Проектирование условий измерений

Обратная задача теории погрешности измерений.

Задача *предрасчета условий измерений:*

-в **заданных пределах**, *предельное* (*лимитированное*) *проектирование*,

- **оптимальна** по какому-либо критерию, с получением наилучших значений – *оптимальное проектирование*.

Из условий измерений (**средства** и **методы измерения**):

- точность измерений,
- состав измерений,
- количество измерений,
- внутренняя геометрия измерений.

Проектирование условий измерений

Задача предельного проектирования точности одной функции: задана функция, и ее погрешность σ_f. Предрассчитать (спроектировать) условия измерений чтобы при их реализации мы получили именно наиболее похожую на **заданную** погрешность функции.

Основа:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\cdot K_{ij} =$$

$$= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + f_i^2 \cdot \sigma_1^2 + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T$$

Проектирование условий измерений

Необходимость привлечения **дополнительной информации** об условиях измерений.

Принцип взвешенных влияний с равными условиями –

предположение о равном влиянии на конечный результат частей в выражении для погрешности с *коэффициентом влияния* (*весом*) слагаемых.

Проектирование условий измерений

Пример:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \cdot \sigma_3^2$$

$$\sigma_f^2 = w_1 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2\right) + w_2 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2\right) + w_1 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \cdot \sigma_3^2\right)$$

$$w_1 \cdot \sigma_1^2 \approx w_2 \cdot \sigma_2^2 \approx w_3 \cdot \sigma_3^2$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_f^2}{\left[f^2\right] \cdot w_i}$$

Другие возможности: досчет (что то задано), равность.

Проектирование условий измерений

Из равности - «принцип равных влияний».

Основной способ - проектирование по точности:

1. $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \ldots = \sigma$

$$\sigma_f^2 = f_1^2 \cdot \sigma^2 + \ldots + f_i^2 \cdot \sigma^2 + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma \ \cdot \sigma \ =$$

$$= \sigma^2 \cdot \left(\left[f^2 \right] + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \right)$$

$$\sigma = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\left[f^2 \right] + 2 \cdot \sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(f \cdot R_x \cdot f^T \right)}}$$

Основной частный случай без связи: $\sigma = \dfrac{\sigma_f}{\sqrt{\left(\left[f^2 \right] \right)}}$

Проектирование условий измерений

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\cdot K_{ij} =$$

$$= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + f_i^2 \cdot \sigma_1^2 + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T$$

2. $f_1 \cdot \sigma_1 \approx f_2 \cdot \sigma_2 \approx \ldots f_n \cdot \sigma_n$

$$\sigma_f^2 = n\left(f_i^2 \cdot \sigma_i^2\right) + 2\sum_{i<j}\left(f_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)\cdot r_{ij} = n\left(f_i^2 \cdot \sigma_i^2\right) + 2\left(f_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)\sum_{i<j} r_{ij} =$$

$$= \left(f_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)\cdot\left(n + 2\sum_{i<j} \cdot r_{ij}\right) \longrightarrow \frac{\sigma_f^2}{n + 2\sum_{i<j} r_{ij}} = f_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

$$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i^2 \cdot e R_x e^{\mathrm{T}}}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\overline{f}_i R_x \overline{f}_i^{\mathrm{T}}}}$$

где $\overline{f}_i$ - вектор од. пр.

Главный частный случай без связи

$$\sigma_i = \frac{\sigma_f}{f_i\sqrt{n}}$$

Проектирование условий измерений

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\cdot K_{ij} =$$

$$= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + f_i^2 \cdot \sigma_1^2 + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T$$

3.

$$f_1 \cdot \sigma_1^2 \approx f_2 \cdot \sigma_2^2 \approx \ldots f_i \cdot \sigma_i^2$$

$$\sigma_f^2 = f_1 \cdot \left(f_1 \sigma_1^2\right) + \ldots + f_n \cdot \left(f_n \sigma_n^2\right) + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij}$$

$$\sigma_f^2 = \left(f_1 + f_2 + \ldots + f_n\right) \cdot f_i \sigma_i^2 = [f] \cdot f_i \sigma_i^2$$

$$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot f R_x e^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f R_x \bar{f}_i^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot [f]}}$$

Главный частный случай без связи

$$\sigma_i = \frac{\sigma_f}{\sqrt{f_i \cdot [f]}}$$

Проектирование условий измерений

Маркузе М.Ю. – степенное взвешивание:

$$m_i^2 = \frac{m_f^2}{\left(f_i^{h_i+2}\right)\cdot\left(\left[f^{-h_i}\right]\right)}$$

При h = -2, предположение 1;

при h = 0, предположение 2;

при h = -1, предположение 3.

Тяжесть учета корреляции.

Проектирование условий измерений

Необходимость альтернативы при проектировании.

Проектирование на основе *случайного поиска* (*перебора*) - *сеточный метод*. Суть. Результат - *n*-мерные (по числу аргументов) **сетки**. Пример:

$$m_P^2 = m_S^2 + S^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

Длина $S = 100$ м, $m_P = 5$см: m_S и m_α - ?.

Шаг погрешности длины 1 см, с 1 см, например, до 7см,

Шаг погрешности угла с $10''$ через $10''$ до $60''$. Таблица погрешностей для m_P при разных точностях.

Проектирование условий измерений

Оптимальное проектирование - получение **наилучшей** точности из всех возможных. Не возможность для одномерных задач: минимальная точность функции при **нулевой** точности измерений.

Условная оптимизация (*минимизация*) ***Лагранжа*** – измерения связаны математическим условием.

Проектирование условий измерений

Проектирование по геометрии:

1. Погрешности измерений σ_i известны, $f_1 \approx f_2 \approx \ldots \approx f$:

$$\sigma_f^2 = f^2 \cdot \left(\left[\sigma^2 \right] + 2 \sum_{i<j} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij} \right)$$

$$f = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\left[\sigma^2 \right] + 2 \cdot \sum_{i<j} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\sigma \cdot R_x \cdot \sigma^T \right)}} =$$

$$= \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(e \cdot K_x \cdot e^T \right)}}$$

Проектирование условий измерений

2. Погрешности измерений σ_i известны и

$$f_1 \cdot \sigma_1 \approx f_2 \cdot \sigma_2 \approx \ldots f_n \cdot \sigma_n$$

$$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot \left(n + 2\sum_{i<j} r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot e R_x e^{\mathrm{T}}}} =$$

$$= \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\sigma}_i \cdot R_x \cdot \bar{\sigma}_i^T}}$$

Проектирование условий измерений

3. Погрешности измерений σ_i известны и

$$f_1 \cdot \sigma_1^2 \approx f_2 \cdot \sigma_2^2 \approx \ldots f_i \cdot \sigma_i^2$$

$$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma R_x \bar{\sigma}_i^T}}$$

Частности: одинаковые погрешности, нет связей

Проектирование условий измерений

Проектирование условий измерений

сводная таблица

Условия	*Проектирование σ_i*	*Проектирование f_i*
1	$\sigma = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{f R_x f^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\sigma \ R_x \sigma^T}}$
2	$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\bar{f}_i R_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\bar{\sigma}_i R_x \bar{\sigma}_i^T}}$
3	$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{f R_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\sigma \ R_x \bar{\sigma}_i^T}}$

Проектирование условий измерений

Проектирование измерений для вектор-функции- отыскание значений **матрицы** $K_Y = F\,K_x F^T$

Всегда K_Y задана, виды проектирования:

- нахождение значений матрицы F - *проектирование геометрии*);

- нахождение матрицы K_x - *проектирование точности*.

Наиболее простой вид задачи:

Заданна матрица результатов K_Y и матрица геометрии F.

Предрассчитать точность измерений без учета тесноты связи -элементы **диагональной** матрицы измерений K_x

$$\underset{(k\times k)}{K_Y} = \underset{(k\times n)}{F} \cdot \underset{(n\times n)}{K_x} \cdot \underset{(n\times k)}{F^T}$$

Проектирование условий измерений

Если $n = k$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

n неизвестных - $t = \dfrac{n(n+1)}{2}$ уравнений вида

$$K_{11} = f_{11}^2 \cdot k_1 + f_{12}^2 \cdot k_2 + \ldots + f_{1n}^2 \cdot k_n$$

$$K_{12} = f_{11} f_{21} \cdot k_1 + f_{12} f_{22} \cdot k_2 + \ldots + f_{1n} f_{2n} \cdot k_n$$

… … … … …

Проектирование условий измерений

Система в матричном виде с размерами будет

$$\underset{(t\times 1)}{k_y} = \underset{(t\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times 1)}{k_x}$$

Решение по МНК или левая трансформация **Гаусса** (домножить на A^{T})

$$A^T \cdot A \cdot k_x = A^T \cdot k_y$$

Другие возможности.