

Раздел 4. Основы теории множеств.

Лекция №8. Множество. Операции над множествами.

Сегодня мы знаем, что,
логически говоря,
ВОЗМОЖНО ВЫВЕСТИ ПОЧТИ ВСЮ СОВРЕМЕННУЮ
МАТЕМАТИКУ ИЗ ЕДИНОГО ИСТОЧНИКА —
теории множеств.

Н. Бурбаки

Что такое множество?

Совокупность элементов,
объединенных некоторым
признаком, свойством,
составляет понятие
МНОЖЕСТВО.

Предметы, составляющие
множество, называются его
элементами.

Принадлежность множеству

$a \in A$

$a \notin A$

Способы задания множеств:

Множество считается заданным, если или *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству.

$M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, например, $M = \{0, 1\}$.

$$M = \{b \mid P(b)\}$$

M составляют только те
натуральные числа, что меньше
пяти.

$$M = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n < 5\}$$

Само свойство P будем
называть
характеристическим.

Порождающая процедура - описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

$$A = \{X_k = 3 + 2(k^2 + 1)\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Задавая различные значения параметра k , мы можем вычислять элементы множества A :

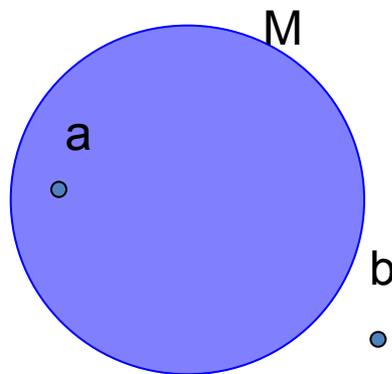
$$X_0 = 5, X_1 = 7, X_2 = 13 \text{ и т.д.}$$

Какое множество называется пустым?
Существуют ли пустые множества?

Множество, не содержащее ни
одного элемента, называется
пустым и обозначается
СИМВОЛОМ \emptyset .

Как изображаются множества?

Диаграммы Эйлера-Венна



Что такое подмножество?

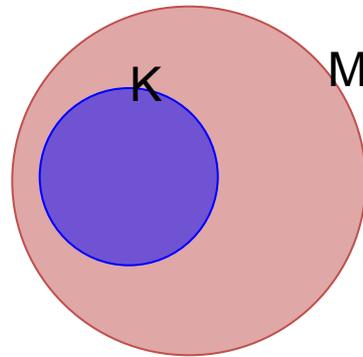
Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B , то говорят, что A - **подмножество** в B , и пишут $A \subset B$.

Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества:

пустое множество \emptyset и

само множество A .

Подмножество



Универсальное множество

Универсальным называют множество U , состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Например, множество планет Солнечной системы

$U = \{\text{Земля, Марс, Венера, Юпитер, Сатурн, Уран, Плутон, Меркурий, Нептун}\}.$

Какие множества считаются
равными?

Равными называют два множества
A и *B*, состоящие из одинаковых
элементов:

$$A=B$$

Мощность множества

Число элементов множества A
называется **мощностью** множества
и обозначается:

$$|A|$$

```
graph TD; A[Виды множеств] --> B[Конечные]; A --> C[Бесконечные]; C --> D[Счетные]; C --> E[Несчетные];
```

Виды множеств

Конечные

Бесконечные

Счетные

Несчетные

Операции над
множествами.

Вопросы:

- 1. Основные операции.*
- 2. Свойства операций над множествами.*
- 3. Декартово произведение множеств.*

*Все правила
достойного поведения
давным-давно известны,
остановка за малым —
умением ими пользоваться.*

Б. Паскаль

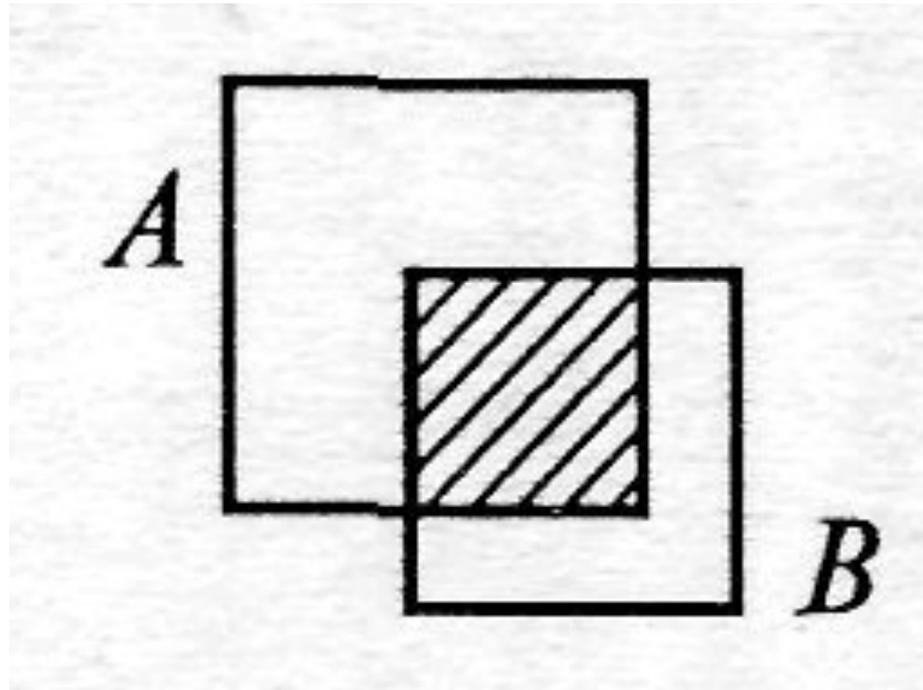
1. Основные операции.

План изучения каждой операции:

- Название
- Обозначение
- Изображение кругами Эйлера
- Определение
- Символическая запись

Пересечение множеств

$A \cap B$



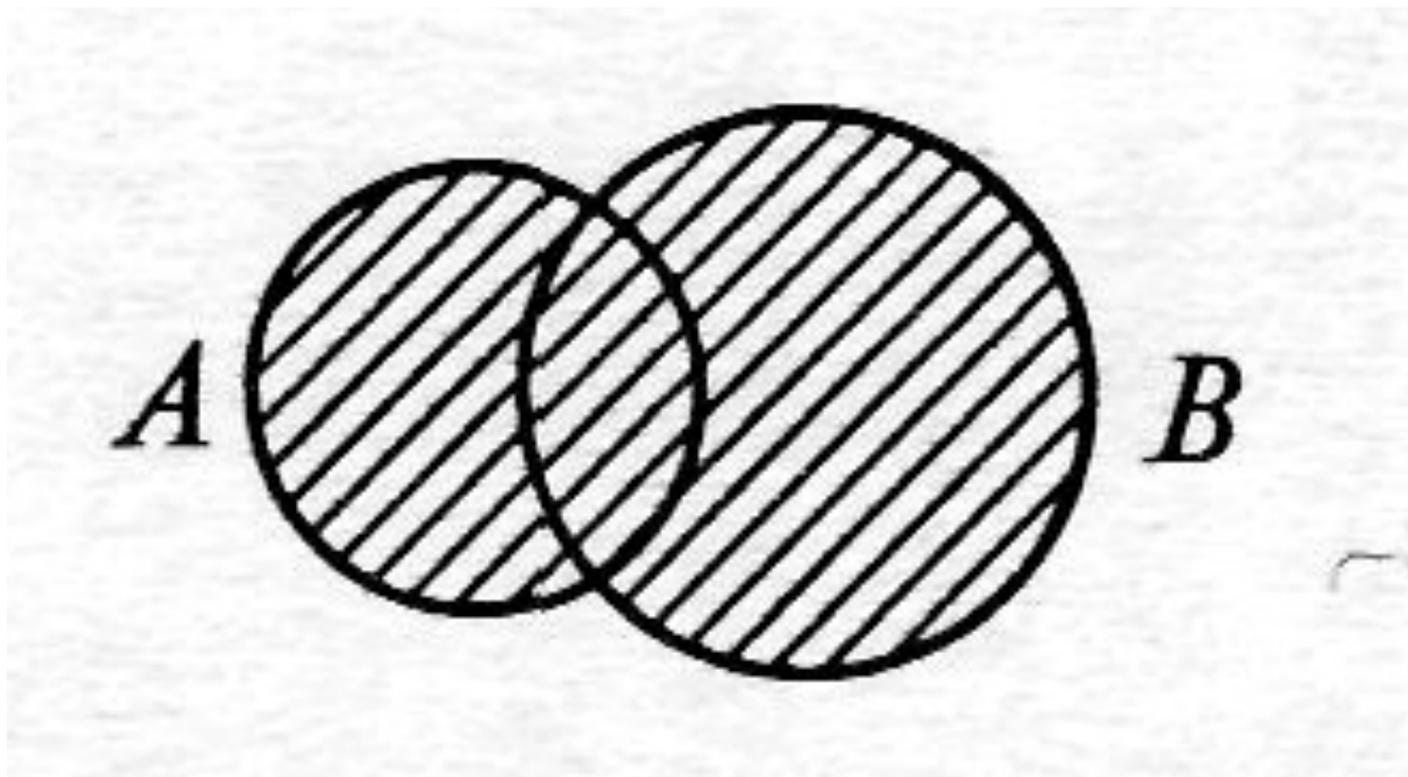
Пересечение множеств

Те и только те элементы, которые принадлежат **одновременно** A и B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Объединение множеств

$A \cup B$



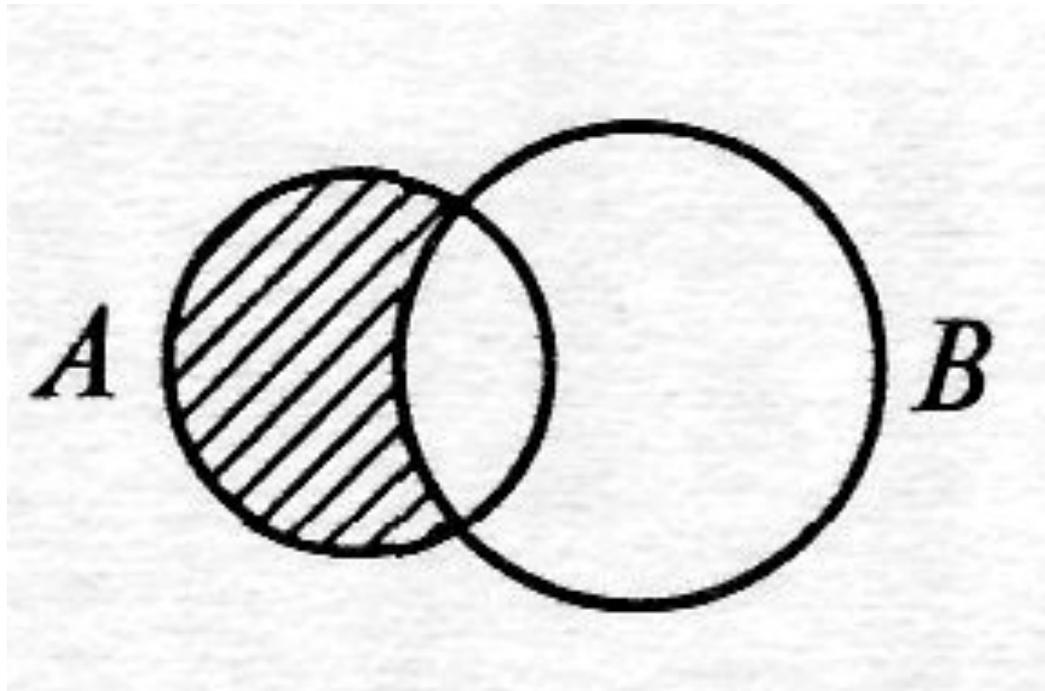
Объединение множеств

Те и только те элементы, которые
принадлежат
хотя бы одному из множеств A
и B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Разность множеств

$$A \setminus B$$



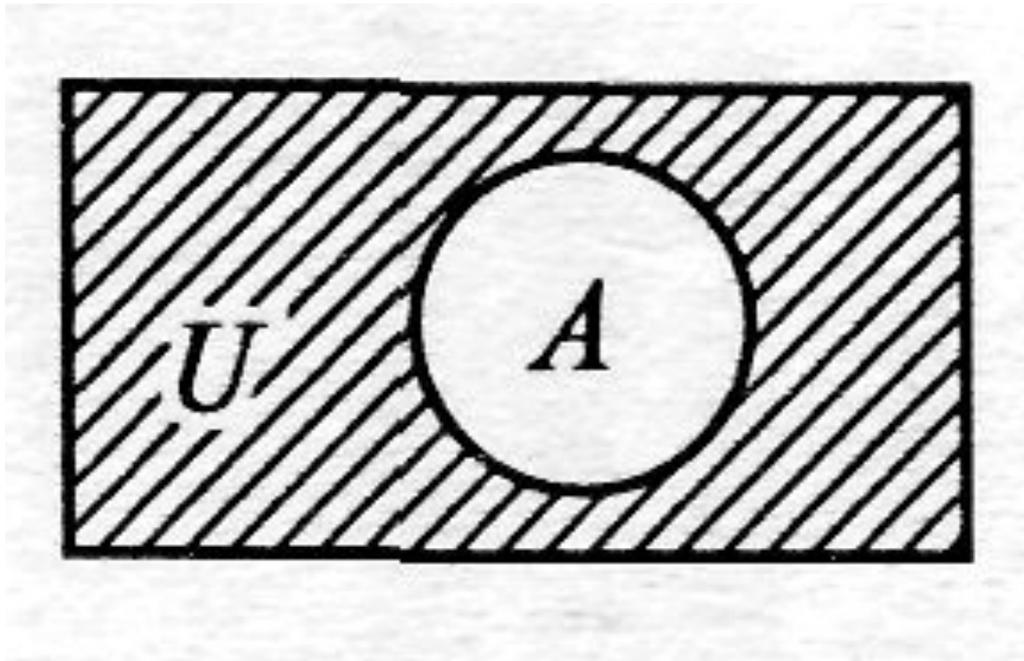
Разность множеств

Те и только те элементы множества A , которые не принадлежат B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Дополнение к множеству

$\neg A$



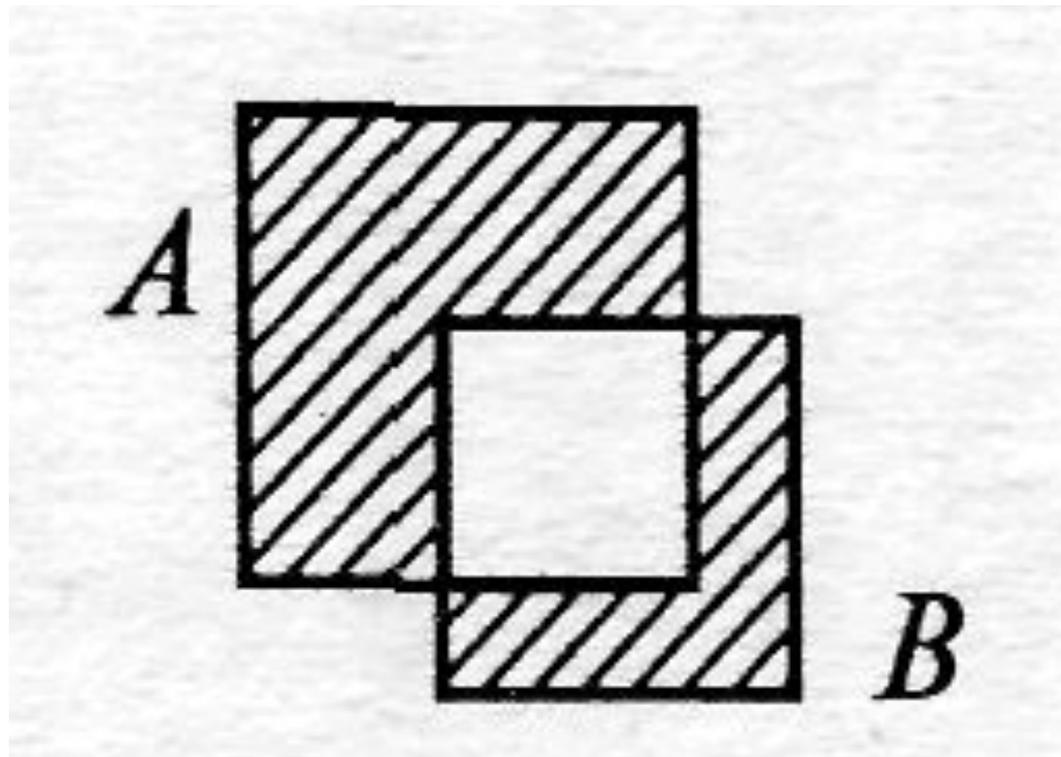
Дополнение к множеству

Те и только те элементы, которые **не** принадлежат множеству A

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$$

Симметрическая разность

$A \Delta B$



Симметрическая разность

Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: *A* либо *B*, но не являются их общими элементами

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

2. Свойства операций над множествами.

1. $A \cup B = B \cup A$ коммутативность

2. $A \cap B = B \cap A$ коммутативность

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ассоциативность

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ассоциативность

5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

дистрибутивность

6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

дистрибутивность

2. Свойства операций над множествами.

7. $A \cup A = A$

8. $A \cap A = A$

9. $A \cup (A \cap B) = A$ закон поглощения

10. $A \cap (A \cup B) = A$ закон поглощения

11. $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ закон де Моргана

12. $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ закон де Моргана

13. $A \cup \neg A = U$

2. Свойства операций над множествами.

14. $A \cap \bar{A} = \emptyset$

15. $A \cup \emptyset = A$

16. $A \cap \emptyset = \emptyset$

17. $A \cup U = U$

18. $A \cap U = A$

19. $\bar{U} = \emptyset$

20. $\bar{\emptyset} = U$

21. $\bar{(\bar{A})} = A$ закон двойного отрицания

Разбиение множества

Разбиение множества U - такая система непустых подмножеств $\{A_a\}$

множества U , что

их объединение равно U (*полнота разбиения*),

а все попарные пересечения - пусты (*чистота разбиения*).

Сами A_a называются **классами, или блоками, разбиения.**

3. Декартово произведение множеств.

**Декартовым (прямым) произведением
множеств называется**

- 1) для двух множеств A, B : произведение $A \times B$ - множество всех пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$;

3. Декартово произведение множеств.

2) для n множеств A_1, A_2, \dots, A_n :
произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ -
множество всех векторов
 (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $a_i \in A_i$
(т.е. $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$);

3. Декартово произведение множеств.

если все A_i **одинаковы** и равны A ,
то произведение $A \times A \times \dots \times A$
обозначается A^n и
называется n -й степенью
множества A .

$$A \times A \times \dots \times A = A^n$$

Что вы сегодня узнали на уроке?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

