Сучасні методи наближення функцій багатьох змінних (інтерфлетація, інтерстріпація, інтерлокація.

Лекція 5

Українська інженерно-педагогічна академія

2

План лекції

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних.
2. Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на трьох площинах $x=a_1,\ y=a_2,\ z=a_3$.
3. Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на чотирьох площинах $x=x_1,\ x=x_2,\ y=y_1,\ y=y_2$.
4. Інтерстріпація функцій трьох змінних
5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації
6. Чисельні експерименти

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

3

Інтерфлетація функцій трьох змінних.

Нехай задана функція $u = f(x, y, z)$ двох змінних і система площин

$$\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$$

Слідом функції $u = f(x, y, z)$ на площині $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ називається функція двох змінних $f_k(x, y)$ або $f_k(y, z)$, або $f_k(x, z)$ яка в кожній точці цієї площини приймає такі ж значення , як і функція $u = f(x, y, z)$.

$$f(x, y, z)\big|_{\Pi_k} = f_k(x, y)\big|_{\Pi_k}$$

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

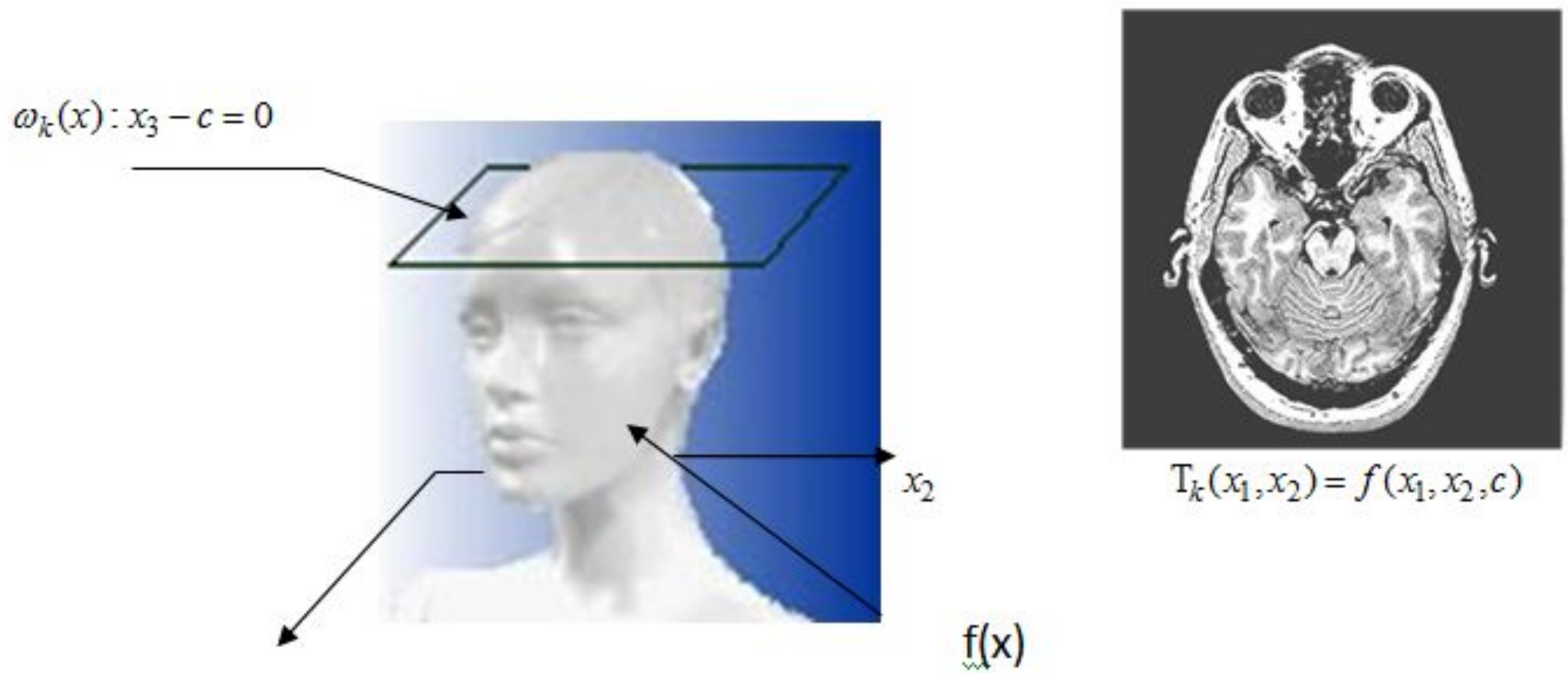


Рис. 1. Графічна ілюстрація поняття томограми

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

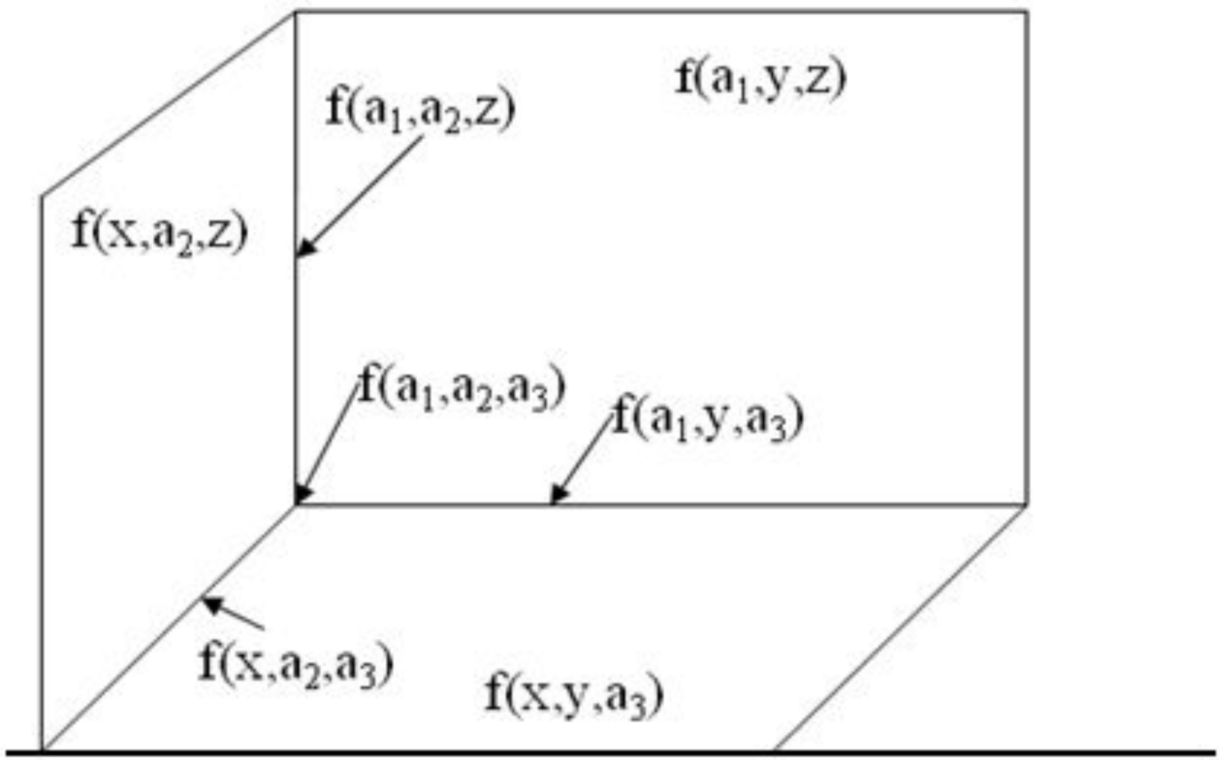
Інтерфлетацією функції $f(x,y,z)$ (від англ. *inter* – між, *flat*-площина) на системі площин $x = x_i,\ i=\overline{1,m}$; $y = y_j,\ j=\overline{1,n}$, $z = z_k, k=\overline{1,s}$ називається відновлення її за допомогою слідів $f(x_i,y,z),\ i=\overline{1,m}$, $f(x,y_j,z),\ l=\overline{1,n}$, $f(x,y,z_k),\ k=\overline{1,s}$

6

Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на трьох площинах $x=a_1,\ y=a_2,\ z=a_3$.

Оператор

$$O_3(x,y,z) = f(x,a_2,z) + f(a_1,y,z) + f(x,y,a_3) - f(a_1,a_2,z) - f(a_1,y,a_3) - \\ - f(x,a_2,a_3) + f(a_1,a_2,a_3)$$



7

Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на трьох площинах $x=a_1,\ y=a_2,\ z=a_3$.

має такі інтерфлетаційні властивості властивості:

$$O_3 f\big|_{x=a_1} = f(a_1,y,z),\quad O_3 f\big|_{y=a_2} = f(x,a_2,z),\quad O_3 f\big|_{z=a_3} = f(x,y,a_3).$$

При цьому справедлива тотожність $f(x,y,z)=O_3 f(x,y,z)+R_3 f(x,y,z)$,

$R_3 f(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z f^{(1,1,1)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 \xi_3$ – інтегральній вигляд похибки наближення.

Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на чотирьох площинах $x = x_1,\ x = x_2,\ y = y_1,\ y = y_2$.

УКРАЇНА UKRAINE

ПАТЕНТ

НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

№ 51126

СПОСІБ ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ТІЛА

Видано відповідно до Закону України "Про охорону прав на винаходи і корисні моделі".

Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 12.07.2010.

Голова Державного департаменту інтелектуальної власності М.В. Паладій

УКРАЇНА

(19) UA (11) 50348 (13) U

(51) МПК (2009) G01N 23/22

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ

ОПИС ДО ПАТЕНТУ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

(54) СПОСІБ ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ТІЛА

(19) UA (11) 50348 (13) U

Оператор інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ на чотирьох площинах $x = x_1,\ x = x_2,\ y = y_1,\ y = y_2$.

Оператор

$$O(x,y,z) = O1(x,y,z) + O2(x,y,z) - O12(x,y,z),$$

де

$$O1(x,y,z) = f(x_1,y,z)\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2,y,z)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$O2(x,y,z) = f(x,y_1,z)\cdot\frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f(x,y_2,z)\cdot\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$O12(x,y,z) = \left(f(x_1,y_1,z)\frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f(x_1,y_2,z)\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + \left(f(x_2,y_1,z)\frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f(x_2,y_2,z)\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

має такі інтерфлетаційні властивості властивості:

$$O f\big|_{x=x_i} = f(x_i,y,z),\quad O f\big|_{y=y_j} = f(x,y_j,z),\ i,j = 1,2$$

4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$ двох змінних і система смуг

$$D_k : \{y_k \le y \le y_{k+1}, \ x \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

Тут z – віддаль від деякої площини $z = 0$ до поверхні в точці (x, y)

.

Інтерстріпацією функції $f(x, y, z)$ (від англ. *inter* –між, *strip*-смуга) на системі смуг D_k називається відновлення її за допомогою слідів на смугах $f(x, y)\big|_{D_k}$.

4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Вважаємо, що нам задана система горизонтальних смуг

$$D2_l = \{\gamma_l \le y \le \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l = \overline{1,n},$$

а також система вертикальних смуг

$$D1_k = \left\{\alpha_k \le x \le \beta_k, y \in \left[\gamma_1, \delta_{n+1}\right]\right\}, k = \overline{1,m}.$$

Поверхня $z = f(x,y)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x,y)\big|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x,y), \alpha_k \le x \le \beta_k, \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1},$$

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x,y), \gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$$

5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації

Метод наближення	Тип використовуваної інформації
Інтерполяція функцій однієї або кількох змінних	Значення функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) у деяких заданих точках
Інтерлінація функцій двох або більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих лініях
Інтерфлетація функцій трьох і більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих поверхнях
Інтерстріпація функцій трьох і більше змінних	Функції $f_k(x,y), k=\overline{1,M}$, які збігаються з $f(x,y)$ на декількох заданих смугах $S_k = \{(x,y): w_{k1}(x,y) \geq 0, w_{k2}(x,y) \leq 0\}, k = \overline{1}$ $w_{k1}(x,y) \geq 0, w_{k2}(x,y)$ - задані функції. $f_k(x,y) = f(x,y), (x,y) \in S_k,\ k=\overline{1,M}$
Інтерлокація	Функції заданої гладкості і нормалізованості, нулями яких є локуси – області, які не перетинаються

6. Чисельні експерименти

Приклад 1. Нехай ми маємо фотографії двох смуг одного об'єкту F1 (Рис. 1) і F2 (Рис. 2).

F1

Рис. 1. Перша смуга

F2

Рис. 2. Друга смуга

F4

Рис. 3. Скомпонована матриця з даних смуг.

6. Чисельні експерименти

За допомогою інтерстріпації відновлюємо повне зображення F

F

Рис. 4. Відновлене зображення.

F3

Рис. 5. Оригінал зображення

6. Чисельні експерименти

Приклад 2. Аналогічно розглядається чисельна реалізація метода інтерстріпації між паралельними вертикальними смугами.

Маємо чотири смуги одного знімка, розташовані у певному порядку (рис. 6).

Рис. 6. Зображення смуг знімка, розташованих у певному порядку.

6. Чисельні експерименти

Рис. 7. Матриця С об'єднана з даних смуг, заданих у певному порядку.

За допомогою відповідних операторів інтерстріпації, відновлюємо повне зображення

Рис. 8. Відтворене зображення, за допомогою інтерстріпації (F) і реальне зображення (FN).

6. Чисельні експерименти

Приклад 3. Опишемо чисельну реалізацію інтерстріпації між взаємно перпендикулярними смугами.

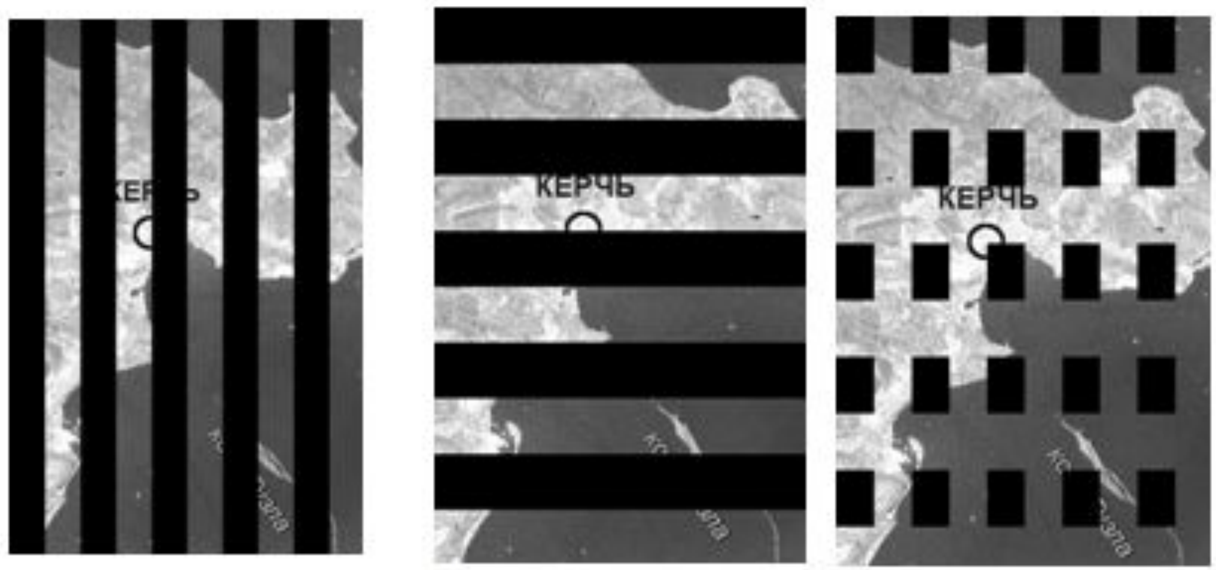


Рис. 9. Зображення матриць: а) з відомими вертикальними смугами (F1); б)з відомими горизонтальними смугами (F3); в) матриці об'єднання смуг.

6. Чисельні експерименти

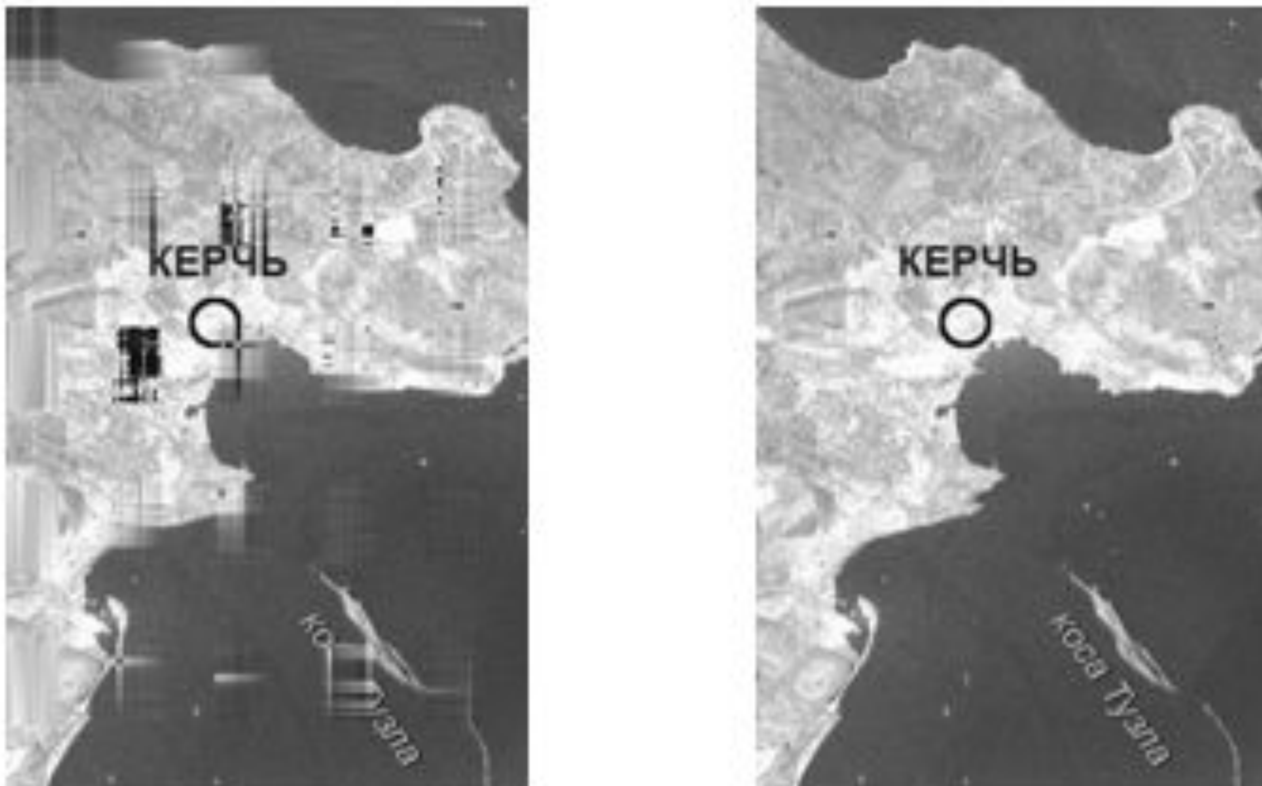


Рис. 10. Відновлене зображення F і оригінал FN.

6. Чисельні експерименти

Приклад 4. У наступному прикладі наведені результати відновлення поверхні об'єкта – Ейфелевої вежі, про яку відомо, що вона є розривною (Рис. 12).

а) б) в) г)

Рис. 12. а) оригінал зображення поверхні; б) зображення 5-ти горизонтальних смуг; в) зображення 5-ти вертикальних смуг; г) відновлене зображення поверхні за допомогою інтерстріпації ($N = 0$).