Методы оптимизации

Лекция № 3

Общая схема методов поиска минимума на отрезке

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a_0, b_0]$. Необходимо найти точку минимума функции на этом отрезке с заданной точностью ε. Все методы одномерного поиска базируются на последовательном уменьшении интервала, содержащего точку минимума.

Возьмем внутри отрезка $[a_0, b_0]$ две точки x_1 и x_2: $a_0 < x_1 < x_2 < b_0$, и вычислим значения функции в этих точках. Из свойства унимодальности функции можно сделать вывод о том, что минимум расположен либо на отрезке $[a_0, x_2]$, либо на отрезке $[x_1, b_0]$. Действительно, если $f(x_1) < f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[x_2, b_0]$, а если $f(x_1) > f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[a_0, x_1]$. Если же $f(x_1) = f(x_2)$, то минимум находится на интервале $[x_1, x_2]$.

Алгоритм заканчивается, когда длина интервала, содержащего минимум, становится меньше ε. Различные методы одномерного поиска отличаются выбором точек x_1, x_2. Об эффективности алгоритмов можно судить по числу вычислений функции, необходимому для достижения заданной точности.

Метод дихотомии

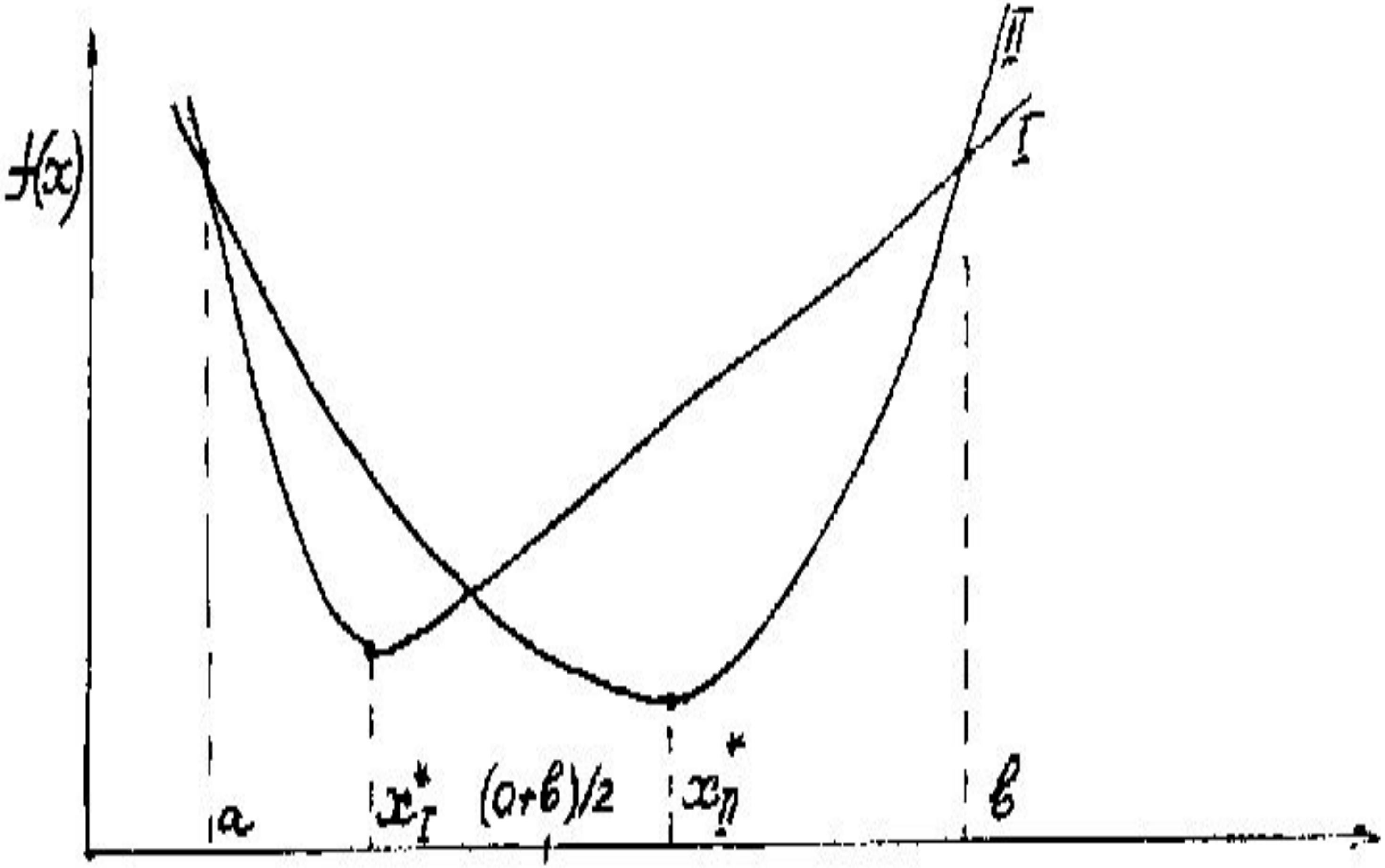
Необходимо найти $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ с точностью ε в предположении, что $f(x)$ унимодальна на $[a,b]$.

Т.е если x^* – точное решение задачи минимизации $f(x)$ на $[a,b]$, а $\tilde{a}$ - приближенное, то $|\tilde{a}-x^*|<C$

Суть метода заключается в последовательном уменьшении отрезка, покрывающего точку минимума.

Рассмотрим один шаг метода.

Точкой $\; - = (a+b)/2$ делим отрезок $[a,b]$ пополам, поскольку $f(x)$ унимодальна, то $f(c)<f(a)$ и $f(c)<f(b)$, однако точка минимума может оказаться как в левой, так и в правой части отрезка $[a,b]$.



f(x)
II
I
a
x*_I
(a+b)/2
x*_II
b

Внутри отрезка $[a,b]$ выберем две точки:

$$x_1 = (a+b)/2 - \delta/2; \quad x_2 = (a+b)/2 + \delta/2$$

где δ - параметр метода, $\delta < \varepsilon$.

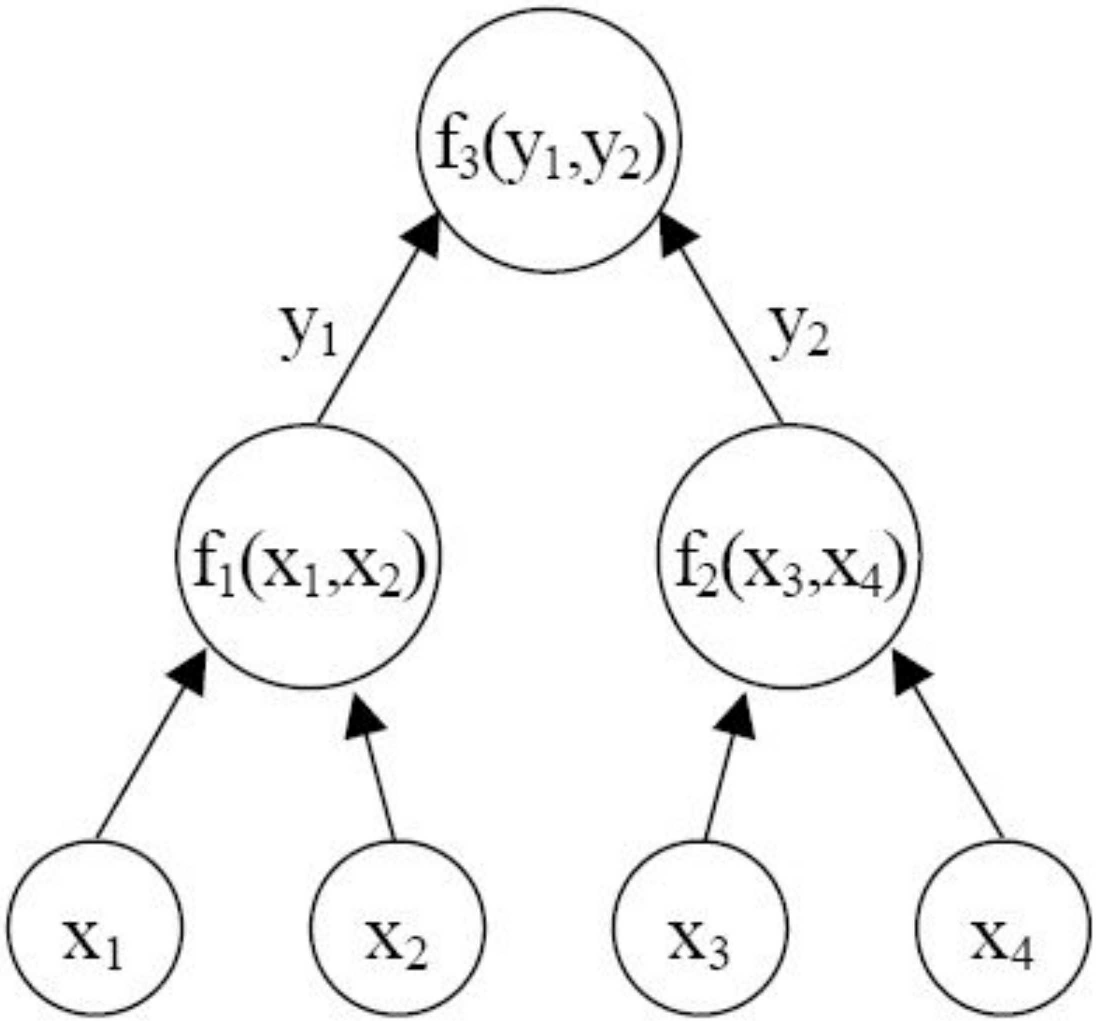
Точка минимума x попадет либо в отрезок $[a,x_2]$, либо в $[x_1,b]$.

Если $f(x_1) < f(x_2)$, то $x^* \in [a,x_2]$ не может в этом случае попасть в отрезок $[x_2,b]$, так как нарушилась бы унимодальность $f(x)$.

Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1,b]$.

Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $x^* \in [x_1,x_2]$. Но часто этот случай не выделяют отдельно, а включают знак равенства в один из выше рассмотренных случаев.

Метод дихотомического программирования (произвольное дерево)



Числа Фибоначчи

F_0	1
F_1	1
F_2	2
F_3	3
F_4	5
F_5	8
F_6	13
F_7	21
F_8	34
F_9	55

Метод Фибоначчи

Последовательность чисел $F_0 = F_1 = 1;\ F_{i+1} = F_i + F_{i-1},\quad i = 1, 2, \ldots$ называется последовательностью Фибоначчи.

Зададимся некоторым N и выпишем последовательность чисел Фибоначчи.

Итак, необходимо найти минимум $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с точностью ε.

Опишем 1-й шаг метода Фибоначчи.

Как и в предыдущем методе найдем $x_1 < x_2$ на отрезке $[a,b]$:

$$x_1 = a + \frac{F_{N-2}}{F_N} * (b-a); \qquad x_2 = b - \frac{F_{N-2}}{F_N} * (b-a)$$

Из формул видно, что x_1, x_2 симметричны относительно середины отрезка $[a,b]$.

Если $f(x_1) < f(x_1+\delta)$, то полагают, что $x^* \in [a^{N-1}, x_1+\delta]$,

в противном случае $x^* \in [x_1, b^{N-1}]$.

Посмотрим, как уменьшается отрезок неопределенности

$$b^1 - a^1 = \frac{F_{N-1}}{F_N}(b-a);$$

$$b^2 - a^2 = \frac{F_{N-1}}{F_{N-1}}(b^1 - a^1) = \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}} * \frac{F_{N-1}}{F_N}(b-a)$$

$$b^{N-1} - a^{N-1} = \frac{F_1}{F_N}(b-a) = \frac{b-a}{F_N}$$

Таким образом, $(N-1)$-й шаг метода Фибоначчи обеспечивает уменьшение длины отрезка неопределенности в F_N раз.

Необходимо заметить, что для решения задачи минимизации с заданной точностью ε необходимо решить неравенство $\dfrac{b-a}{F_N}+\delta<\varepsilon$ относительно F_N, получить последовательность чисел Фибоначчи $F_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{N-1}}, \mathrm{F}_{\mathrm{N}}$ и использовать ее с конца.

Метод золотого сечения

В теории чисел показано, что существует предел отношения соседних чисел Фибоначчи:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F_k}{F_{k-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,.$$

$F_k \,/\, F_{k-1}$ показывает, как соотносятся длины отрезков неопределенности при применении метода Фибоначчи.

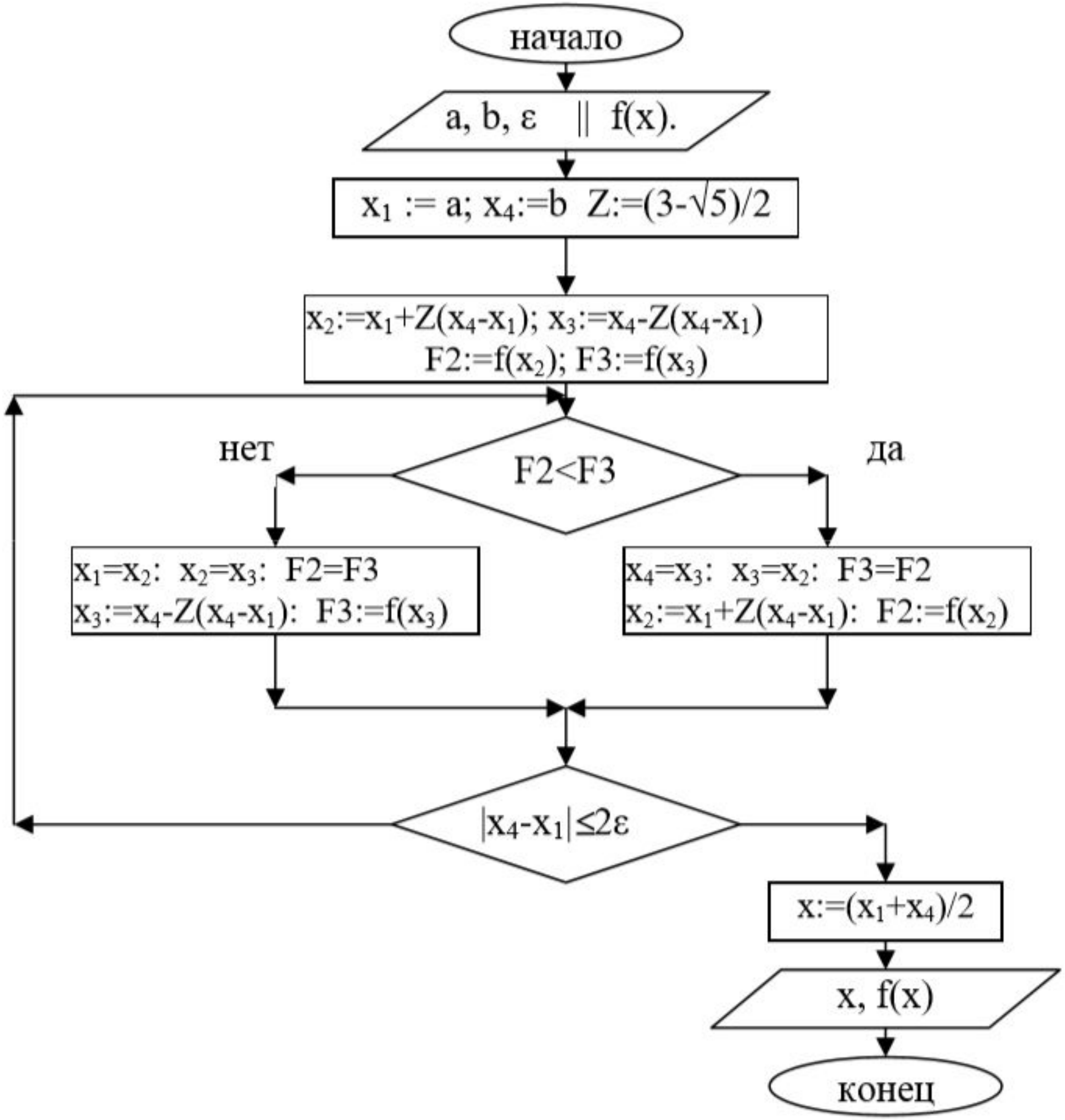
С другой стороны, рассмотрим следующую задачу. Возьмем отрезок $[a,b]$, найдем внутри этого отрезка $x_1,\ \mathrm{x}_2\ \ (\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2)$, образующие золотое сечение

Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_1 - a}{x_2 - a} = \frac{b - x_2}{b - x_1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Пример

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Вычислим $Z = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}$ и введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b
2. Делим отрезок на три части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если $F2 < F3$, то пункт 4 иначе пункт 5
4. границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, $x_4=x_3$, а $x_3=x_2$, F3=F2, $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и $F2=f(x_2)$ пункт 6
5. границы нового отрезка определим как $x_1=x_2$, $x_4=x_4$, а $x_2=x_3$, F2=F3, $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$ и $F3=f(x_3)$ пункт 6
6. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \leq 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 3.


начало
a, b, ε || f(x).
$x_1 := a; x_4 := b\ \ Z := (3-\sqrt{5})/2$
$x_2 := x_1 + Z(x_4 - x_1);\ x_3 := x_4 - Z(x_4 - x_1)$
$F2 := f(x_2);\ F3 := f(x_3)$
нет
F2<F3
да
$x_1 = x_2;\ x_2 = x_3;\ F2 = F3$
$x_3 := x_4 - Z(x_4 - x_1);\ F3 := f(x_3)$
$x_4 = x_3;\ x_3 = x_2;\ F3 = F2$
$x_2 := x_1 + Z(x_4 - x_1);\ F2 := f(x_2)$
$|x_4 - x_1| \le 2\varepsilon$
$x := (x_1 + x_4)/2$
x, f(x)
конец