Регрессионный анализ

- ***Регрессионный анализ*** – это статистический метод исследования зависимости величины Y от величин $X_j \ (j = \overline{1,k})$.

Задачи регрессионного анализа:

- установление формы зависимости между переменными (***спецификация***),
- определение параметров выбранного уравнения (***параметризация***),
- анализ качества уравнения (***верификация***) и проверка адекватности уравнения эмпирическим данным,
- определение неизвестных значений (***прогноз*** значений).

Если каждому значению X соответствует свое значение $M(Y|X)$, то зависимость

$$M(Y \mid X) = f(X)$$

называется ***функцией регрессии Y на X***.

При этом X называется ***экзогенной***, Y – ***эндогенной***.

При рассмотрении зависимости

- двух переменных говорят о ***парной регрессии***:

$$M(Y \mid X) = f(X)$$

- нескольких переменных говорят о ***множественной регрессии***

$$M(Y \mid X_1, X_2, \ldots, X_k) = f(X_1, X_2, \ldots, X_k).$$

Реальные значения Y не всегда совпадают с $M(Y \mid X)$. Поэтому фактическая зависимость дополняется случайной величиной ε.

Статистическую модель вида:

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

или

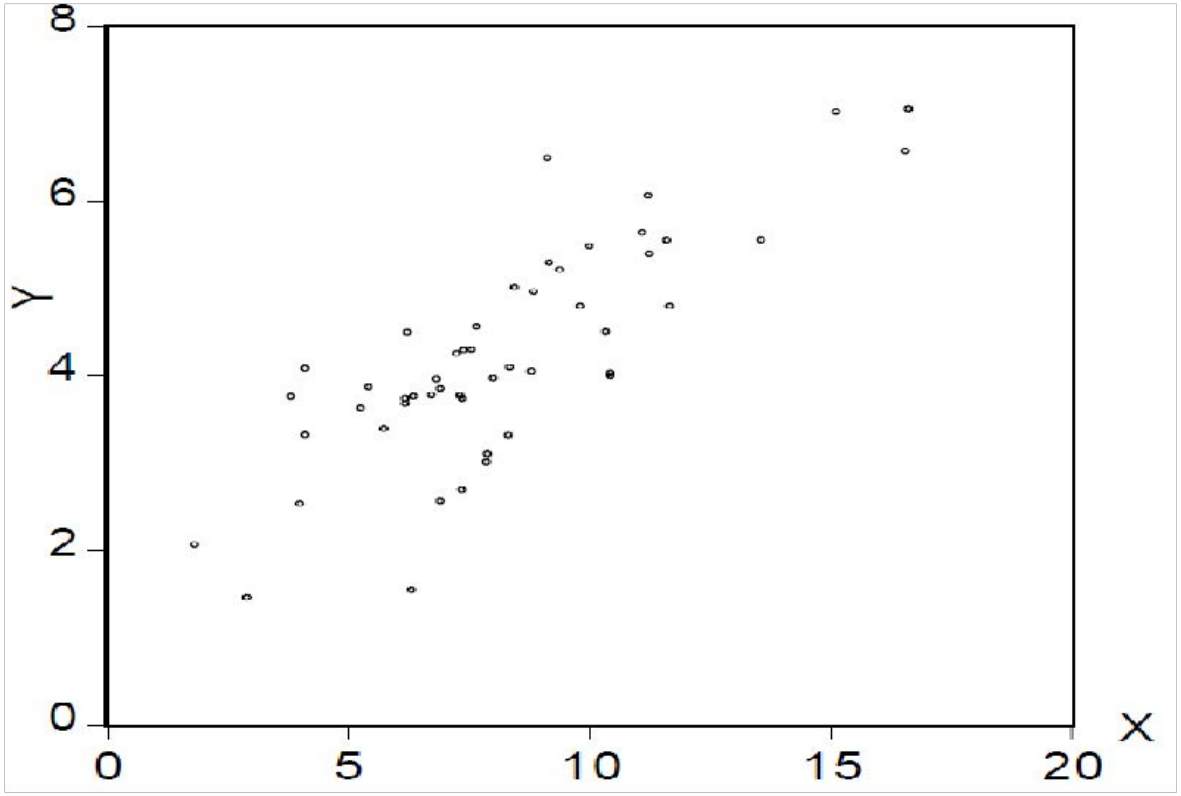
$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_k) + \varepsilon$$

называют ***регрессионными моделями (уравнениями)***.

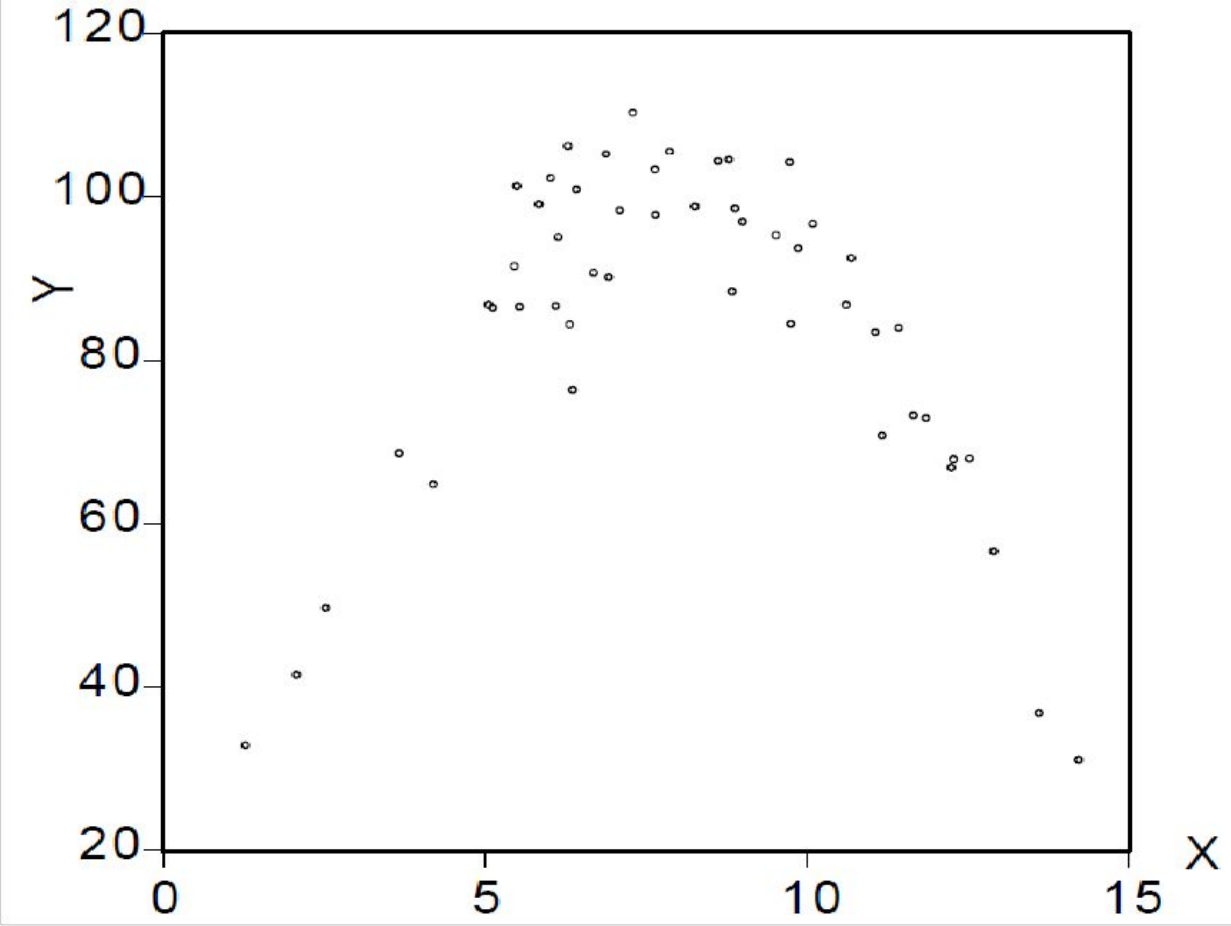
В зависимости от вида функции $f(X)$ модели делятся на ***линейные*** и ***нелинейные***.

Спецификация уравнения регрессии.

В случае парной регрессии – графический анализ реальных статистических данных (наблюдений).

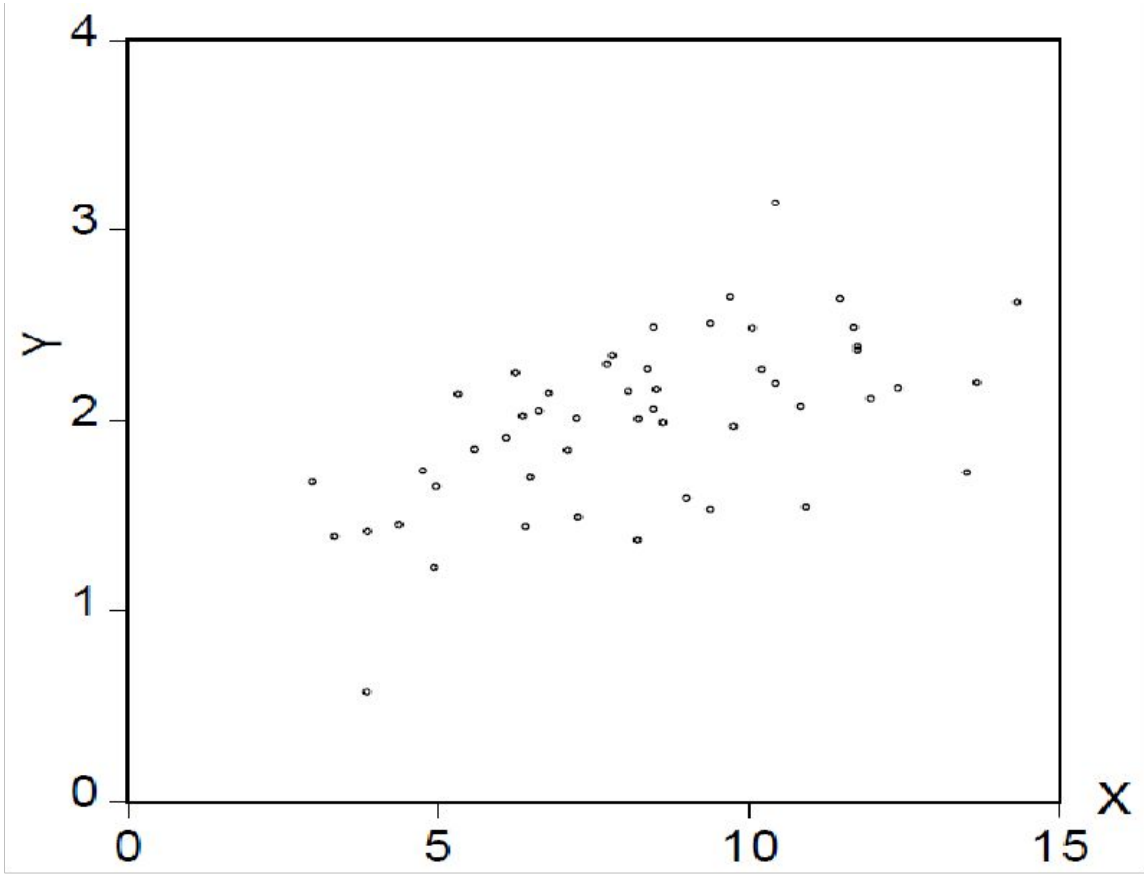


Линейная зависимость $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$.



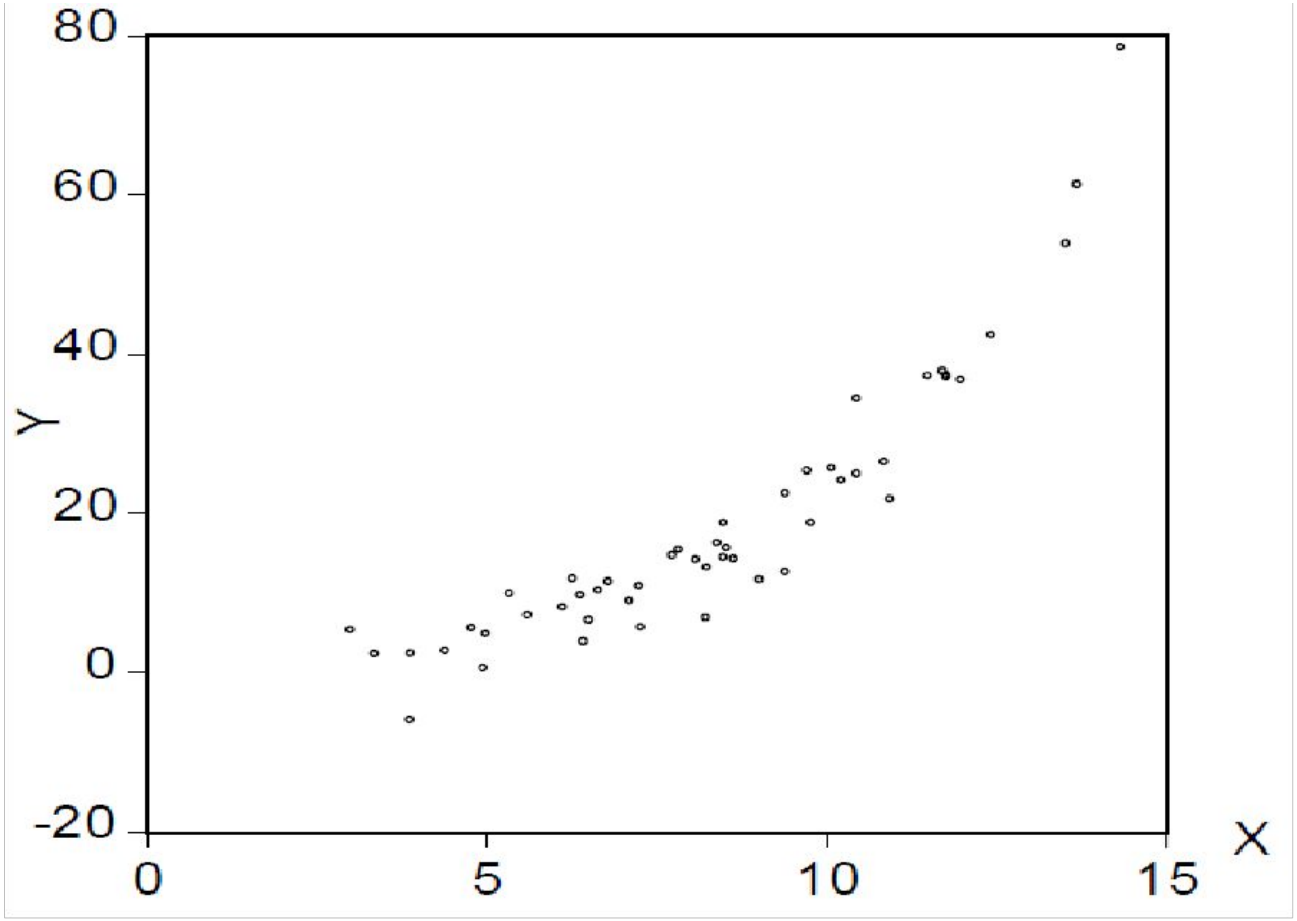
Квадратичная зависимость:

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$



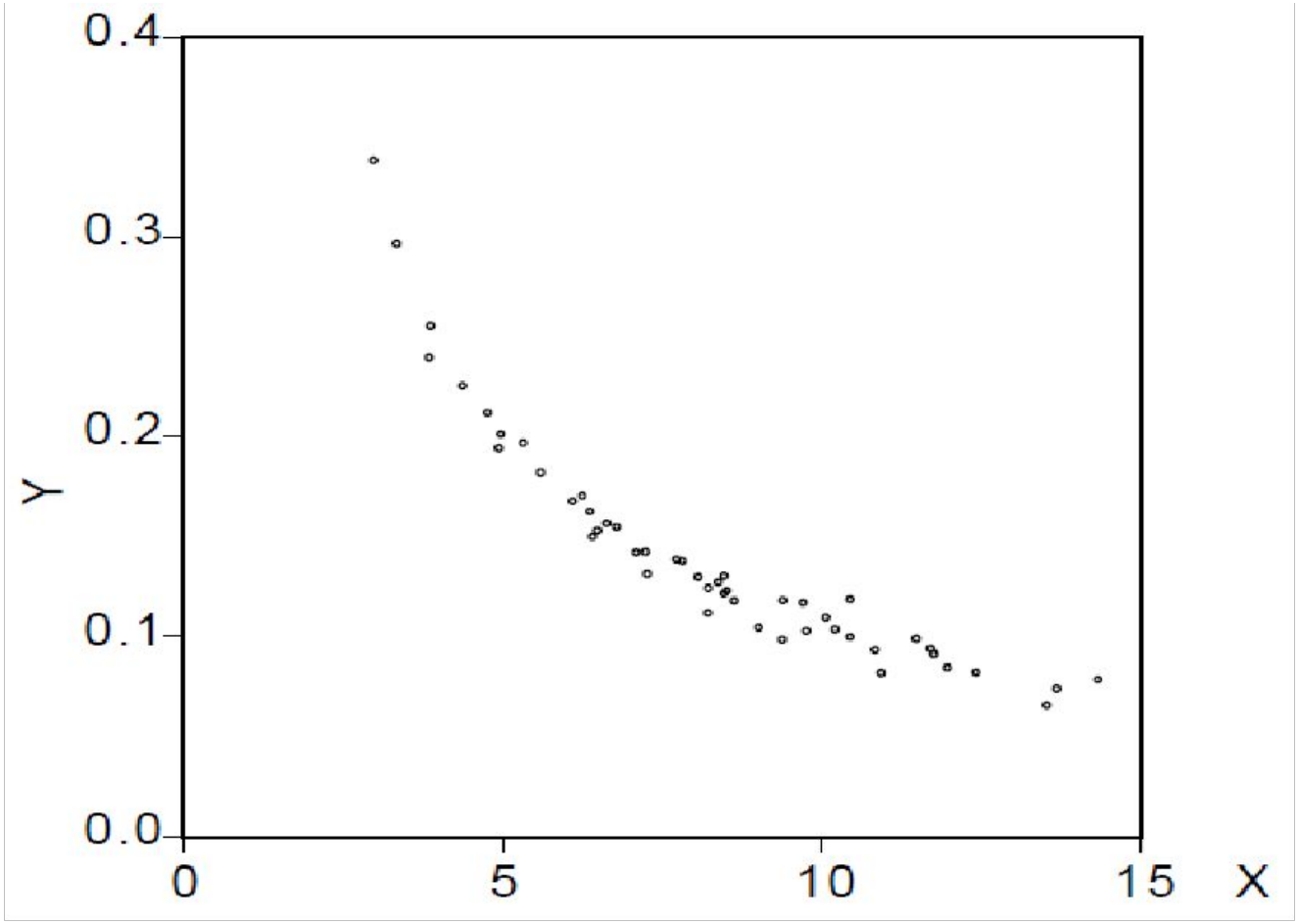
Степенная зависимость

$$\hat{Y} = \beta_0 X^{\beta_1}$$

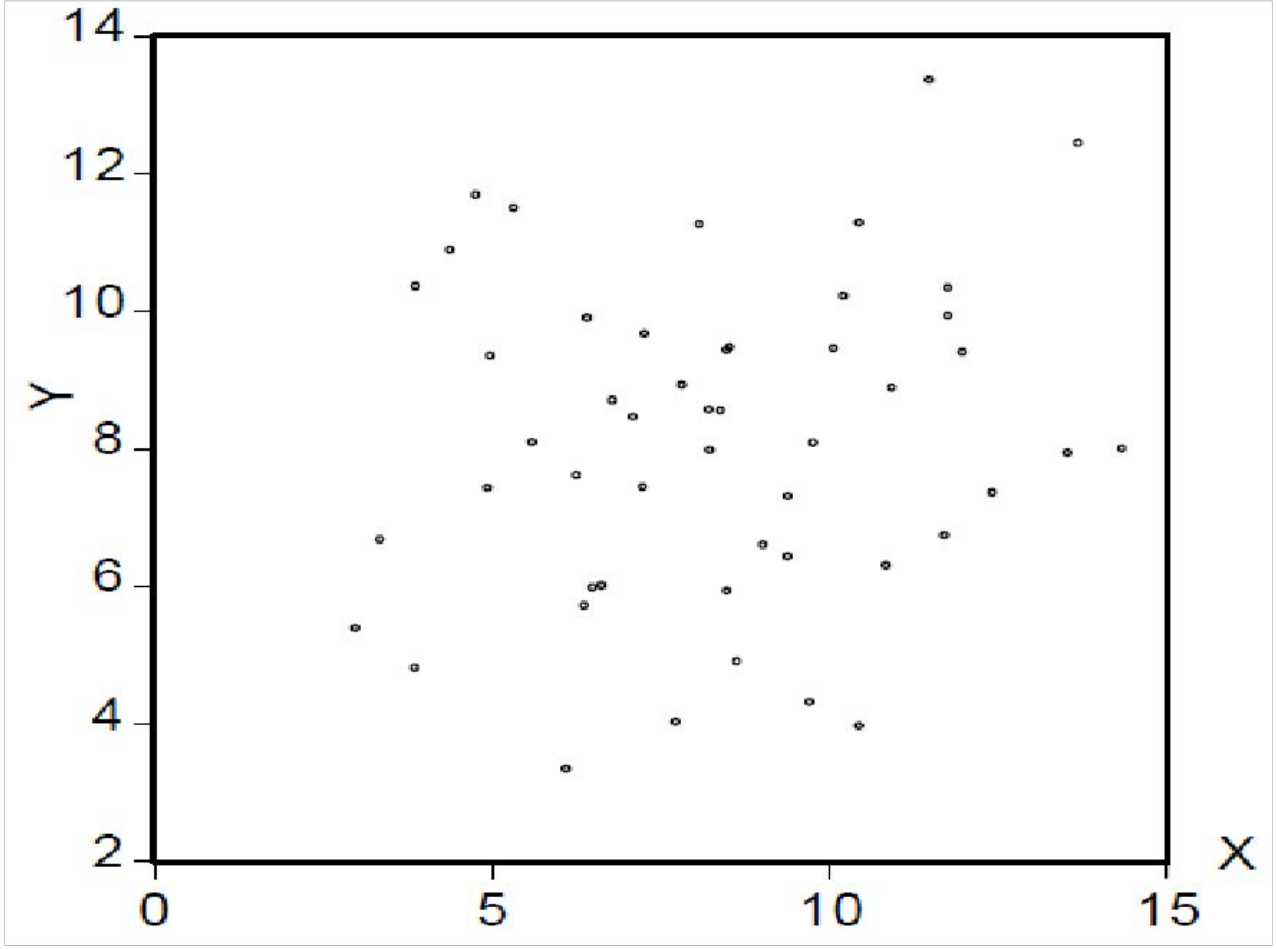


Показательная зависимость

$$\hat{Y} = \beta_0 e^{\beta_1 X}$$



Гиперболическая зависимость $\hat{Y} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{X}$



X и Y независимы

Классическая модель парной линейной регрессии.

Общий вид модели ***парной линейной регрессии***:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \text{ , где}$$

β_0 –свободный член уравнения (*среднее значение Y при условии, что X*=0),

β_1– коэффициент регрессии, характеризует изменение среднего значения переменной Y, при изменении значения X на единицу своего измерения:

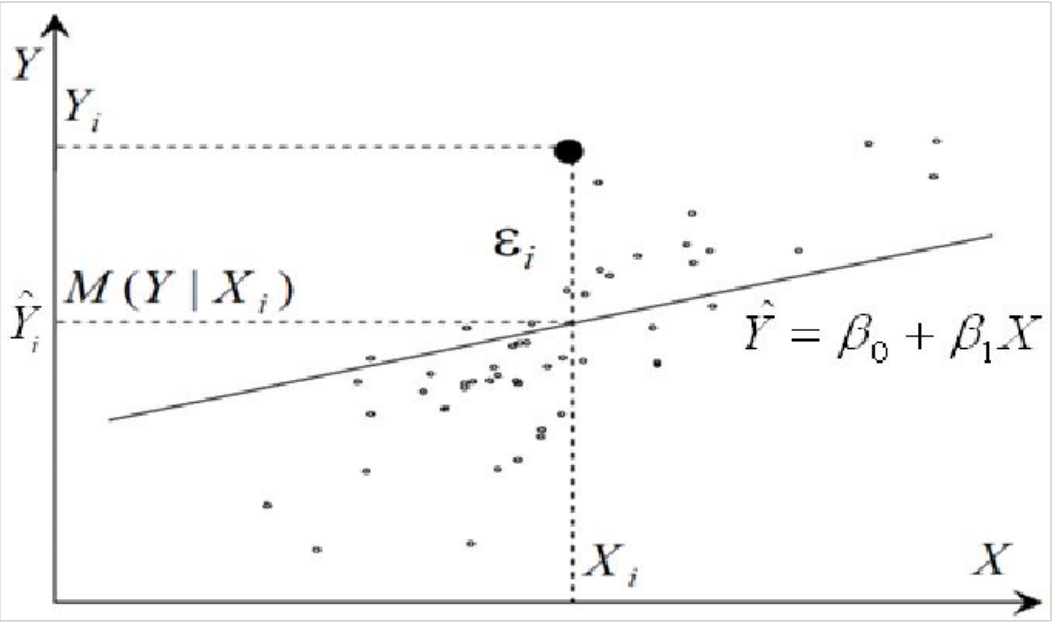
- если $\beta_1 > 0$ – переменные X и Y положительно коррелированные,
- если $\beta_1 < 0$ – отрицательно коррелированны.

ε_i – случайная составляющая.

Выборка: (x_i, y_i) – результат i-го наблюдения.

Для каждого наблюдения ***модель парной линейной регрессии***:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \, .$$



Выборочная линия регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \text{ , где}$$

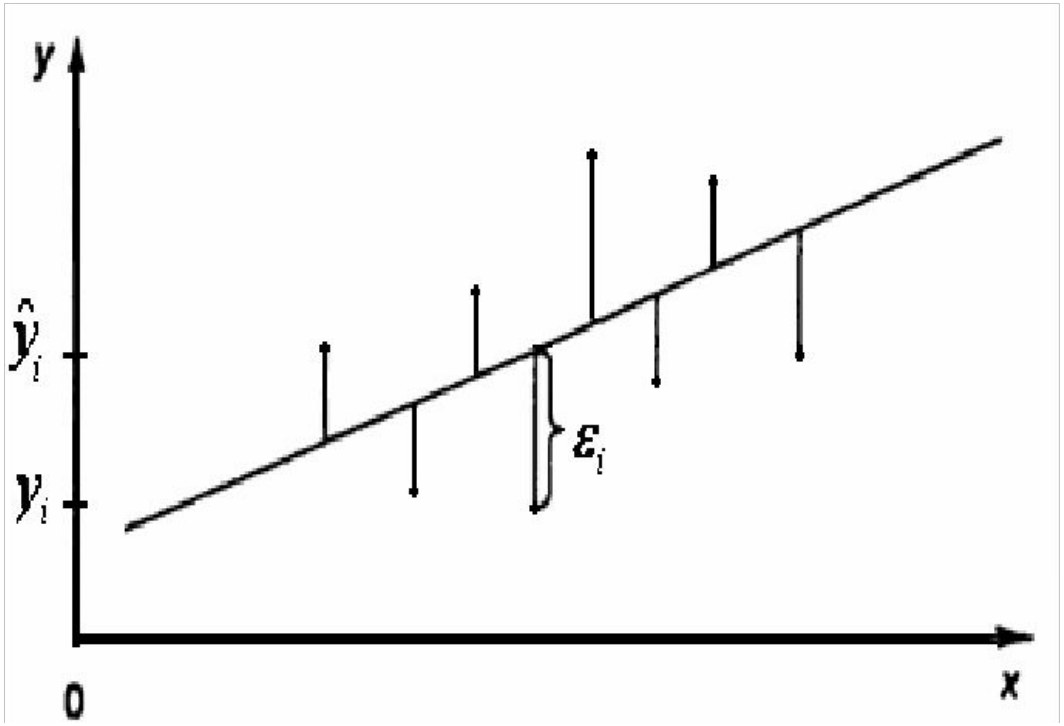
b_0 и b_1 – оценки параметров β_0 и β_1.

Классический (обычный)

метод наименьших квадратов (МНК)

Суть метода состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактических значений результатного признака от его расчетных значений, т.е. y_i от $\hat{y}_i$:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \to \min .$$



Найдем частные производные Q и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i)x_i = 0. \end{cases}$$

Получим ***систему нормальных уравнений***:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum x_i = \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_0 + b_1 \overline{x} = \overline{y} \\ b_0 \overline{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\boxed{b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}},$$

$$\boxed{b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{s_x^2}},$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}; \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n};$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}; \quad \overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n}.$$

По полученному уравнению регрессии

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

получают *расчетные* (*прогнозные*) значения переменной y для каждого i наблюдения, т.е. $\hat{y}_i(x_i)$.

Величина b_1 – ***выборочный коэффициент регрессии*** *Y по X*, который показывает, *на сколько единиц в среднем изменяется переменная Y при увеличении переменной X на одну единицу.*

Матричная форма записи парной линейной регрессии

Матричная форма модели:

$$Y = X\beta + \varepsilon \text{ ,где}$$

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ – вектор значений зависимой;

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ – вектор неизвестных параметров;

$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ – вектор случайных ошибок.

$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$ - матрица значений независимых переменных размерности.

Оценка модели по выборке

$\boxed{\hat{Y} = Xb}$, где

$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$ - вектор оценок неизвестных параметров.

Решение в матричной форме:

$$\boxed{b = (X^T X)^{-1} X^T Y}.$$

Основные предпосылки МНК

Условия Гаусса – Маркова.

1. ε_i $(i=\overline{1,n})$ (или y_i) есть величина случайная, а объясняющая переменная x_i – величина неслучайная: $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, X_i)=0$.
2. $M(\varepsilon_i)=0$ для всех наблюдений ***Y***.
3. $D(\varepsilon_i)=\sigma^2=const$ для всех наблюдений ***Y***.

Это условие называется условием ***гомоскедастичности***.

В матричной форме:

$$D(\varepsilon_i)=\sigma^2 E_n, \text{ где}$$

E_n — единичная матрица n-го порядка.

4. ε_i и ε_j независимы в любых двух наблюдениях: $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \;\; i \neq j$, т.е. отклонения регрессии не коррелируют:

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}.$$

Матричная форма записи предпосылки:

$$\mathrm{cov}(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 E_n, \text{ где}$$

E_n – единичная матрица *n*–го порядка, а $\mathrm{cov}(\varepsilon\varepsilon^T)$ – *ковариационная матрица возмущений*

$$\mathrm{cov}(\varepsilon\varepsilon^T) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Модель парной линейной регрессии, построенная с учетом *условий Гаусса–Маркова* называется ***классической регрессионной моделью***.

Если с условиями Гаусса – Маркова также предполагается нормальность распределения случайного члена:

$$\varepsilon_i \sim N(0;\sigma^2)$$

(если ε – вектор возмущений, то $\varepsilon \sim N(0;\sigma^2 E_n)$),

то модель называется ***классической нормальной регрессионной моделью.***

Свойства оценок МНК

Несмещенность оценки означает, что $M(\varepsilon) = 0$.

Вектор b – несмещенная оценка вектора β : $M(b) = \beta$.

Оценки считаются ***эффективными***, если они характеризуются наименьшей дисперсией.

Вектор b – наиболее эффективная оценка вектора β, т.е. обладает наименьшей дисперсией:

$$\sigma^2(b) \to \min.$$

Состоятельность оценок характеризует увеличение их точности с увеличением объема выборки.

Вектор b – состоятельная оценка вектора β:

$$\lim_{n \to \infty} b_j = \beta_j.$$

Оценка качества (верификация) модели

Качество модели регрессии связывают с адекватностью (или соответствия) модели эмпирическим данным.

Проверка адекватности модели регрессии – на основе анализа остатков - e_i .

Качество модели регрессии оценивается по следующим направлениям:

1) проверка общего качества уравнения регрессии;
2) проверка значимости уравнения регрессии;
3) проверка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии;
4) проверка выполнения предпосылок МНК.

Проверка общего качества уравнения регрессии

Вычисляют коэффициенты, по которым делаются выводы об ее адекватности и точности.

1. Качество парной линейной регрессии определяется с помощью ***выборочного коэффициента парной линейной корреляции*** – показателя близости наблюдений к линейной регрессии:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{s_x \cdot s_y}.$$

2. ***Коэффициент детерминации*** – наиболее эффективная оценка адекватности регрессионной модели:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{Q_{ост}}{Q_{общ}}$$, где

$Q_{ост} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ – сумма квадратов остатков.

$Q_{общ} = \sum (y_i - \bar{y})^2$ – общая сумма квадратов.

R^2 показывает *на сколько процентов вариация результативного признака Y учтена в модели и обусловлена влиянием на него фактора X в общем объеме вариации.*

Свойства коэффициента детерминации.

1. $0 \le R^2 \le 1$.
2. $R^2 = 0$ – вывод о независимости Y и X.
3. $R^2 = 1$ – вывод о наличии функциональной линейной зависимости между переменными Y и X.
4. $0 < R^2 < 1$ – чем ближе R^2 к 1, тем лучше качество подгонки кривой к нашим данным, тем точнее Y.

3. Для оценки точности прогноза используются характеристики: несмещенная оценка остаточной дисперсии, стандартная ошибка остатков и средняя относительная ошибка аппроксимации.

Несмещенная оценка остаточной дисперсии:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-2}\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{Q_{ост}}{n-2},$$

$Q_{ост} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ – сумма квадратов остатков.

Величину $S = \sqrt{\hat{S}^2}$ называют ***стандартной ошибкой*** остатков.

Чем меньше значения этих характеристик, тем выше точность модели.

Средняя относительная ошибка аппроксимации – среднее относительное отклонение расчетных значений зависимой переменной $\hat{y}_i$ от фактических значений y_i:

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\,\%$$

Если средняя ошибка аппроксимации составляет менее 6–7%, то качество модели считается хорошим.

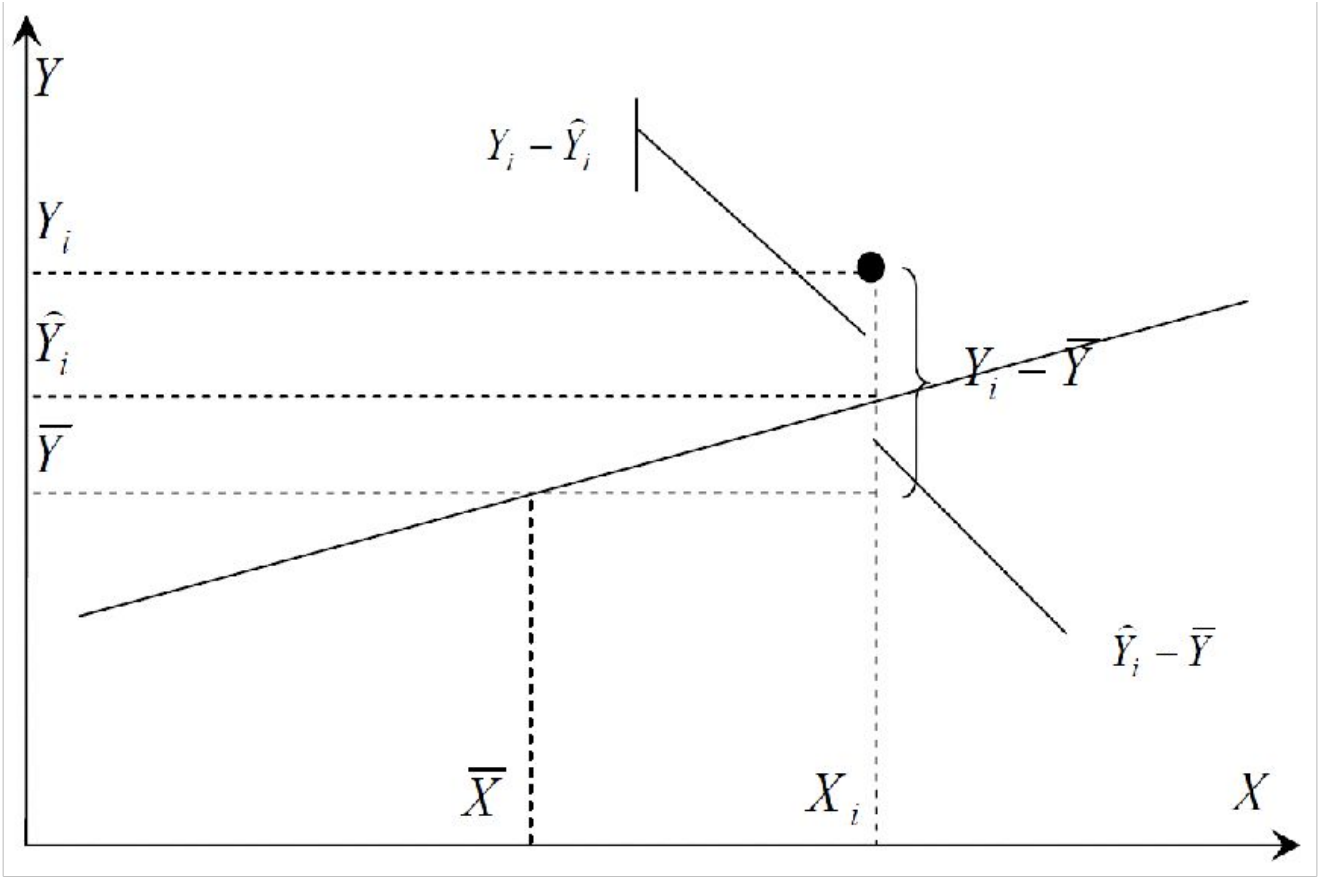
Максимально допустимым значением данного показателя считается 12-15%.

Проверка значимости уравнения регрессии

Проверить значимость уравнения регрессии – установить:

- соответствует ли модель исходным данным и
- достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных.

Проверка значимости уравнения регрессии происходит на основе дисперсионного анализа.



Основное положение дисперсионного анализа

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$, или

$$Q_{общ} = Q_{факт} + Q_{ост}$$

Схема дисперсионного анализа

(n – число наблюдений, k –число объясняющих переменных).

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия на одну степень свободы
Общая	$Q_{общ} = \sum (y_i - \bar{y})^2$	$n-1$	$S^2_{общ} = \frac{Q_{общ}}{n-1}$
Факторная (*объясненная регрессией*)	$Q_{факт} = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	k	$S^2_{факт} = \frac{Q_{факт}}{k}$
Остаточная	$Q_{ост} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n–k–1$	$S^2_{ост} = \frac{Q_{ост}}{n-k-1}$

Выдвигают гипотезу о не значимости уравнения в целом, которая формально сводится к гипотезе о равенстве нулю параметров регрессии:

$$H_0 : \beta_1 = 0.$$

Альтернативная ей гипотеза о значимости уравнения – гипотеза о неравенстве нулю параметров регрессии:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0.$$

Значимость уравнения проверяют с помощью F–критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{S^2_{регр}}{S^2_{ост}} = \frac{Q_{регр}/k}{Q_{ост}/(n-k-1)} = \frac{Q_{регр} \cdot (n-2)}{Q_{ост}},$$ где

n – число выборочных наблюдений, k – число объясняющих переменных.

Если $F_{набл} > F_{кр}(\alpha;\ \nu_1 = k = 1,\ \nu_2 = n-2)$, то гипотеза отвергается и уравнение считается значимым.

R^2 также применяется для проверки значимости уравнения регрессии.

H_0: $R^2 = 0$.

H_1: $R^2 \neq 0$.

Для этого рассчитывают статистику:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2}(n-2).$$

Если $F_{набл} > F_{кр}$, то гипотеза отвергается и уравнение считается значимым.

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Коэффициент называется ***значимым***, если есть достаточно высокая вероятность того, что его истинное значение отлично от нуля.

H_0: $\beta_j = 0$.

Для проверки гипотезы рассчитывают:

$$t_{набл_j} = \frac{b_j}{\hat{S}_{b_j}}, \text{ где}$$

$$\hat{S}_{b_0} = \sqrt{\frac{\hat{S}^2 \sum x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum x_i)^2}} = S\frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{n \cdot S_x}$$

$$\hat{S}_{b_1} = \sqrt{\frac{\hat{S}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = S\frac{\sqrt{n}}{n \cdot S_x}.$$

Если использовать матричную форму записи, то:

$\hat{S}_{b_j}^2 = \hat{S}^2[(X^T X)^{-1}]_{jj}$ – дисперсия коэффициента регрессии b_j;

$\hat{S}^2$ – несмещенная оценка остаточной дисперсии;

$[(X^T X)^{-1}]_{jj}$ – элементы обратной матрицы, стоящие на главной диагонали;

$\hat{S}_{b_j}$ – стандартная ошибка коэффициента b_j.

Если $|t_{набл}| > t_{кр}(\alpha;\ \nu = n-2)$, то гипотеза H_0 отвергается и коэффициент считается значимым.

Если $|t_{набл}| \le t_{кр}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Интервальное оценивание коэффициентов регрессии

Доверительным интервалом называется интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью утверждать, что он содержит значения прогнозируемого показателя.

Интервальная оценка для параметра β_0:

$$\beta_0 \in \left(b_0 \pm t_{\alpha,n-2} \cdot \hat{S}_{b_0}\right), \text{ где}$$

$t_{кр}(\alpha;\ \nu=n-2)$ определяется из *таблицы распределения Стьюдента для двусторонней критической области* для ***уровня значимости*** α и числа степеней свободы $\nu=n-2$.

Аналогично определяется интервальная оценка для коэффициента β_1:

$$\beta_1 \in \left(b_1 \pm t_{\alpha,n-2} \cdot \hat{S}_{b_1}\right)_1.$$

Прогнозирование с применением уравнения регрессии

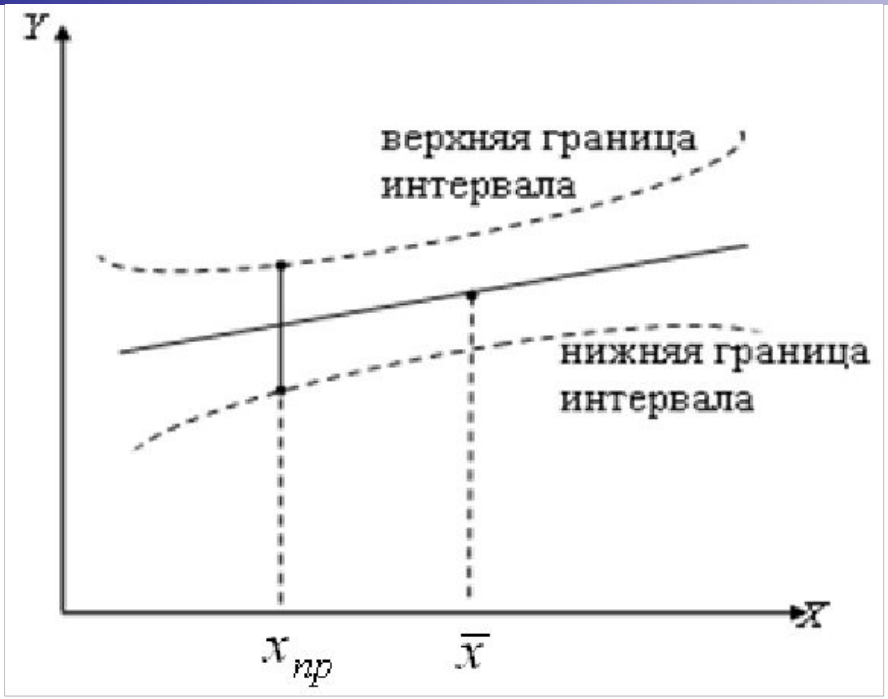
Регрессионные модели могут быть использованы для прогнозирования результативной переменной Y:

$$\hat{y}_{пр} = b_0 + b_1 x_{пр} .$$

Данный прогноз называется ***точечным***.

Интервальная оценка для уравнения регрессии $\hat{y}$ в точке, определяемой начальным условием $X=x_{пр}$ находится следующим образом:

$$y_{пр} \in \left[\hat{y}_{пр} \pm t_{\alpha,n-2} \cdot \hat{S} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{пр} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}} \right].$$



Доверительный интервал имеет наименьшую величину, когда $x_{пр} = \overline{x}$, а по мере удаления x_0 от $\overline{x}$ ширина доверительного интервала увеличивается, и точность оценки $\hat{y}$ снижается.