Дополнительные возможности

Оценка точности на основе весов

Вес. Вес измерения - **во сколько раз** один из результатов измерений точнее другого. Мера *относительной точности* в ТПИ. (***Р. Коутс***, 1700 г).

$$p_1 = \frac{k}{\sigma_1^2}, \quad \ldots \quad , \quad p_n = \frac{k}{\sigma_n^2} \qquad\qquad p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \quad \ldots \quad , \quad p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}$$

Погрешность единицы веса. Оценка качества на основе весов

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{p_i}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}$$

Обратный вес измерения.

Дополнительные возможности

Вес функции.

$$\sigma_f^2 = f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots \ + f_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T$$

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_0^2} = f_1^2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} + \ldots \ + f_n^2 \cdot \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \frac{\sigma_i \cdot \sigma_j}{\sigma_0 \cdot \sigma_0} = f \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot K_x \cdot f^T$$

Обозначения: $\dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{1}{p_i} = q_i \quad \tilde{f} = f \cdot P_x^{\frac{1}{2}}$

$$Q_f = f_1^2 \cdot q_1 + \ldots \ + f_n^2 \cdot q_n + 2\sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sqrt{q_j \cdot q_j} = f \cdot Q_x \cdot f^T = \tilde{f} \cdot R_x \cdot \tilde{f}^T$$

$$P_x^{-1} = Q_x = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot K_x = \begin{bmatrix} q_1 & r_{12} \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} & \cdots \\ r_{12} \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} & q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & q_n \end{bmatrix} = P_x^{\frac{1}{2}} \cdot R_x \cdot P_x^{\frac{1}{2}}$$

Дополнительные возможности

Ковариационная матрица измерений (функции) через *матрицу кофакторов* (*обратных весов*) будет

$$K = \sigma_0^2 \cdot Q$$

$$P_f = \frac{\sigma_0^2}{m_f^2} \rightarrow \sigma_f = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{P_f}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_f}$$

Проектирование по весу

$$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot [f]}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot fR_x e^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{fR_x \bar{f}_i^T}}$$

Дополнительные возможности

Совместный учет случайных и систематических погрешностей.

Функция общего вида $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$$

d_f и d_{xi} $\longrightarrow \varepsilon_y$ и ε_i.

Случайная $\varDelta_i$ и *систематическая* θ_i, $\varepsilon_i = \varDelta_i + \theta_i$,

$$\left(\theta_y + \Delta_y\right) = f_1 \cdot (\theta_1 + \Delta_1) + \ldots + f_n \cdot (\theta_n + \Delta_n)$$

Дополнительные возможности

Выделяем случайные и систематические составляющие

$$\begin{cases} \theta_y = f_1 \cdot \theta_1 + \ldots + f_n \cdot \theta_n \\ \Delta_y = f_1 \cdot \Delta_1 + \ldots + f_n \cdot \Delta_n \end{cases}$$

Предельный переход от конечных приращений Δ_i к *средним квадратическим погрешностям* m_i

$$\sigma^2 = f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + f_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \ldots$$

Совместный учет

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_\Delta^2 + \sigma_\theta^2}$$

Систематикой пренебречь если $\sigma_\Delta > 3\,\sigma_\theta$ $(\sigma_\Delta / \sigma_\theta > 3)$,

Дополнительные возможности

Учет случайной и систематической составляющей для оценки среднего арифметического

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n^2 \cdot \theta^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \theta^2$$

Пренебречь систематикой, если

$$\theta < \frac{1}{5} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\theta} > 5$$

Для суммы углов

$$\sigma_f^2 = n\sigma^2 + n^2\theta^2 = n^2\left(\frac{\sigma^2}{n} + \theta^2\right)$$

Общая формула

$$\sigma_f^2 = fKf^T \qquad K = K_x + K_\theta, \qquad K_\theta = \theta^T \cdot \theta$$

Дополнительные возможности

Метод взятия полного дифференциала функции и **переход** к СКП:

$$f = S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$S^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$2S \cdot dS = 2(x - x_0)dx + 2(y - y_0)dy$$

$$(2S)^2 \cdot \sigma_s^2 = \left(2(x - x_0)\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(2(y - y_0)\right)^2 \cdot \sigma_y^2$$

$$\sigma_f^2 = \frac{(x - x_0)^2}{S^2} \cdot \sigma_x^2 + \frac{(y - y_0)^2}{S^2} \cdot \sigma_y^2$$

Дополнительные возможности

Для произведения:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$\ln(V) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$$

$$\frac{\sigma_V^2}{V^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}$$

Дополнительные возможности

Численное оценивание погрешности функции

Численное вычисление производной:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}$$

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta}$$

Дополнительные возможности

Формулы оценки

$$\sigma_f^2 = fKf^T = \begin{bmatrix} \dfrac{f_{\Delta_1} - f}{\Delta} & \cdots & \dfrac{f_{\Delta_n} - f}{\Delta} \end{bmatrix} \cdot K \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{f_{\Delta_1} - f}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{f_{\Delta_n} - f}{\Delta} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} f_{\Delta_1} & \cdots & f_{\Delta_n} \end{bmatrix} \cdot K \cdot \begin{bmatrix} f_{\Delta_1} \\ \vdots \\ f_{\Delta_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f & \cdots & f \end{bmatrix} \cdot K \cdot \begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ f \end{bmatrix} \right\}$$

$$f_{\Delta_i} = f\left(x_1, \ldots, x_i + \Delta, \ldots, x_n\right)$$

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \cdot \left(\left[f_\Delta^2 \right] - nf^2 \right)$$

Дополнительные возможности

Оценки на основе *интервальной арифметики*

числа как **интервалы:** $A = a \pm \Delta$

$$A = \{a - \Delta; a + \Delta\} = \{\underline{a}; \overline{a}\}$$

перемножение интервальных чисел

$$A = \{\underline{a}; \overline{a}\} \qquad B = \{\underline{b}; \overline{b}\} \qquad C = A \cdot B = \{\underline{c}; \overline{c}\}$$

$$\begin{cases} A + B = \{\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\} \\ tg(A) = \{tg(\underline{a}), tg(\overline{a})\} \end{cases}$$

Дополнительные возможности

Для оценивания меры рассеивания функции:

- получают ее интервальное значение

$$f_{инт} = \left\{ \underline{f}, \overline{f} \right\}$$

- половина значения интервала есть мера

$$\frac{\overline{f} - \underline{f}}{2} = \delta$$

Связь с СКП: $\delta \approx 2\sigma_f$

Дополнительные возможности

Контрольные вопросы 1 модуль:

1. Теория погрешностей измерений. Общие положения, цели, задачи.

2. Оценка точности функции (прямая задача ТПИ).

3. Оценка точности вектор функции.

4. Проектирование результатов измерений (обратная задача ТПИ-1)

5. Проектирование геометрии процесса (обратная задача ТПИ-2)

6.Дополнительные возможности при обработке косвенных измерений