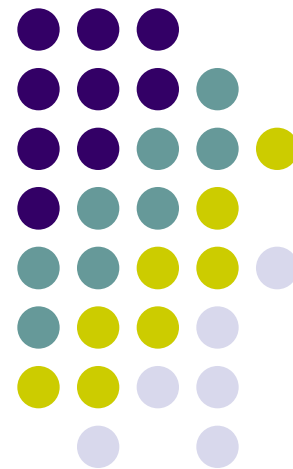


Презентация на тему «Векторы»

Работу выполнила
ученица 9 «Г» класса
школы-гимназии №5
Мартьянова Елена



1.1. Понятие вектора



Мы знаем, что есть 2 вида величин. Например, длина, площадь, объем, масса и прочие полностью определяются заданием своих численных величин. Такие величины называются скалярными величинами или просто скалярами.

Но многие физические величины, например, сила, давление, скорость, перемещение и т.д. характеризуются не только своим числовым значением, то и направлением в пространстве. Такие физические величины называются векторными величинами или просто Векторами. Например, если на какое-либо тело воздействовать определенной силой, то эта сила изображается направленным отрезком. Длина отрезка соответствует численной величине силы, а стрелка указывает на направление воздействия силы.

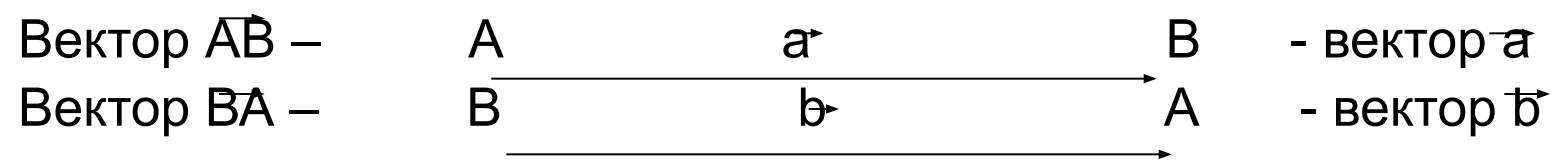


F





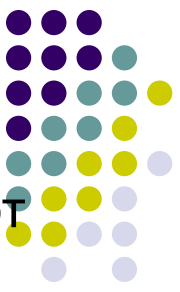
Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. В отличие от физических векторов, векторы в геометрии не имеют конкретной природы (т.е. не выражают силу, скорость и т.п.). Геометрические векторы рассматриваются просто как «направленные отрезки». Наприпер, любой отрезок имеет 2 конца. Назовем один из этих концов **начальной точкой**, или **началом**, а другой – **концом** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Конец вектора изображается стрелкой.



*Любой направленный отрезок называется **вектором**.*

В геометрии также рассматривают вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется **нулевым вектором**. Отсюда следует, что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается так: $\vec{0}$

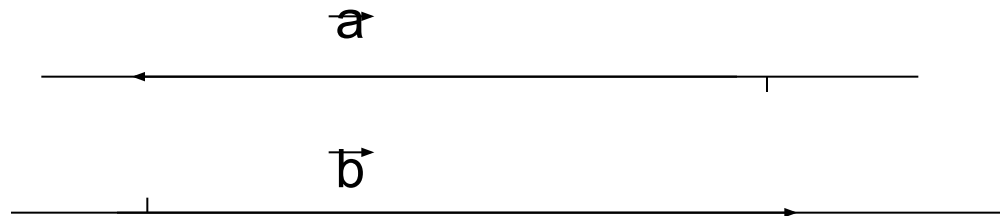
1.2. Равенство векторов



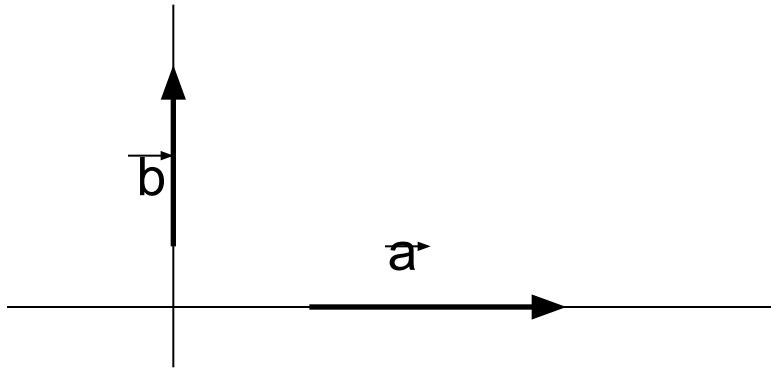
Длину отрезка AB называют *модулем* вектора \vec{AB} и обозначают так: $|\vec{AB}|$. Аналогично, модуль (длина) вектора \vec{a} также записывают через $|\vec{a}|$. Например, $|\vec{AB}| = 4$, $|\vec{c}| = 2$.

Если отрезок AB лежит на прямой a , то говорят, что вектор \vec{AB} также лежит на прямой a .

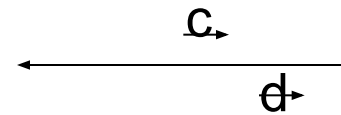
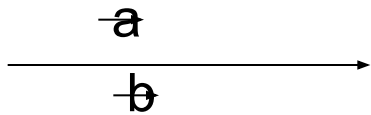
Если 2 вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие векторы называются **коллинеарными**. Коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{b} запишут так $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



Если векторы \vec{a} и \vec{b} лежат на перпендикулярных прямых, то их называют **перпендикулярными** (ортогональными) векторами и записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют **сонаправленными** векторами. Сонаправленность векторов \vec{a} и \vec{b} записывают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Если векторы \vec{c} и \vec{d} коллинеарны и имеют разные направления, то их называют **противоположно направленными** и записывают так: $\vec{c} \nabla \vec{d}$.



Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их модули равны. Иными словами, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то векторы \vec{a} и \vec{b} называются **равными**, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$.

1.3. Свойства равных векторов

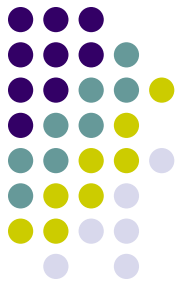
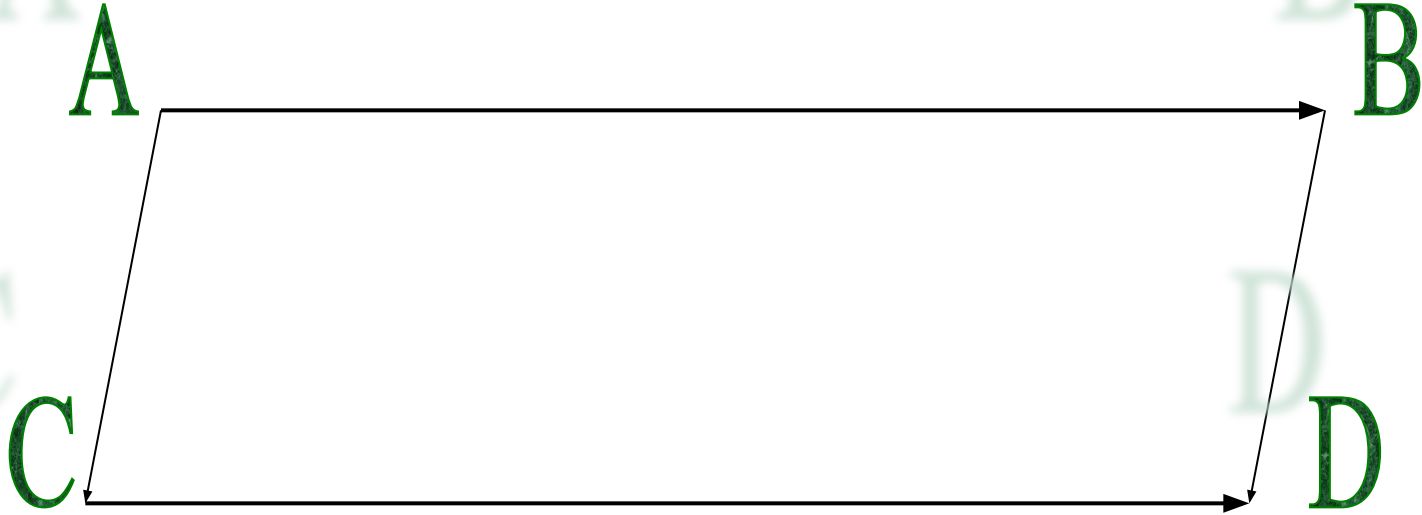


Теорема. *Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, наоборот, если векторы совмещаются параллельным переносом, то эти векторы равны.*

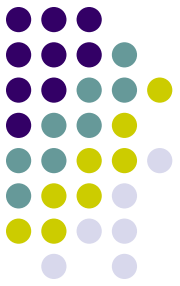
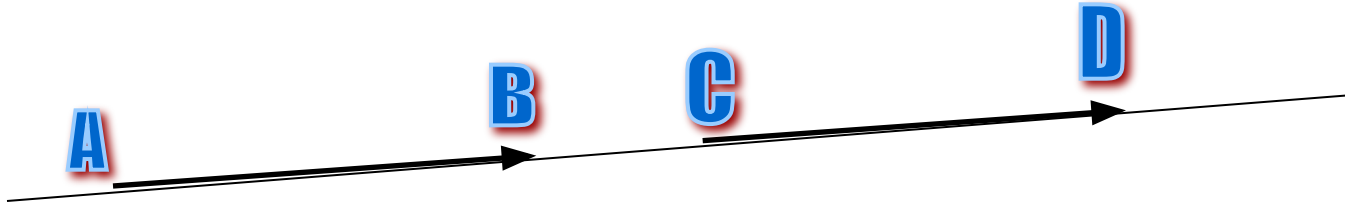
Доказательство. Пусть векторы \vec{AB} и \vec{CD} равны (см. след. слайд). Тогда по определению $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ и $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$, т.е. четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, т.к. противоположные стороны AB и CD параллельны и равны. Следовательно, $AC = BD$ и $AC \parallel BD$, т.е. $\vec{AC} = \vec{BD}$. Это значит, что векторы \vec{AB} и \vec{CD} можно совместить параллельным переносом. При этом точка $A \rightarrow$ точка C , а точка $B \rightarrow$ точка D .

Обратно, пусть векторы \vec{AB} и \vec{CD} совмещаются некоторым параллельным переносом и при этом точка A переходит в точку C , а точка B – в D . Тогда по определению параллельного переноса $AC = BD$ и $AC \parallel BD$, т.е. $ABCD$ – параллелограмм. Следовательно, $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$. Так как при параллельном переносе начало вектора \vec{AB} переходит в начало \vec{CD} , а конец \vec{AB} – в конец \vec{CD} , то $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$, т.е. $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Теорема доказана.

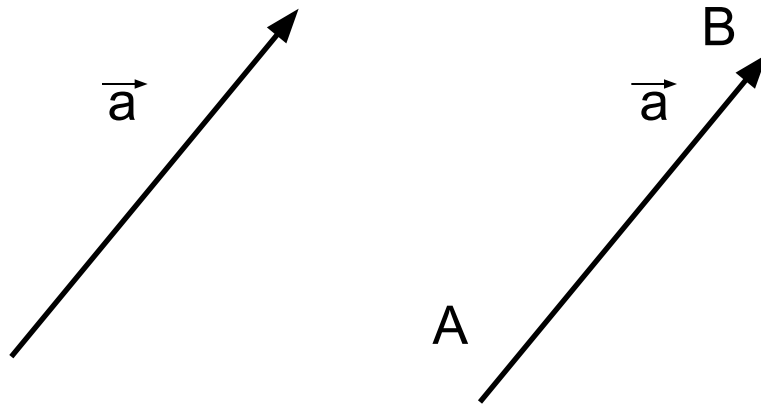


Следствие 1. Если $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{AC} = \vec{BD}$.



Если точка A является началом вектора \vec{a} , то говорят, что вектор \vec{a} отложен от точки A.

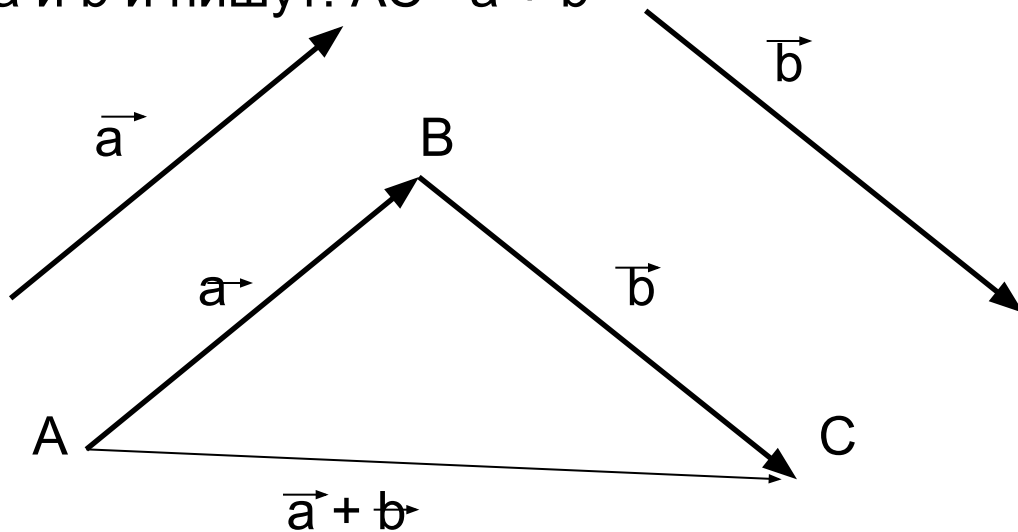
Следствие 2. От любой точки A можно отложить единственный вектор, равный данному вектору \vec{a} .



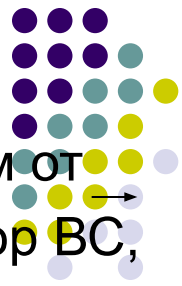
2. Сложение и вычитание векторов

2.1. Сложение векторов.

Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} , а от точки B отложим вектор \vec{BC} , равный вектору \vec{b} . Полученный вектор \vec{AC} называют **суммой** векторов \vec{a} и \vec{b} и пишут: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Такой способ получения суммы двух векторов называется **правилом треугольника** сложения векторов.



2.2. Свойства сложения векторов



Теорема 1. Для любых векторов a , b и c верно:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство. 1) Пусть векторы a и b не коллинеарны. От некоторой точки A плоскости отложим векторы $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$. Тогда получим параллелограмм $ABCD$. По правилу треугольника $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично, $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

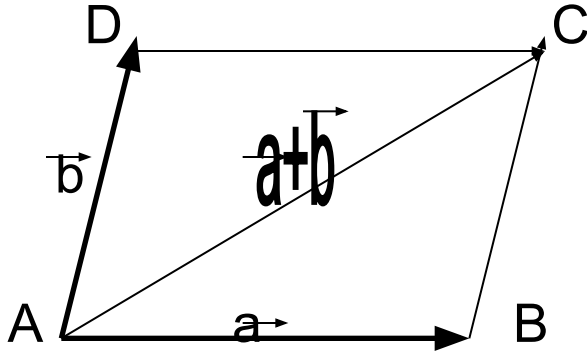


Рис. 1

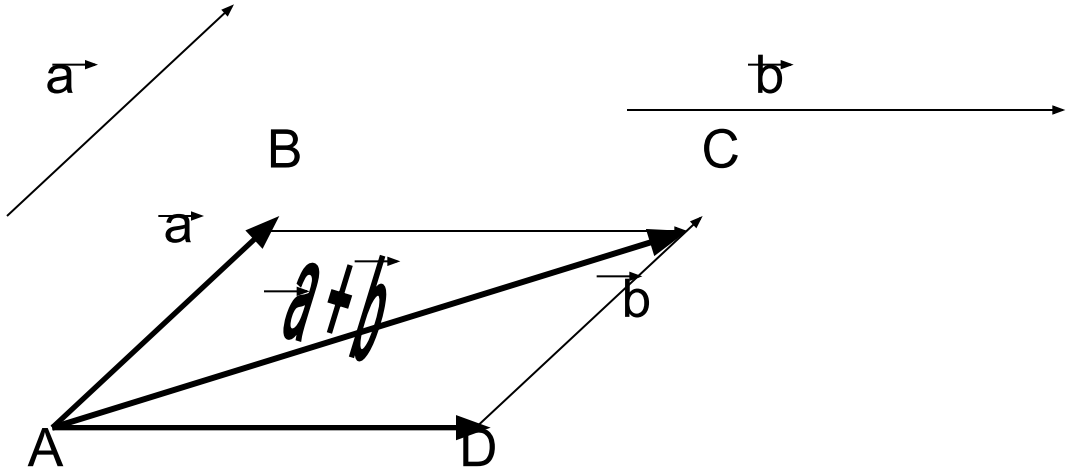


Векторы можно складывать и по **правилу параллелограмма**.

Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор \vec{AB} , равный вектору a, и вектор \vec{AD} , равный вектору b.

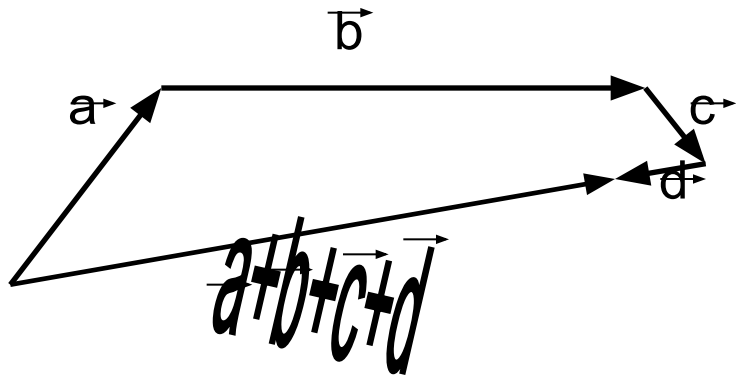
Из этого достроим параллелограмм ABCD так, что $\vec{AB}=\vec{DC}$, а $\vec{AD}=\vec{BC}$.

Построим вектор \vec{AC} , который будет также являться диагональю ABCD, и будет суммой векторов \vec{a} и \vec{b} .



Для нахождения суммы нескольких векторов есть **правило многоугольника** или **правилом последовательного складывания векторов**. Его суть заключается в том, что мы нужное количество векторов в заданной последовательности соединяем конец одного вектора с началом следующего. Когда все векторы будут соединены, то мы строим вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего. Этот вектор и будет суммой.

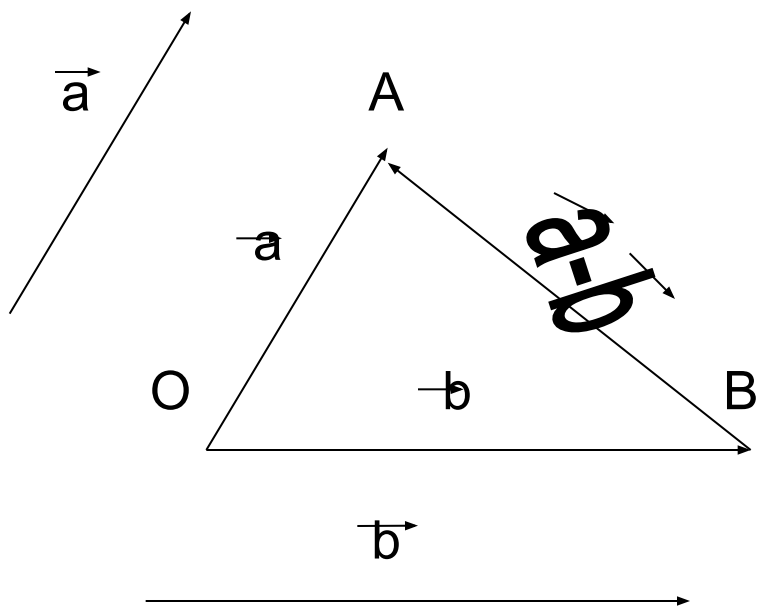
Например: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = ?$



2.3. Разность векторов

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, который в сумме с вектором \vec{b} равен вектору \vec{a} . Разность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

От некоторой точки O откладываем векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Тогда вектор \vec{BA} равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Так как $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$, то $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.



3.1. Умножение вектора на число и его свойства



Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число K называется вектор, модуль которого равен числу $|K| \cdot |\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором \vec{a} при $K > 0$, противоположно направлен с вектором \vec{a} при $K < 0$. Произведение числа K на вектор \vec{a} записывают так: $K \cdot \vec{a}$.

Если $K=0$, то $0 \cdot \vec{a} = 0$.

Теорема. Для любых чисел α, β и любых векторов \vec{a}, \vec{b} верно равенство:

1. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (сочетательный закон);
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (I распределительный закон);
3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (II распределительный закон).

Доказательство 1. Если $\alpha\beta > 0$, т.е. числа α и β имеют одинаковые знаки, то вектор $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены, а если числа α и β имеют разные знаки, то векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ противоположно направлены. Поэтому при любых α, β векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены. Теперь осталось показать равенство их модулей:

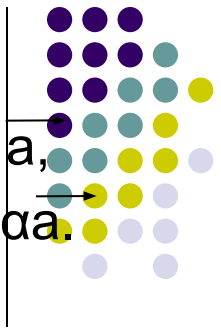
$$\underline{|(\alpha \cdot \beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| \cdot |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}| \text{ и } |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha| |\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|.}$$

Следовательно, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

3.2. Признак коллинеарности векторов

Теорема. Чтобы вектор \vec{b} был коллинеарен ненулевому вектору \vec{a} , необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

Следствие. Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB , необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$.



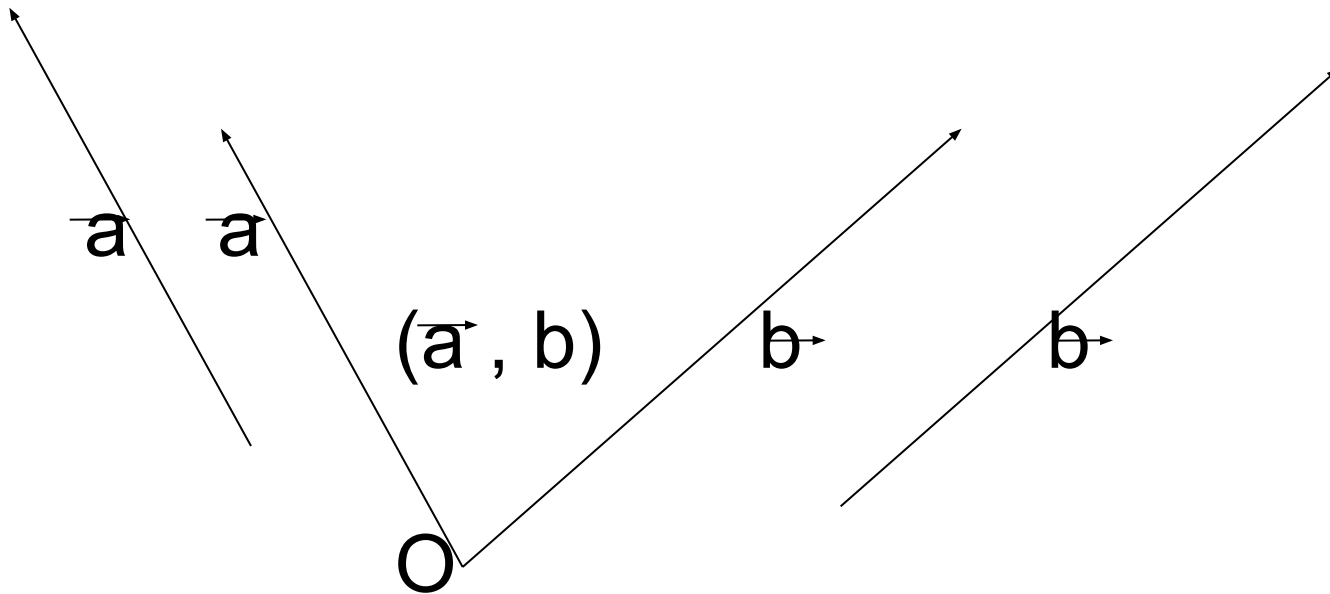
4.1. Понятие угла между векторами.



Углом между векторами \vec{AB} и \vec{AC} называется **угол** BAC . Углом между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} обозначают через (\vec{a}, \vec{b}) .

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0° , а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180° .



4.2. Скалярное произведение векторов



Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a, b})$.

$$\varphi = (\widehat{a, b}). \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярное произведение равных векторов называется **скалярным квадратом** этого вектора и обозначается через \vec{a}^2 .

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} верно равенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} любого действительного числа α верно равенство

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} верно равенство

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

5. Координаты вектора

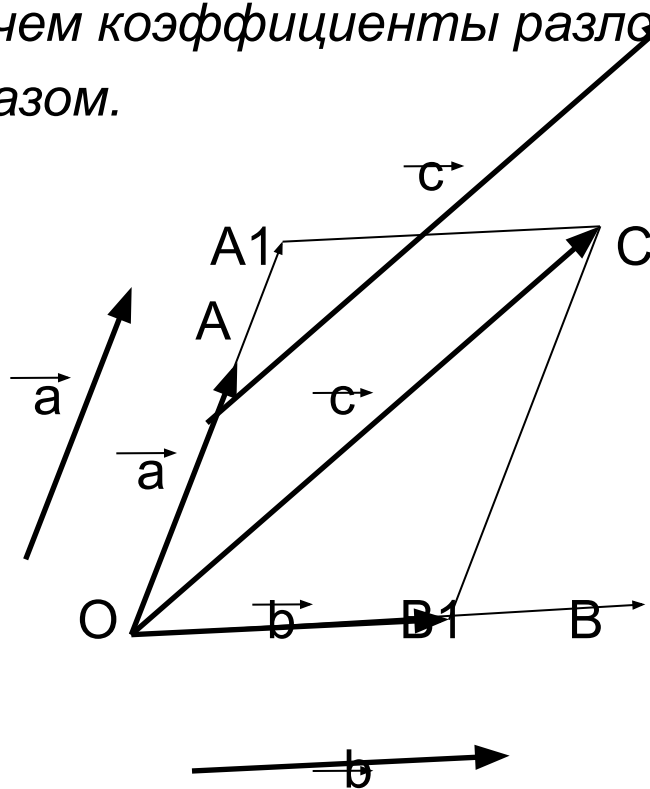
5.1. Разложение любого вектора по двум неколлинеарным векторам



Теорема. Если ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то для любого вектора \vec{c} найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

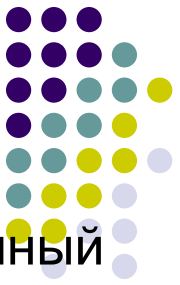
причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.





Из этой теоремы вытекает, что любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие 2 неколлинеарных вектора, то они называются **базисными векторами** плоскости. Итак, любые 2 неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. А действительные числа x и y называются **координатами вектора** \vec{c} в базисе \vec{a}, \vec{b} .

5.2. Координаты вектора в прямоугольной системе координат.



Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy . Пусть \vec{i} – единичный вектор, сонаправленный с осью Ox , а \vec{j} – единичный вектор, сонаправленный с осью Oy . Эти векторы называют **координатными векторами**. Так как векторы \vec{i} и \vec{j} не коллинеарны, то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда для любого вектора \vec{a} плоскости Oxy найдутся единственные действительные числа x и y такие, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Здесь числа x и y называются **координатами** вектора \vec{a} в прямоугольной системе координат Oxy , и это записывается так: $\vec{a} \equiv (x; y)$.

Некоторые свойства координат вектора:

1. У равных векторов соответствующие координаты равны: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $\vec{a} = \vec{b}$, то $x = u$ и $y = v$.

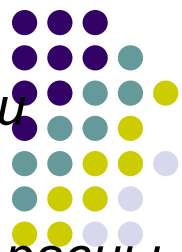
Обратно, векторы, у которых соответствующие координаты равны между собой: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $x = u$, $y = v$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x + u; y + v)$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (u\vec{i} + v\vec{j}) = (x + u)\vec{i} + (y + v)\vec{j}.$$

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, если $\vec{a} = (x; y)$ и λ - число, то $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x; \lambda \cdot y)$.

Следствие. Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов : если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то $\vec{a} - \vec{b} = (x - u; y - v)$.



5.3. Координаты вектора, заданного координатами концов. Радиус-вектор



Если на плоскости Oxy задана точка $A(x; y)$, то вектор \vec{OA} называется **радиус-вектором** точки A . Для радиус-вектора \vec{OA} верно равенство $\vec{OA} = (x; y)$, т.е. соответствующие координаты точки A и радиус-вектора \vec{OA} совпадают.

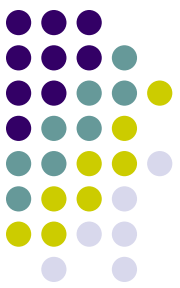
Пусть задан вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ и $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда выполняется равенство $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$, т.е. $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

6.Выражение скалярного произведения через координаты векторов

6.1.Координатный вид скалярного произведения



Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ определяется по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$.



6.2. Координатный вид коллинеарности и перпендикулярности векторов. Определение угла между векторами

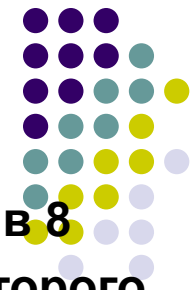
Если векторы $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Тогда имеем: $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Это и есть **условие перпендикулярности** ненулевых векторов.

С помощью формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$ можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Действительно, их формулы

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) \text{ находим, что } \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

7.1. Уравнение прямой. Направляющий вектор и вектор нормали прямой



Уравнение прямой можно задать различными способами. Например, в 8 классе мы определили прямую как серединный перпендикуляр некоторого отрезка. Теперь определим уравнение прямой с помощью векторов.

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{r} = (\alpha; \beta)$ (рис. 1. см. след. слайд). Тогда через точку M_0 параллельно вектору \vec{r} проходит одна и только одна прямая l . Точка M_0 называется **начальной точкой** прямой l , а вектор \vec{r} — **направляющим вектором** этой прямой. Если $M(x; y)$ является произвольной точкой прямой l , то $M_0M \parallel \vec{r}$. Здесь направляющий вектор $\vec{r} = (\alpha; \beta)$ не параллелен осям координат, т.е. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Используя условие коллинеарности векторов, \vec{r} и $M_0M = (x - x_0; y - y_0)$, получим уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

Пусть дана прямая l и вектор $n=(a;b)$. Если $l \perp n$, то n называется **вектором нормали** прямой l . Если прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и точка $M(x;y)$ – произвольная точка прямой l , то $M_0M \perp n$, т.е. $\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$. Тогда уравнение $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ является уравнением прямой l , заданной точкой $M_0(x_0; y_0)$ и вектором $n=(a;b)$ (рис.2)

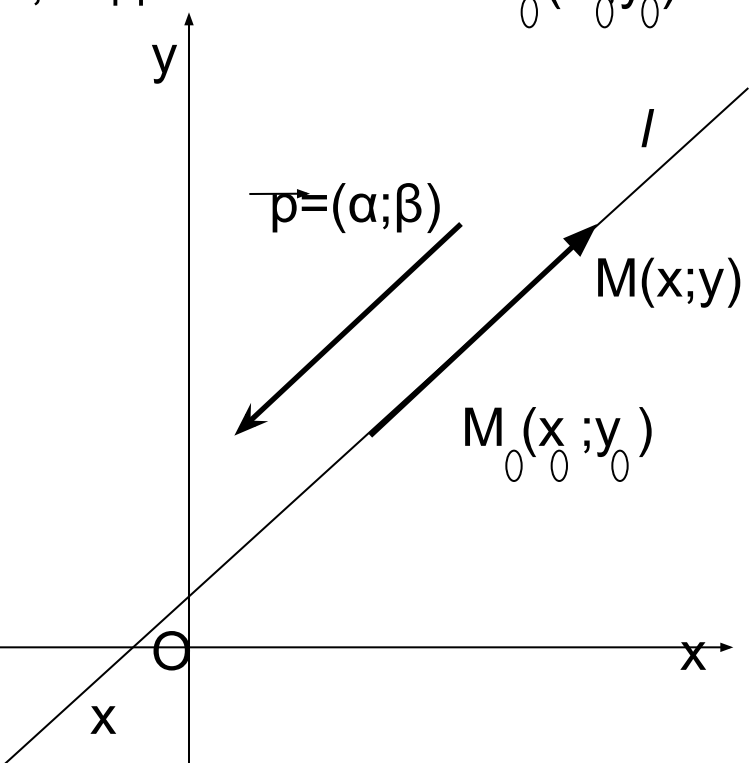
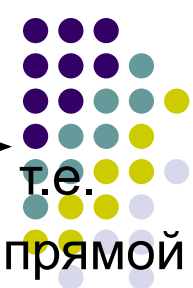


Рис. 1

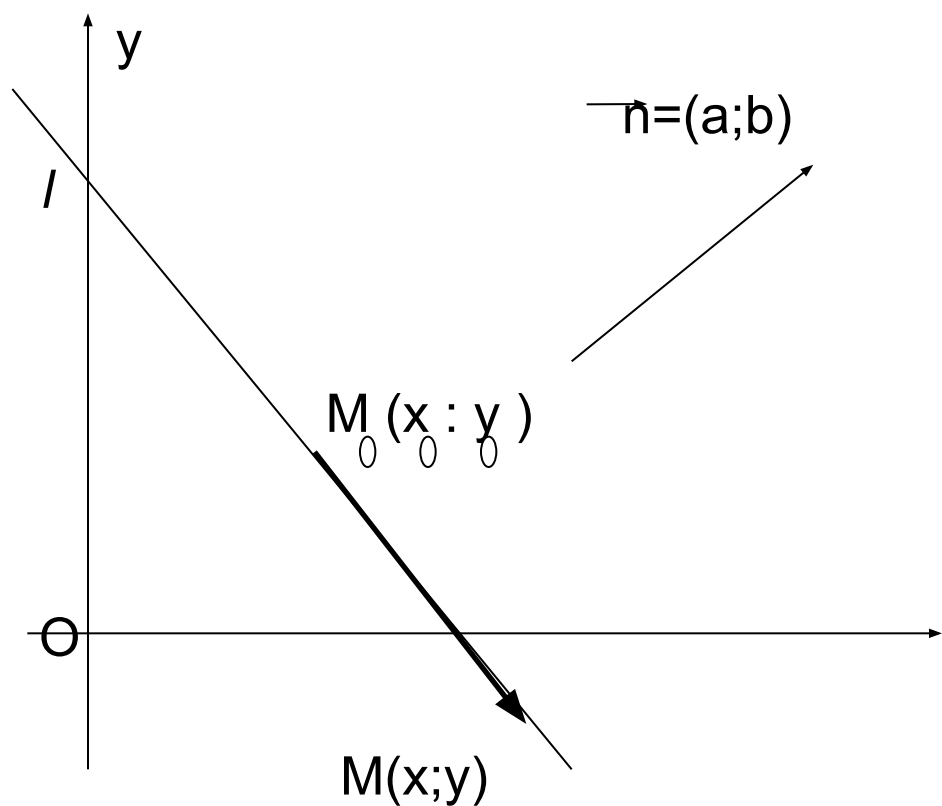


Рис. 2



**Спасибо
за
внимание!**