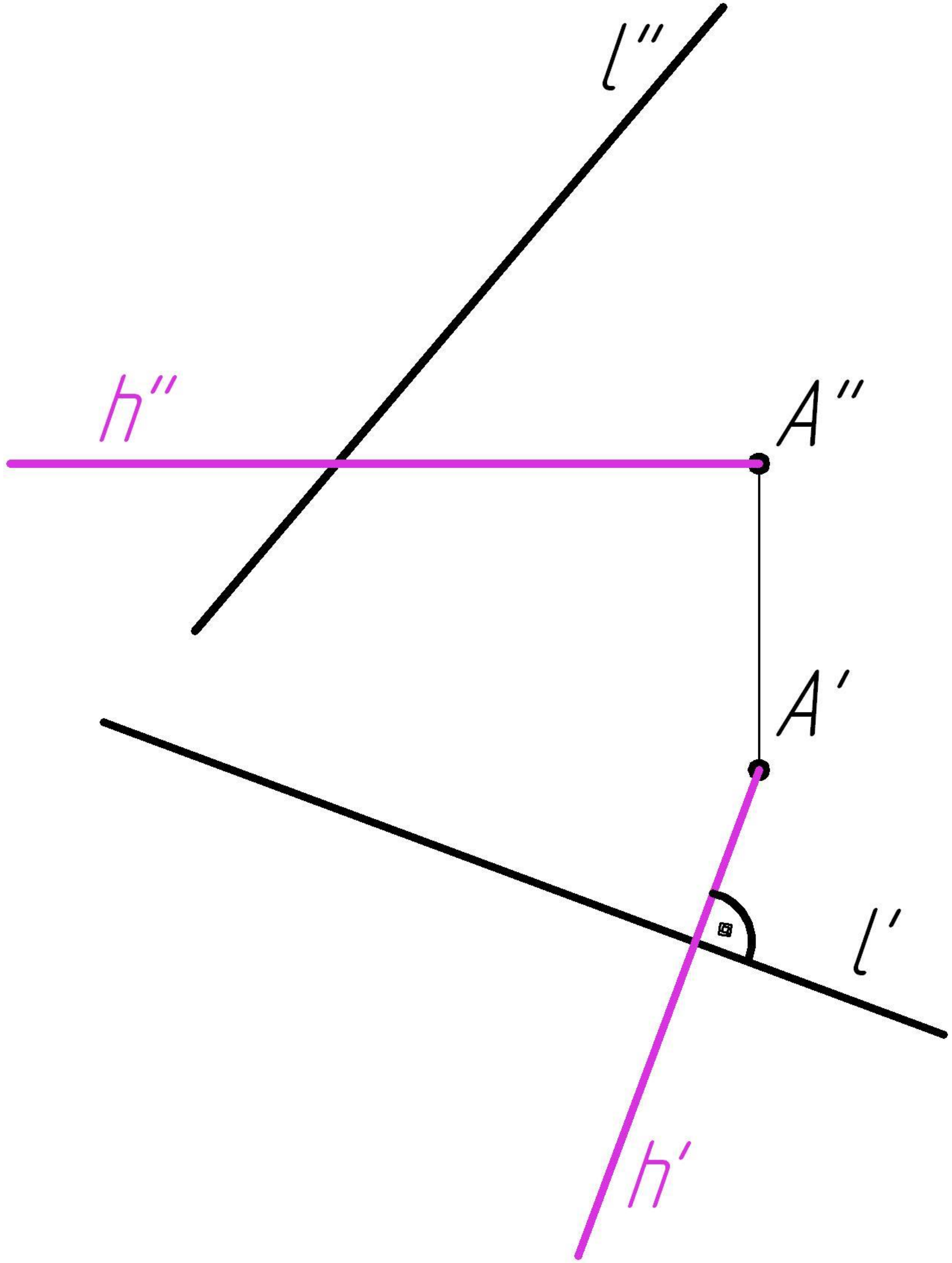
5. (2’’-3’’) ∩ m’’ = K’’

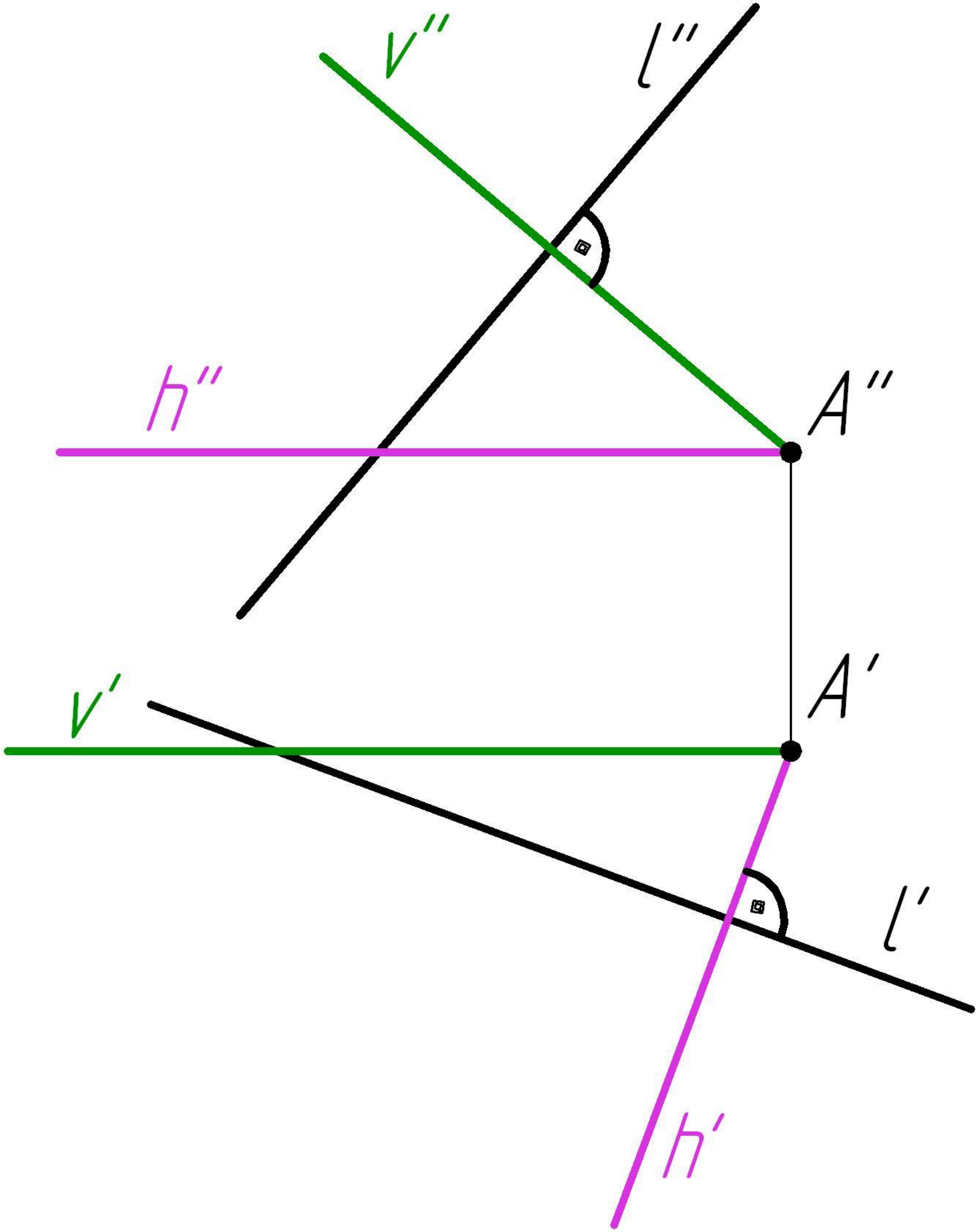
m ∩ ΔABC = K

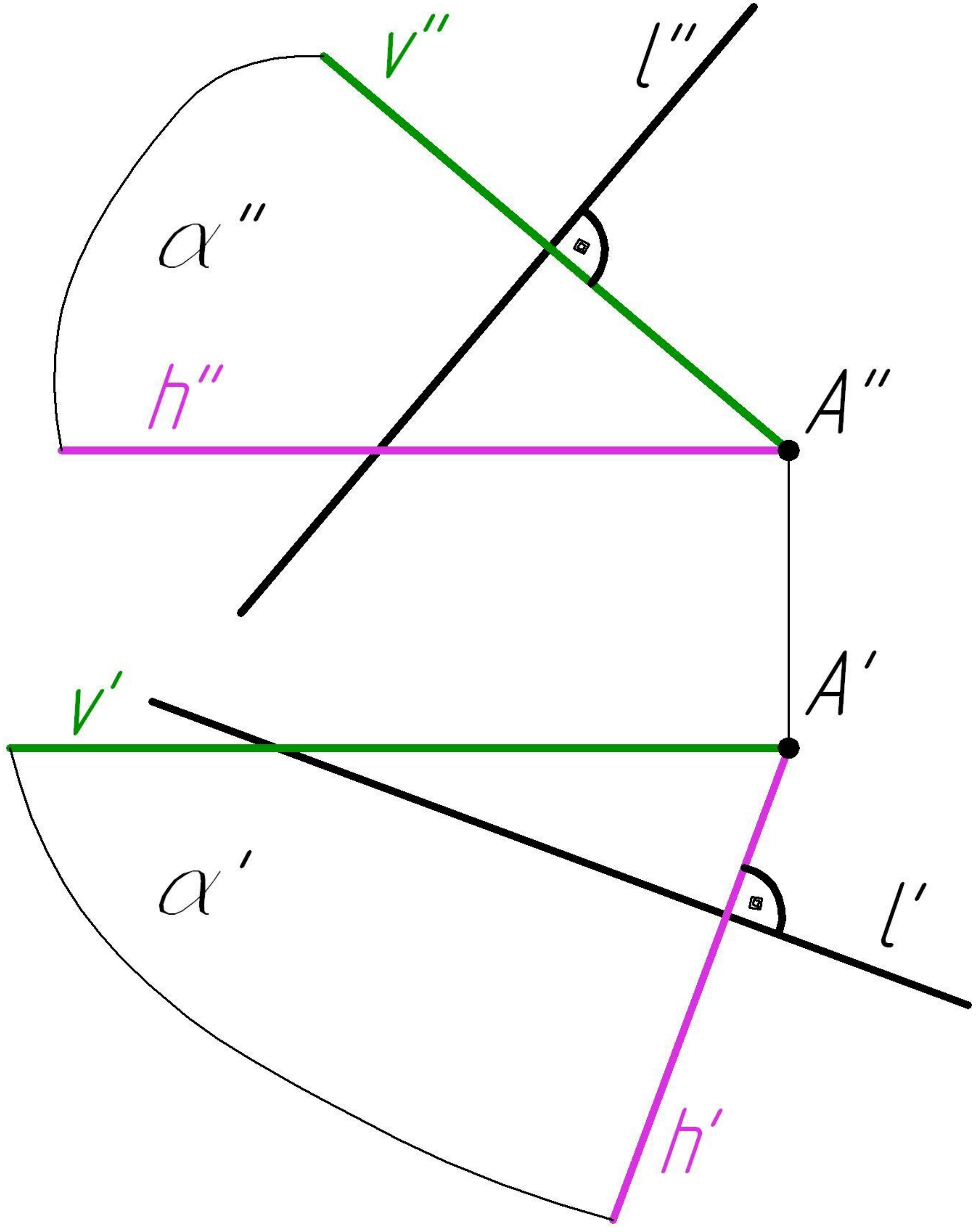
6. Определяем н.в. [MK]

Пример 4: Через точку А провести плоскость, перпендикулярную прямой l.



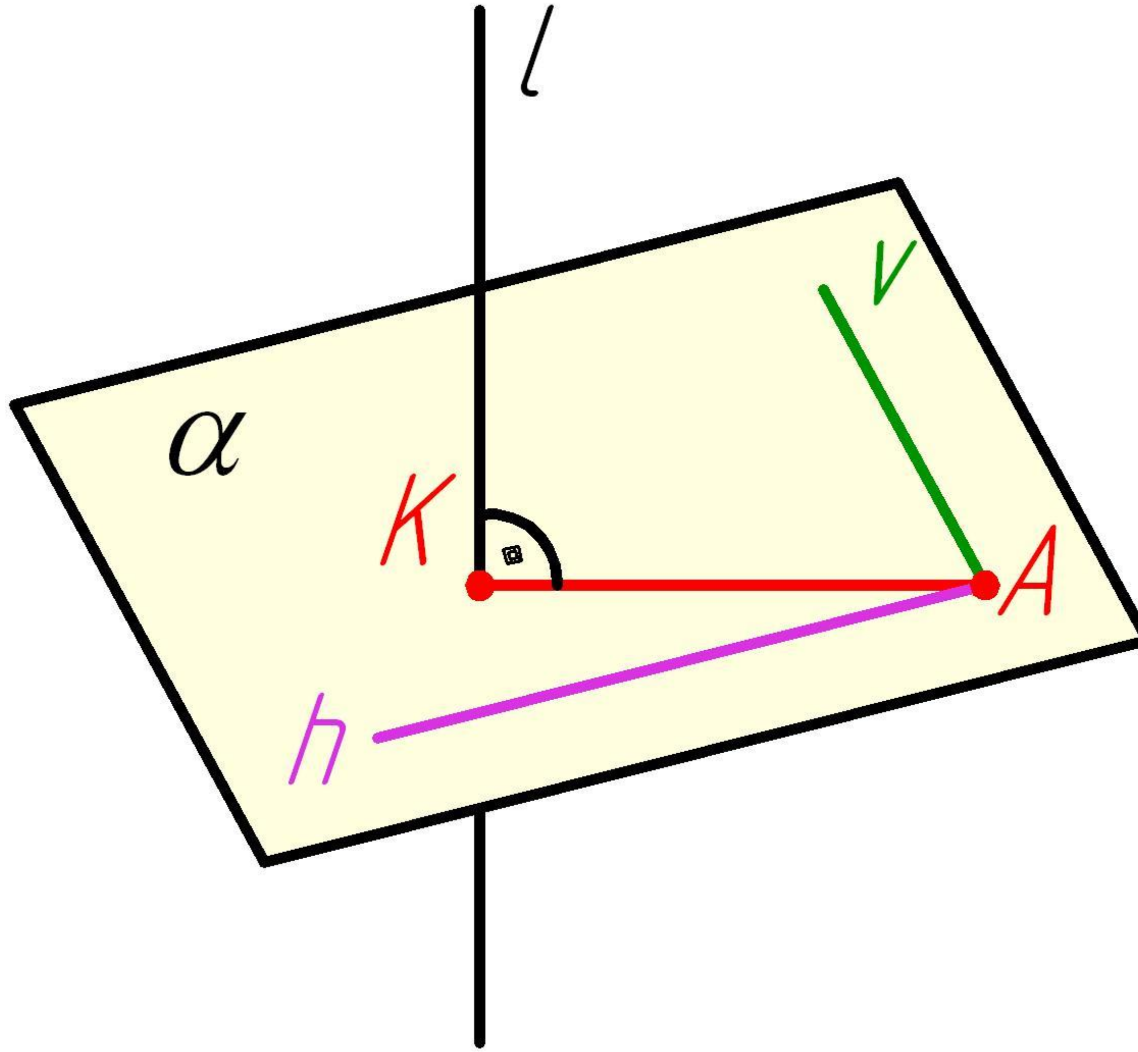

l''
h''
A''
A'
l'
h'


v''
l''
h''
A''
A'
v'
l'
h'


v''
l''
α''
h''
A''
A'
v'
α'
l'
h'

6.2. Перпендикулярность двух прямых в общем случае

Две прямые перпендикулярны плоскости, если одна из них принадлежит плоскости, перпендикулярной к другой прямой.

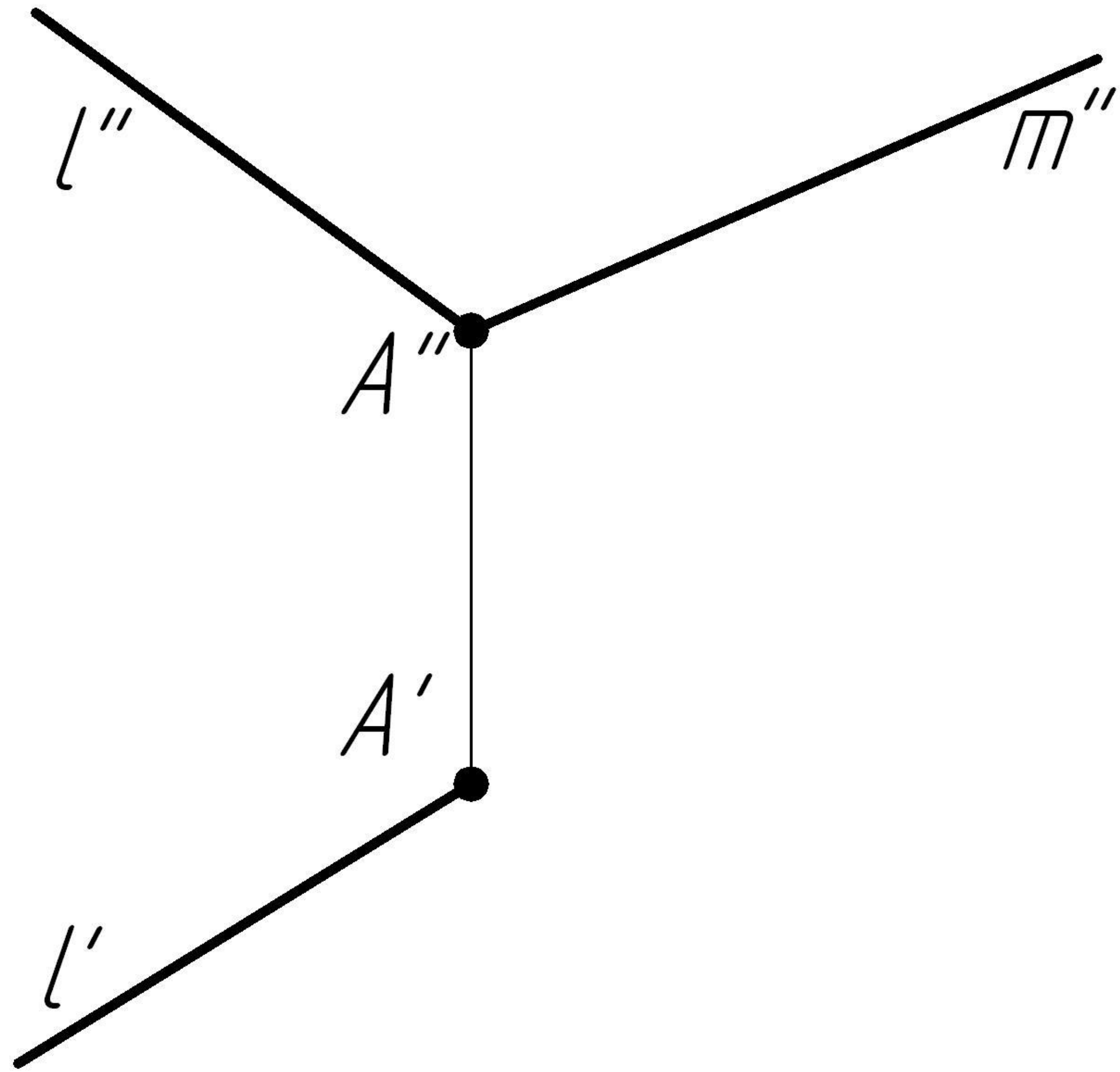


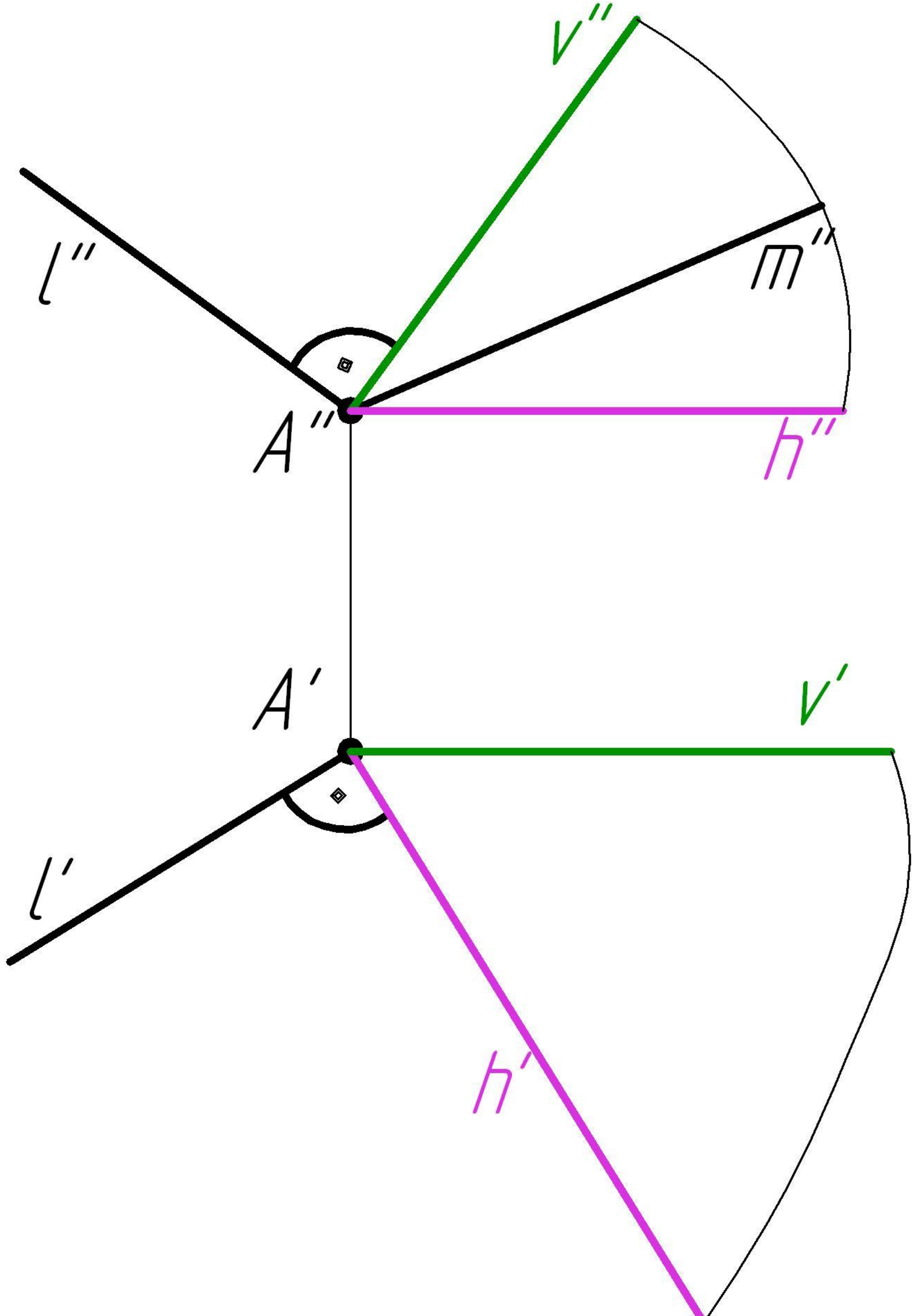
$$\alpha(h \cap v) \perp l$$

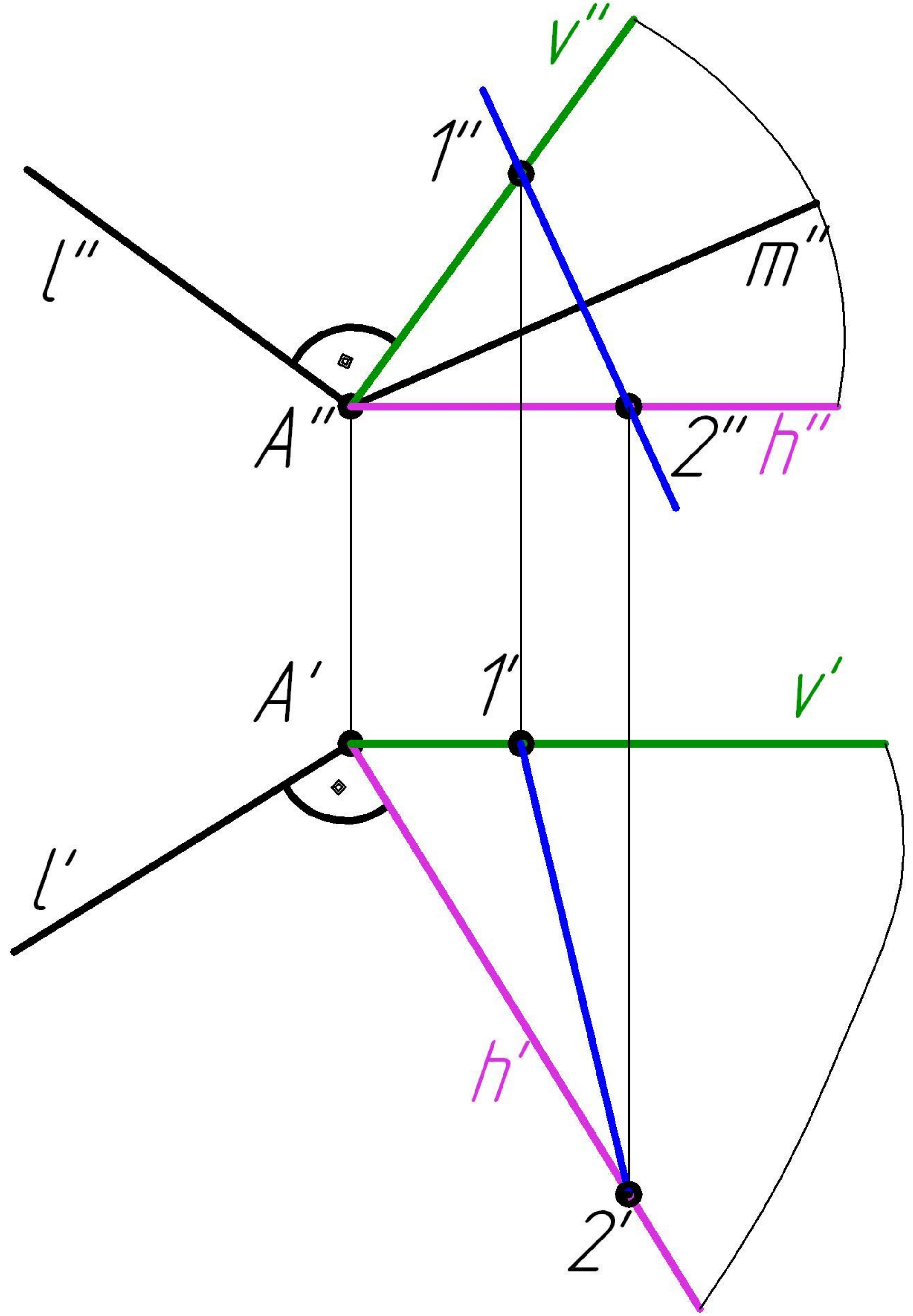
$$\alpha \cap l = K$$

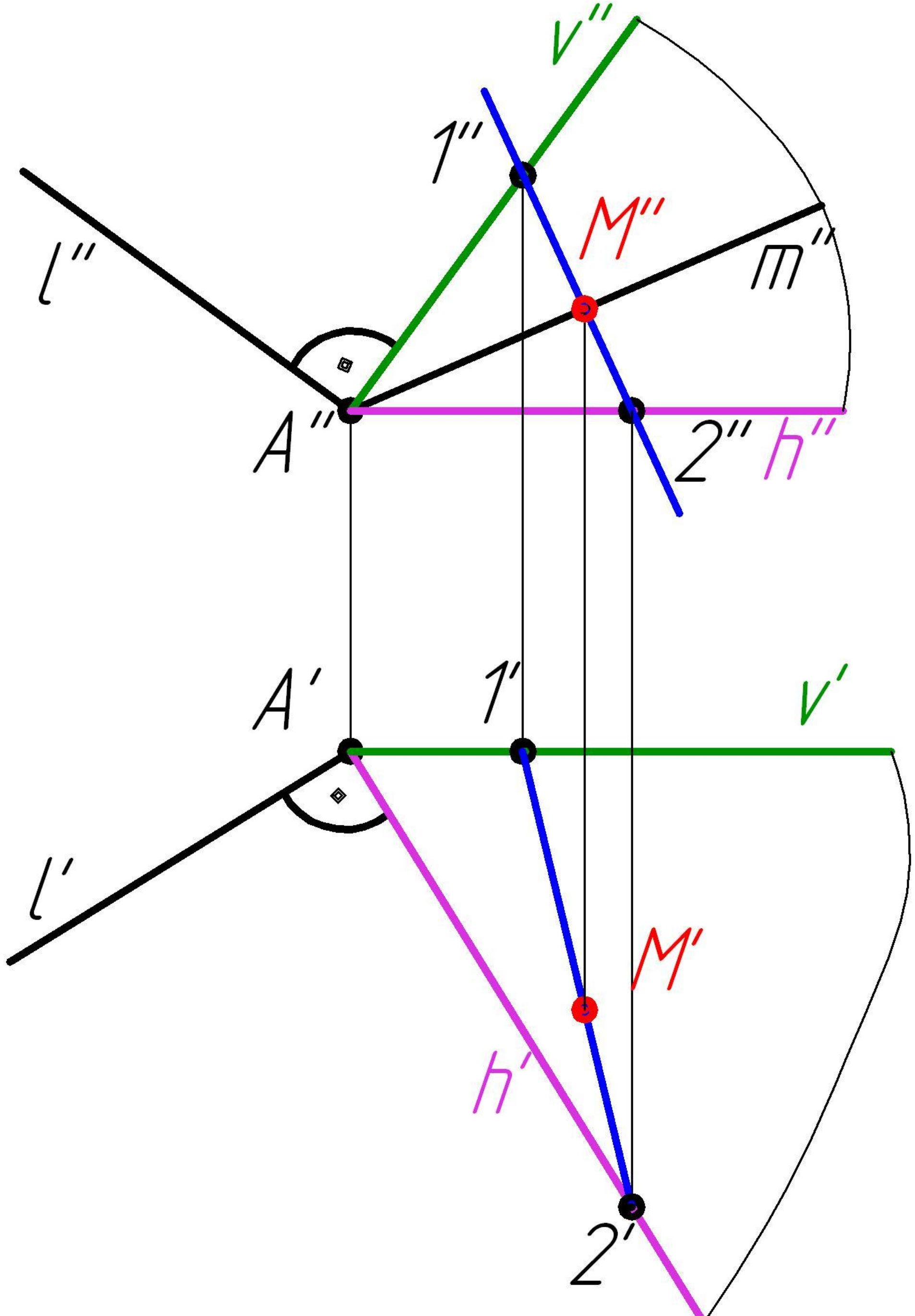
$$AK \perp l$$

Пример 5: Построить горизонтальную проекцию прямой m, если m ⊥ l.

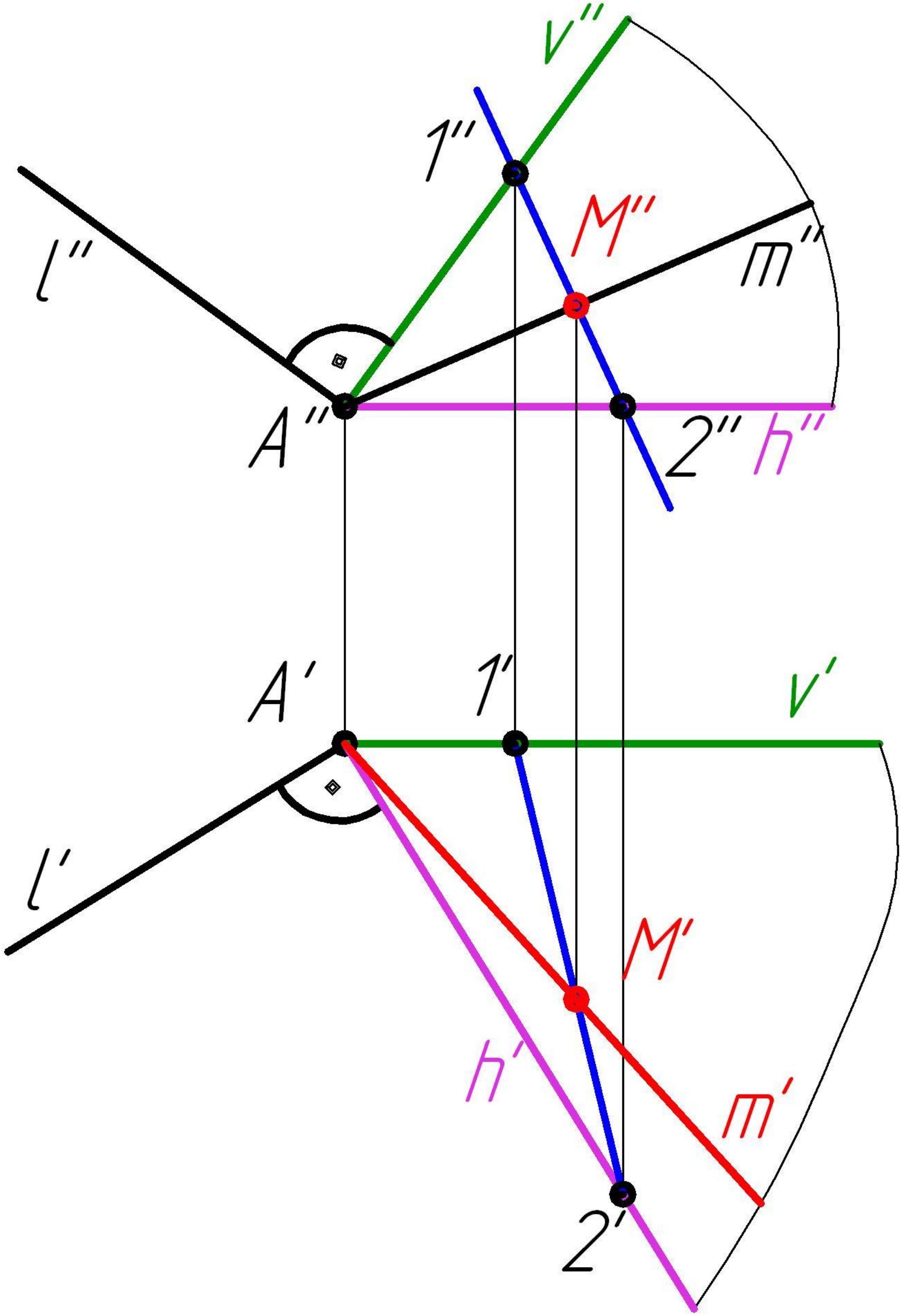



v''
l''
m''
A''
h''
A'
v'
l'
h'


v''
1''
l''
m''
A''
2''
h''
A'
1'
v'
l'
h'
2'



V''
1''
M''
m''
l''
A''
2''
h''
A'
1'
V'
l'
M'
h'
2'



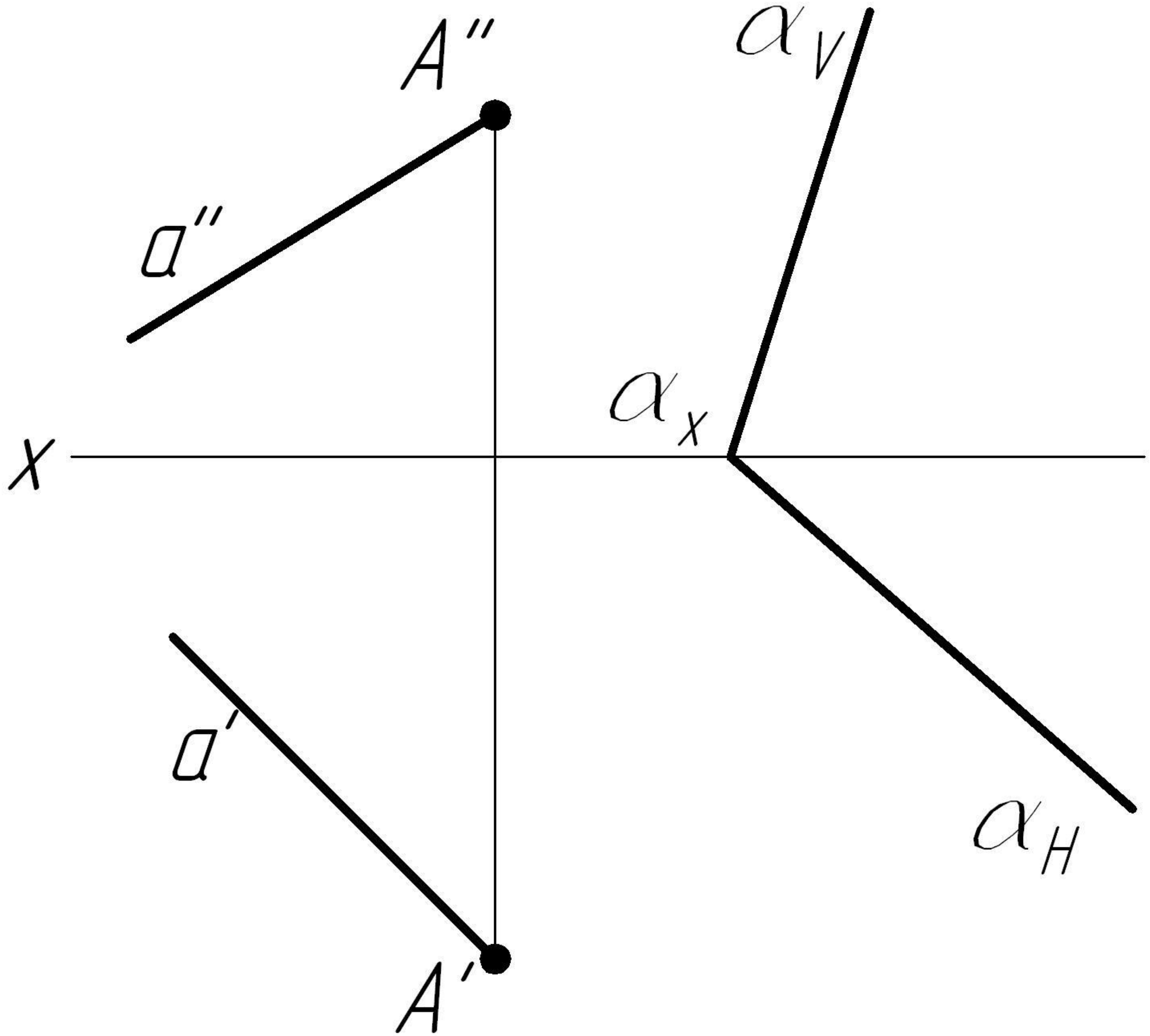
Алгоритм решения:

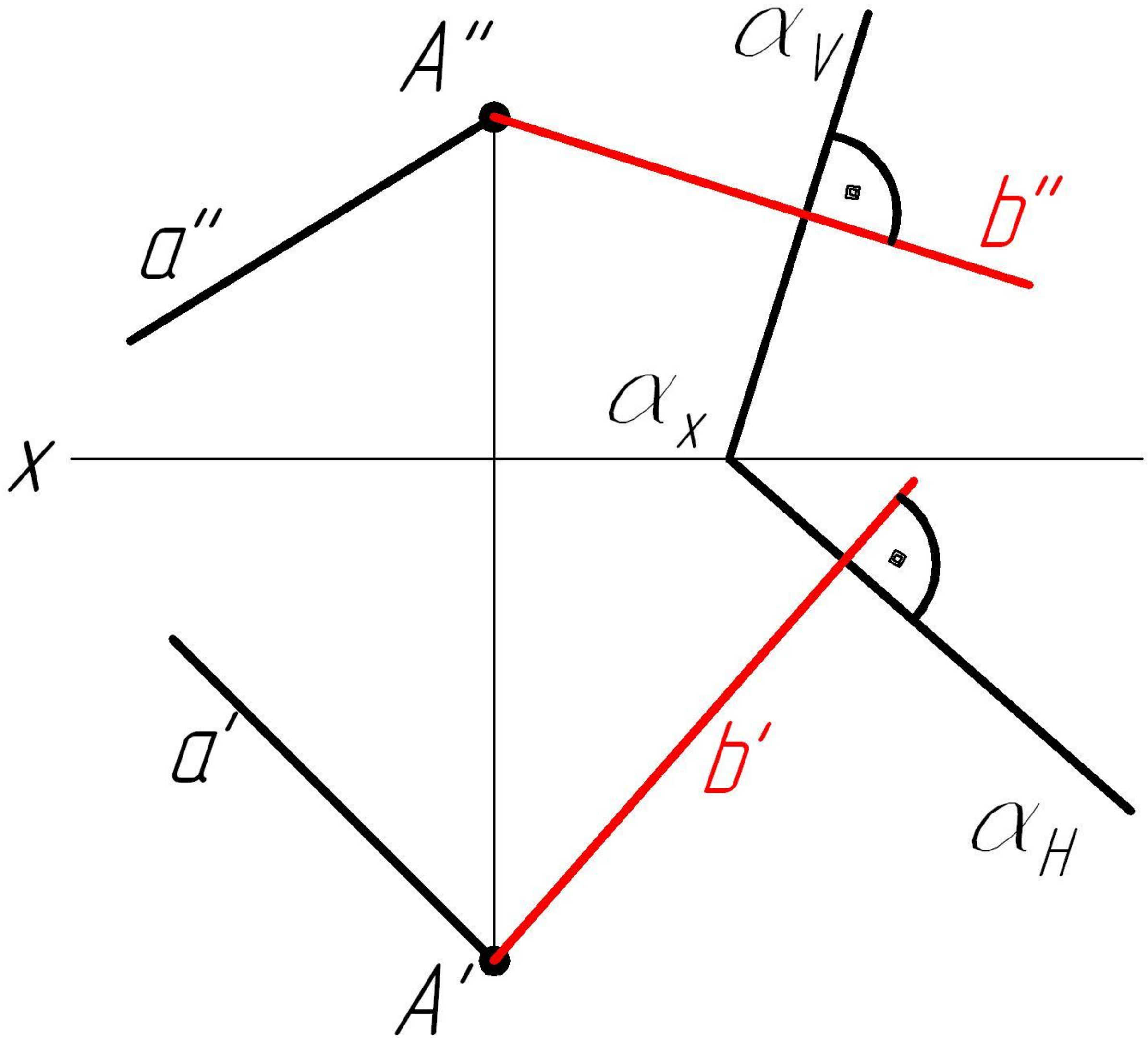
1. α (h ∩ v) ⊥ l; A ⊂ α
2. m ⊂ α; (1-2) ∩ m = M
   (1-2) ⊂ α

6.3. Перпендикулярность двух плоскостей

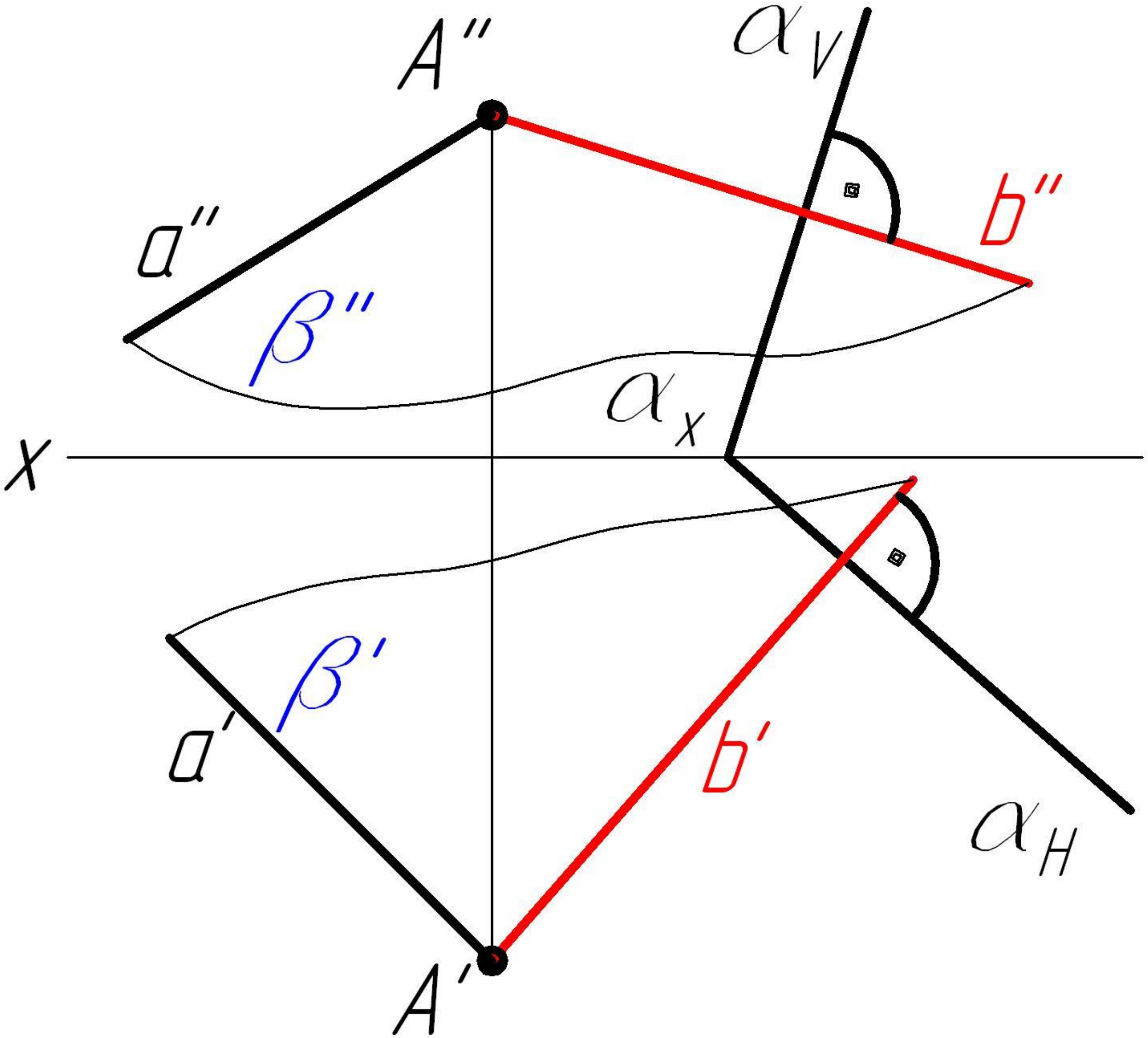
Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Пример 6: Через прямую а провести плоскость β ⊥ α. Плоскость α задана следами.



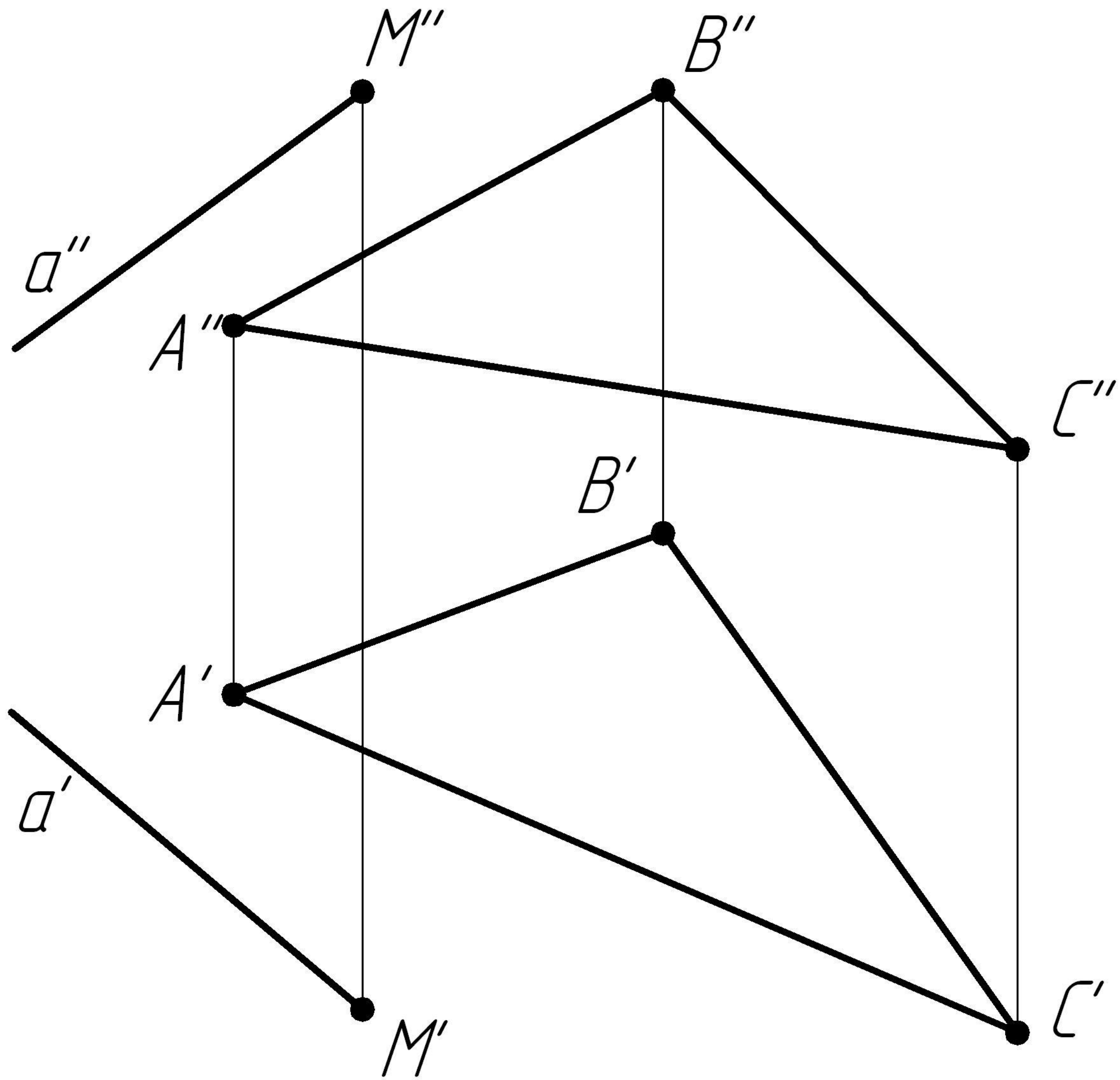


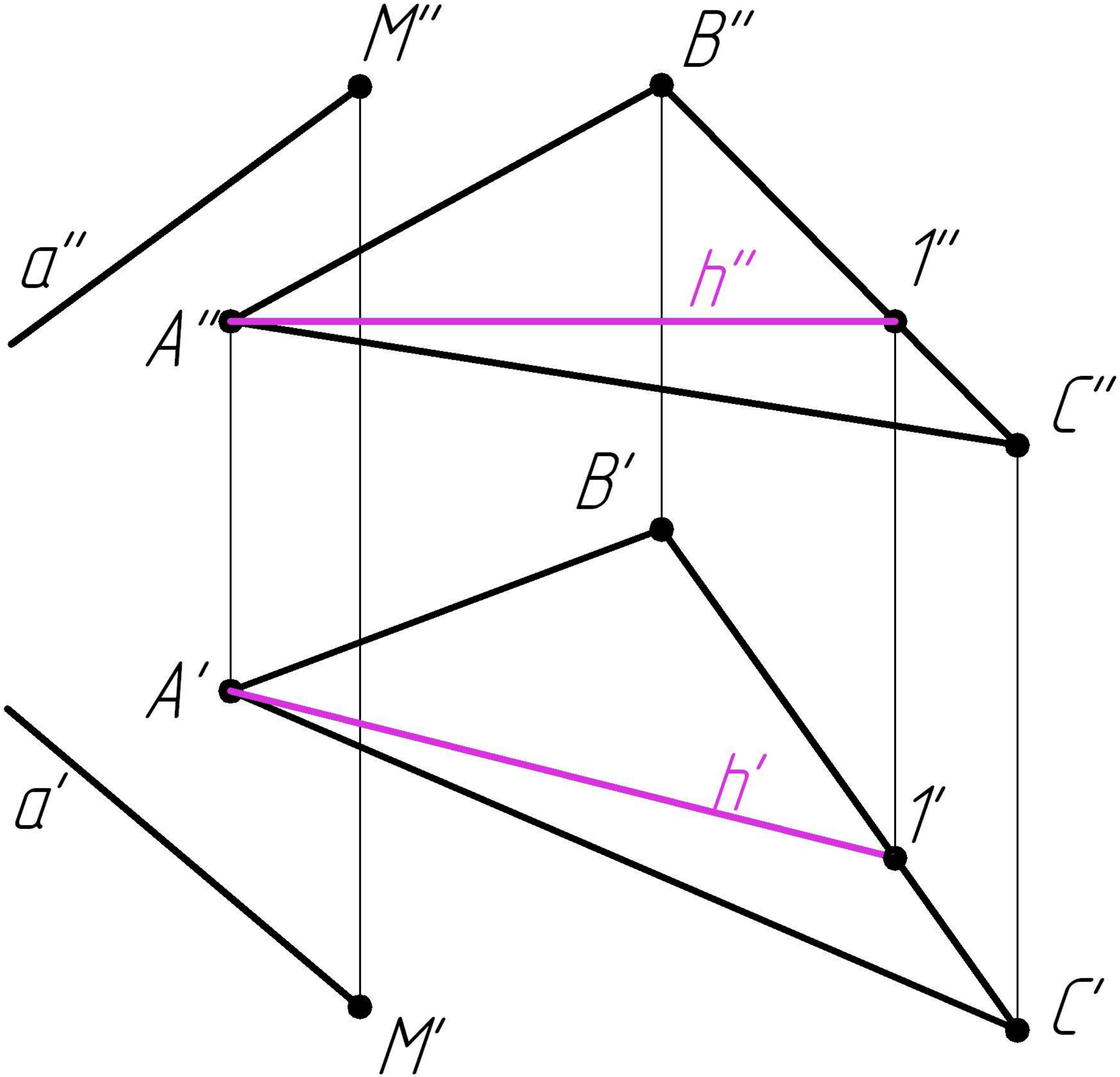
A''
a''
b''
α V
α x
X
a'
b'
α H
A'

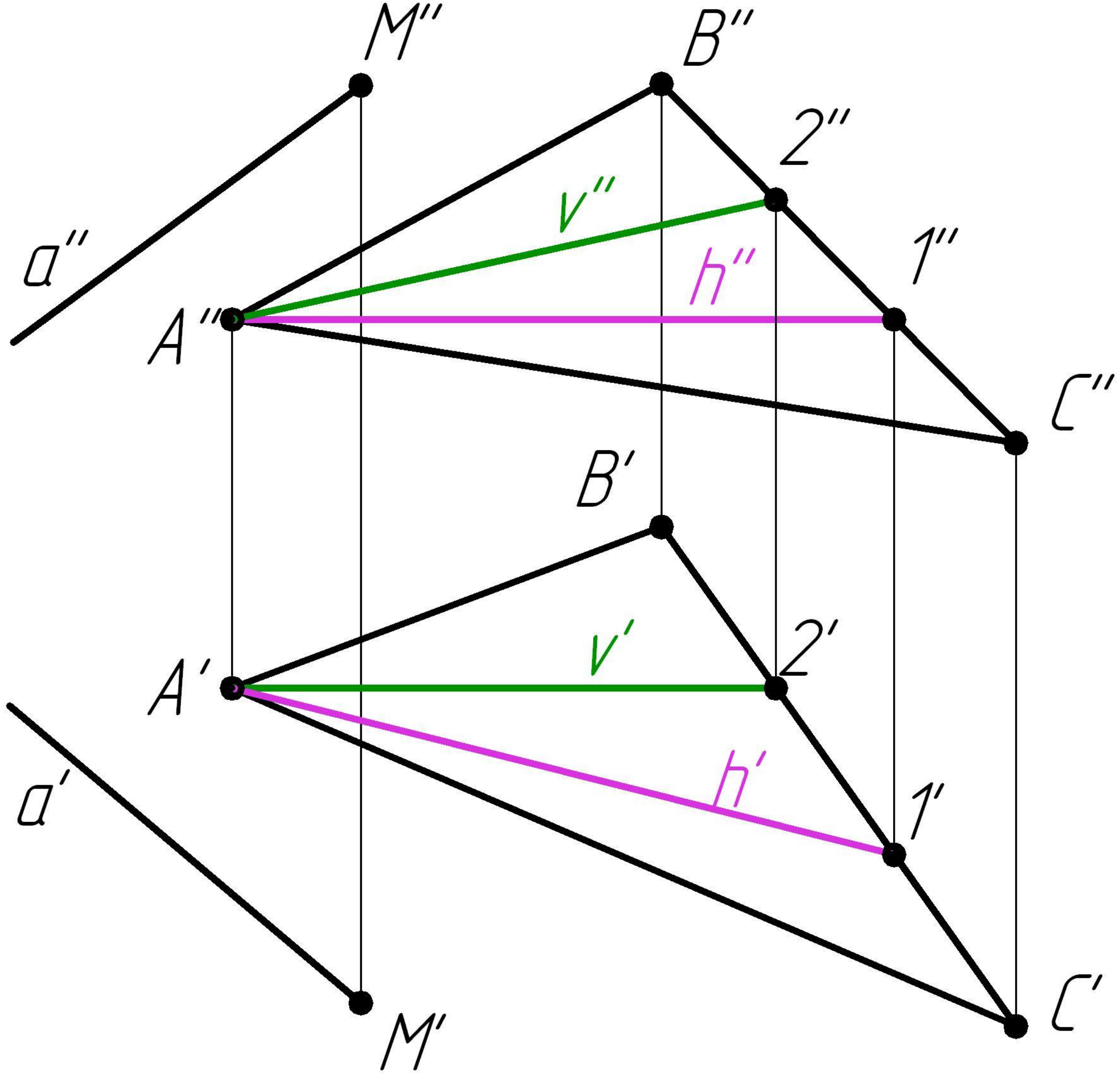


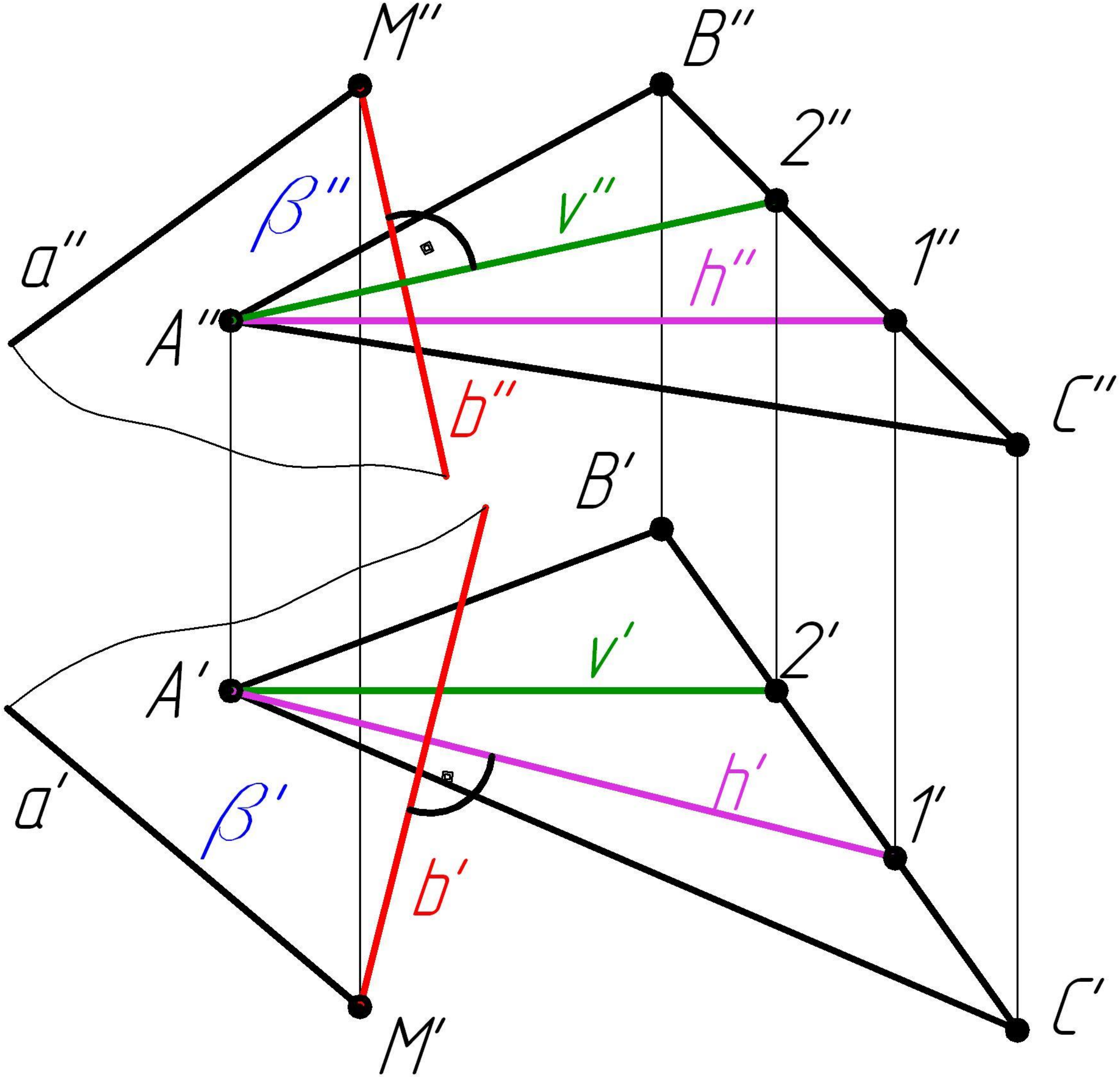
$b' \perp \alpha_H$, $b'' \perp \alpha_V \Rightarrow$
$\alpha \perp \beta\ (a \cap b)$

<u>Пример 7:</u> Через прямую а провести плоскость β ⊥ α.

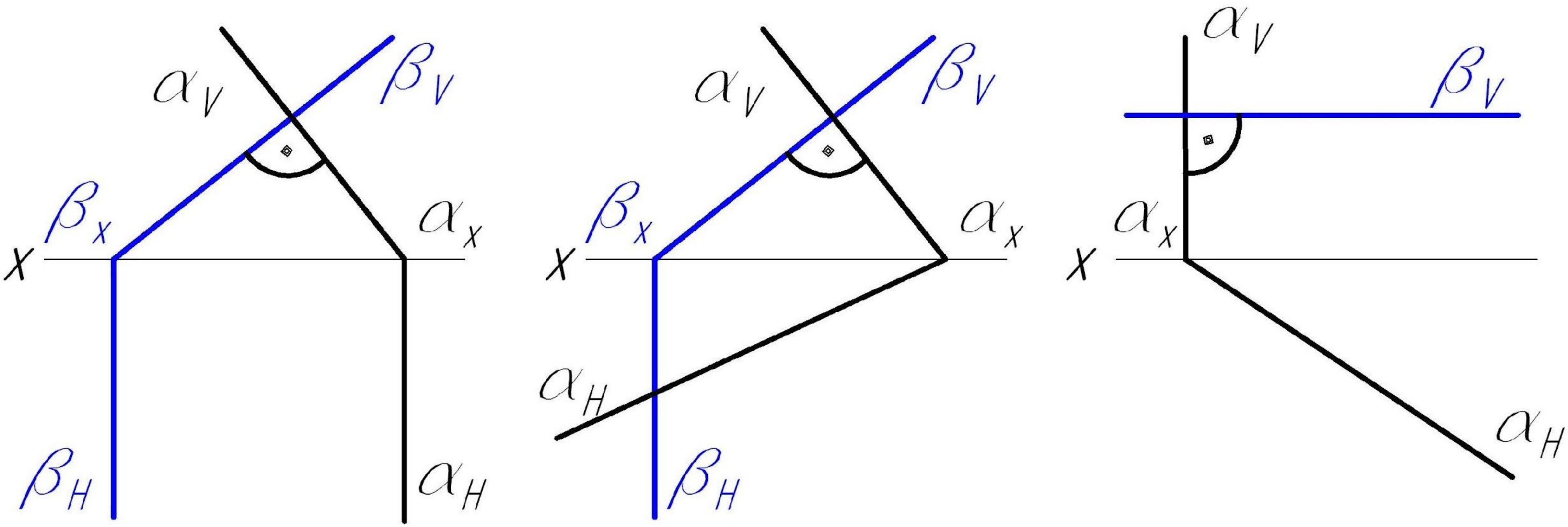



M''
B''
a''
h''
1''
A''
C''
B'
A'
h'
a'
1'
C'
M'

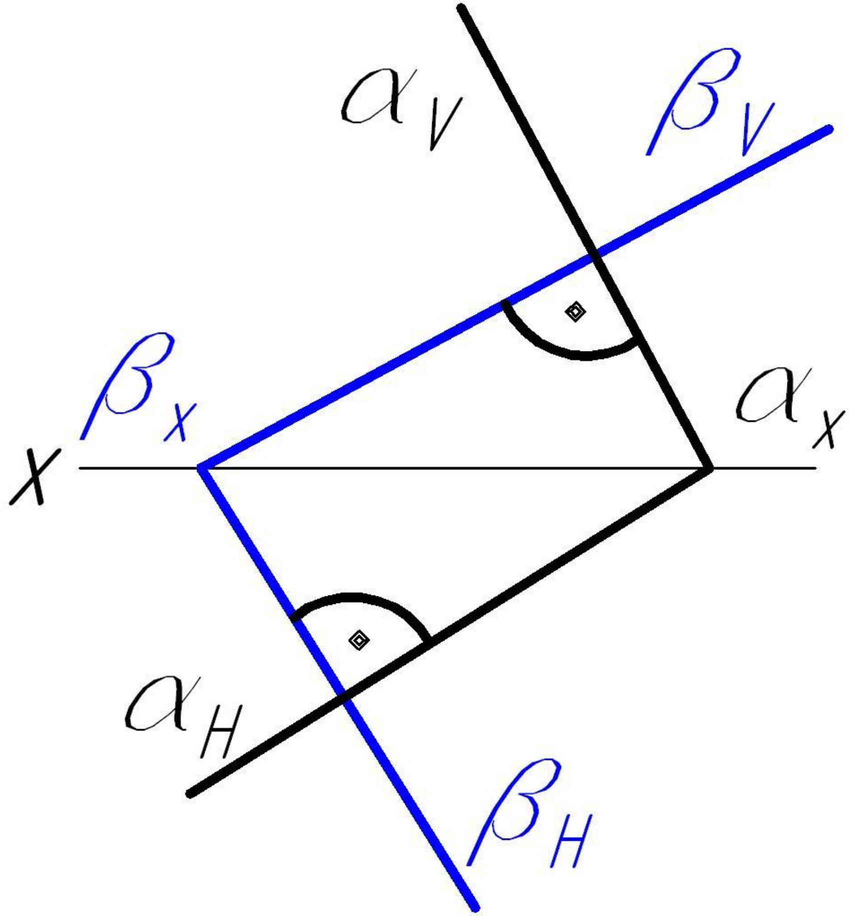

M''
B''
2''
v''
a''
h''
1''
A''
C''
B'
v'
2'
A'
h'
a'
1'
C'
M'


M''
B''
2''
β''
v''
a''
1''
h''
A''
b''
C''
B'
v'
2'
A'
a'
h'
1'
β'
b'
C'
M'

Две плоскости, заданные следами, перпендикулярны, если перпендикулярна одна пара следов.



α ⊥ β



α не перпендикулярна β