

**Обработка результатов измерений  
при прямых однократных измерениях.  
Математические методы  
планирования и анализа активного  
эксперимента.**

**Вопросы:**

- 1. Обработка результатов наблюдений при прямых однократных измерениях.**
- 2. Математические методы планирования и анализа активного эксперимента. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения погрешностей эксперимента.**
- 3. Проверка гипотезы о воспроизводимости опытов. Проверка гипотезы о воспроизводимости с помощью критерия Кочрена. Проверка гипотезы с помощью критерия Бартлетта.**

# 1. Обработка результатов наблюдений при прямых однократных измерениях.

Прямые однократные измерения имеют наибольшее распространение в измерительной технике, быту, медицинской практике проведения биохимических анализов с целью постановки предварительного анализа и во всех случаях, где однократное измерение может дать представление об измеряемой величине.

При однократных измерениях показание приборы  $x_i$  принимают равным результату измерения, при этом трудоемкость и время измерения существенно уменьшаются.

Однократные измерения с точки зрения соотношения случайных и систематических погрешностей целесообразны тогда, когда сходимость результатов измерений высока, а появление систематической погрешности неизбежно.

Таким образом, однократные измерения применимы в том случае, если среднее квадратичное отклонение СКО результатов наблюдений, выполненных в одинаковых условиях (а именно СКО является параметром сходимости) близко к нулю.

- Тогда результаты отдельных наблюдений практически совпадают и, следовательно, среднее арифметическое значение результатов наблюдений и его математическое ожидание практически равны между собой, т. е. выполняется условие  $\bar{X} \cong M(x)$ . Что означает, что случайная погрешность пренебрежительно мала и нет необходимости в выполнении повторных наблюдений.

За результат однократного измерения принимается значение величины, полученное при измерении (после исключения систематической погрешности). Отличие результата измерения от наблюдения состоит в том, то последний содержит в себе погрешности (как систематические, так и случайные), отсутствуют границы (доверительные) в пределах которых следует ожидать нахождения истинного (действительного) значения случайной величины.

Оценка погрешности результата вычисляется предварительно по известным оценкам составляющих погрешности. Все составляющие рассматриваются как случайные величины, каждая из которых подчиняется своим законам распределения. Суммарная погрешность результата измерения имеет распределение как композиция из составляющих распределений.

- Аналитическое решение такой задачи трудоемко и становится практически неразрешимой уже для 3-4 составляющих. Поэтому для оценки погрешности однократного прямого измерения пользуются приближенными методами, т. е. речь идет о приближенном оценивании погрешности результата.

Чтобы оценить суммарную погрешность результата, необходимо провести тщательный предварительный анализ всех влияющих факторов (погрешность СИ, метода, субъективная погрешность и др.). По своему проявлению они могут быть отнесены к неисключенным систематическим и случайным погрешностям.

Неисключенные систематические погрешности, если их доверительные границы заданы разными вероятностями, суммируются по формуле (без учета знака):

$$\theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{k_i}}$$

где  $k_i$  – коэффициент, соответствующий доверительной вероятности, который может принимать значения:  $k_i = 0,95$  при  $P = 0,90$ ;  $k_i = 1,1$  при  $P = 0,95$  и  $k_i = 1,4$  при  $P = 0,99$ .

● Если неисключенные систематические погрешности определены при одинаковой доверительной вероятности, то формула суммирования имеет вид формулы

$$\Delta = \theta = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N \theta_i^2}.$$

Если случайные составляющие погрешности заданы доверительными границами, полученными с разными вероятностями, то случайная погрешность прямого измерения определяется по формуле:

$$\Delta = \pm z_{p/2} \cdot S_{\bar{X}},$$

$$\text{где } S_{\bar{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\Delta_i}{z_{p_i/2}} \right)^2};$$

$z_{p/2}$  – верхняя квантиль интегральной функции нормированного распределения Лапласа, отвечающая вероятности  $\frac{P}{2}$  (значение квантилей указаны в таблице 1).

● Таблица 1.

P	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$Z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

В случае одинаковой вероятности задания границ случайных погрешностей формула преобразуется к виду:

$$\Delta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta_i^2}.$$

Следует отметить, что правило суммирования случайных погрешностей справедливо для широкого класса распределений (от Лапласа до равномерного) при доверительной вероятности  $P = 0,90$ . При других  $P$  оценка суммарной погрешности является приближенной.

Если известны по предварительным исследованиям СКО составляющих случайных погрешностей, то доверительная граница суммарной случайной погрешности находится по формуле:

$$\Delta = \pm Z_{p/2} \cdot S_{\bar{x}},$$

где  $S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m S_{\bar{x}_i}^2}$ .

- Граница основной абсолютной погрешности измерительной системы при предположении об их нормальном распределении вычисляется по формуле:

$$\Delta_c = \pm \sqrt{\Delta_{\partial}^2 + \Delta_n^2 + \sum_{i=1}^{m-2} \Delta_i^2},$$

где  $\Delta_n$  – основная абсолютная погрешность прибора;

$\Delta_{\partial}$  – основная абсолютная погрешность измерительного преобразователя (датчика);

$\Delta_i$  – абсолютная погрешность других элементов измерительной системы.

Напомним, что средство измерения в общем случае представляет собой некоторую систему, состоящую из преобразователей, блоков усиления, сравнения, фильтрации, вывода и каналов интерфейса.

Измерительные каналы или системы включают в себя средства измерения, средства преобразования и др.

- Если на основе проведенной метрологической аттестации измерительной системы установлены абсолютные погрешности каждого из ее элементов, соответствующие остальным значениям диапазона измеряемой величины, то основная абсолютная погрешность системы, соответствующая этим отдельным значениям диапазона, определяется по формуле:

$$\Delta_c = \pm (\Delta_{\partial} + \Delta_n + \sum_{i=1}^{m-2} \Delta_i).$$



## **2. Математические методы планирования и анализа активного эксперимента.**

Обработку результатов активного эксперимента осуществляют на основе регрессионного анализа. Для использования регрессионного анализа необходимы следующие предпосылки:

а) ошибки эксперимента должны быть распределены по нормальному закону;

б) опыты должны быть воспроизводимы.

Следовательно, перед выполнением активного эксперимента необходимо провести предварительные серии опытов на изучаемом объекте, чтобы выявить наличие или отсутствие этих предпосылок.

## 2.1. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения погрешностей эксперимента.

Существует несколько способов проверки гипотезы о нормальном законе распределения ошибок эксперимента. Для этой цели часто используют  $W$ -критерий. Статический критерий  $W$  (критерий согласия Шапиро-Уилка) предназначен для двух статических моделей (нормальной и экспоненциальной). Он является более мощным, т. е. обеспечивает большую вероятность исключить неправильную гипотезу (модуль) по сравнению с критерием  $\chi^2$  (хи-квадрат). В таком случае требуется от 3 до 50 параллельных опытов, выполненных в одинаковых условиях.

Проверка нулевой гипотезы о принадлежности неизвестного экспериментального закона распределения погрешностей эксперимента теоретическому нормальному закону осуществляется в следующей последовательности:

а) результаты опытов располагают в виде неубывающей последовательности:

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_k,$$

где  $k$  – число параллельных опытов;

- б) вычисляют значение величины:

$$S^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^k y_i^2 - \frac{1}{k} \cdot (\sum_{i=1}^k y_i)^2;$$

- г) вычисляют значение величины по формуле:

$$b = a_k \cdot (y_k - y_1) + a_{k-1} \cdot (y_{k-1} - y_2) + \dots + a_{k-l+1} \cdot (y_{k-l+1} - y_l) = \\ = \sum_{i=1}^l a_{k-i+1} (y_{k-i+1} - y_i),$$

где значения коэффициентов  $a_{k-i+1}$  для  $i = 1 \dots l$  берут из таблицы справочного пособия (для  $l = 3 \dots 50$ ). Если  $k$  - четное число, то принимают  $l = \frac{k}{2}$ , а если  $k$  - нечетное, то  $l = \frac{(k-1)}{2}$  (в этом случае  $y_{l+1}$  не используется при вычислении);

- д) находят расчетное значение  $W$ -критерия по формуле:

$$W_p = \frac{b}{S^2}$$

е) при определенном уровне значимости  $q$  (обычно  $q = 0,05$ ) проверяют выполнение условия:

$$W_p \geq W_q,$$

где  $W_q$  – критическое значение критерия, взятое из таблицы справочного пособия.

Если это условие выполнено, то гипотезу о справедливости нормального закона распределения погрешностей эксперимента принимают.

### 3. Проверка гипотезы о воспроизводимости опытов.

#### 3.1. Проверка гипотезы о воспроизводимости с помощью критерия Кочрена.

Для проверки гипотезы о принадлежности двух выборочных дисперсий одной генеральной совокупности (их однородности), а, следовательно, и равноточности серий измерений (показатель воспроизводимости опытов в эксперименте) используется критерий Кочрена.

Для проверки гипотезы с помощью критерия Кочрена необходимы результаты нескольких серий параллельных опытов. В каждой из них количество опытов должно быть одинаково. Обычно число серий не велико — 2 ÷ 3. Количество опытов в серии также может быть небольшим — 2 ÷ 3.

Результаты эксперимента помещают в таблицу 2.

- Таблица 2 – Эксперимент для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов по критерию Кочрена.

Номер серии опытов	Результаты параллельных опытов					
1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$	$y_1$	
2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$	$y_2$	
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
j	$y_{j1}$	$y_{j1}$	...	$y_{jk}$	$y_j$	
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	....
...	...	...	...	...	...	...
N	$y_{N1}$	$y_{N1}$	...	$y_{Nk}$	$y_N$	

Для каждой серии параллельных опытов вычисляют среднее арифметическое значение функции отклика:

$$y_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k y_{ji},$$

- где  $j$  – номер серии;  
 $i$  – номер опыта в серии;  
 $k$  – число параллельных опытов.

Далее рассчитывают оценки дисперсий для всех серий опытов, пользуясь формулой:

$$S_j^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (y_{ji} - \bar{y}_i)^2.$$

Результаты вычислений заносят в таблицу 2.

Расчетное значение критерия Кочрена представляет собой отношение наибольшей из оценок дисперсий к сумме всех найденных оценок дисперсий:

$$G_p = \frac{\max S_j^2}{\sum_{j=1}^N S_j^2}$$

Критическое значение критерия Кочрена  $G$  находят в таблице справочного пособия.

- Гипотезу о воспроизводимости опытов принимают, если выполнено условие:

$$G_p \leq G.$$

В этом случае оценки дисперсий всех серий проведенных опытов считаются однородными, т. е. принадлежащими к одной генеральной совокупности.

На основании однородных оценок дисперсий вычисляют величину, называемую оценкой дисперсией воспроизводимости опытов, по формуле:

$$S_j^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N S_j^2.$$

С нею связано число степеней свободы, вычисляемое по формуле:

$$f_y = N \cdot (k - 1).$$

Оценка дисперсии воспроизводимости используется при анализе результатов активного эксперимента для проверки статистических гипотез о значимости коэффициентов регрессии и об адекватности уравнения регрессии.



### 3.2. Проверка гипотезы с помощью критерия Бартлетта.

Характеристикой воспроизводимости результатов серий (групп) измерений как в предыдущем случае является их выборочные дисперсии.

Воспроизводимость и сходимость являются показателями прецизионности измерений и количественно выражаются через межгрупповую и внутригрупповую дисперсию.

Гипотеза о равенстве нескольких выборочных дисперсий (для нескольких серий измерений), т. е. их однородности, характеризует воспроизводимость (т. е. степень близости друг друга) результатов измерений, полученных в разных условия.

Критерий Бартлетта используется для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов в тех случаях, когда имеются результаты нескольких серий параллельных опытов, однако число опытов в этих сериях разное. Экспериментальные данные, используемые для проверки гипотезы, помещают в таблицу 3.

Для каждой серии опытов вычисляется среднее арифметическое значение по формуле

$$y_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k y_{ji}.$$

- Оценку дисперсии для каждой серии параллельных опытов вычисляют по формуле

$$S_j^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (y_{ji} - \bar{y}_i)^2.$$

Таблица 3 – Эксперимент для проверки гипотезы о воспроизводимости опытов по критерию Бартлетта.

Номер серии опытов	Результаты параллельных опытов					
	1-й опыт	2-й опыт	...			
1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$k_1 - 1$	$y_1$	
2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$k_2 - 1$	$y_2$	
...	...	...	...	...	...	...
N	$y_{N1}$	$y_{N2}$	...	$k_N - 1$	$y_N$	

С каждой из этих оценок дисперсий связано число степеней свободы:

$$f_j = k_j - 1.$$

Результаты вычислений вносят в таблицу 3.

- Далее рассчитывают средневзвешенную оценку дисперсии по формуле:

$$S_{CB}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j \cdot S_j^2)}{\sum_{j=1}^N f_j}.$$

Для упрощения дальнейших расчетных формул введем в рассмотрение величину:

$$f = \sum_{j=1}^n f_j,$$

с помощью которой рассчитывается вспомогательный коэффициент:

$$G = 1 + \frac{1}{3 \cdot (N-1)} \cdot \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f} \right).$$

Расчетное значение коэффициента Бартлетта вычисляется по формуле:

$$B = \frac{2,303}{c} \cdot \left( f \cdot \lg S_{CB}^2 - \sum_{j=1}^N f_j \cdot \lg S_j^2 \right).$$

- После этого проверяется выполнение условия:

$$B \leq \chi^2 [q \cdot (N-1)].$$

Значение  $B$  сравнивается со значением  $W$  - критерия для уровня значимости  $q$  и числа степеней свободы  $f = N - 1$ .

Если условие выполнено, то принимается гипотеза о воспроизводимости опытов.

В качестве оценки дисперсии воспроизводимости принимается величина  $S_{св}$ , с которой связано число степеней свободы  $f$ , определяемое по формуле

$$f = \sum_{j=1}^n f_j.$$