Системы логических уравнений (B15)

$$
\begin{cases}
\overline{x_1 \equiv x_2} + x_3 \equiv x_4 = 1 \\
\overline{x_3 \equiv x_4} + x_5 \equiv x_6 = 1 \\
\overline{x_5 \equiv x_6} + x_7 \equiv x_8 = 1 \\
\overline{x_7 \equiv x_8} + x_9 \equiv x_{10} = 1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(\overline{x_3} \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4})} = 1 \\
x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{(\overline{x_5} \cdot x_6 + x_5 \cdot \overline{x_6})} = 1 \\
x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + \overline{(\overline{x_7} \cdot x_8 + x_7 \cdot \overline{x_8})} = 1 \\
x_7 \cdot x_8 + \overline{x_7} \cdot \overline{x_8} + \overline{(\overline{x_9} \cdot x_{10} + x_9 \cdot \overline{x_{10}})} = 1
\end{cases}
$$

$((X_1 \equiv X_2) \land (X_3 \equiv X_4)) \lor (\neg(X_1 \equiv X_2$

$((X_3 \equiv X_4) \land (X_5 \equiv X_6)) \lor (\neg(X_3 \equiv X_4) \land \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$

$((X_5 \equiv X_6) \land (X_7 \equiv X_8)) \lor (\neg(X_5 \equiv X_6) \land \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$

$((X_7 \equiv X_8) \land (X_9 \equiv X_{10})) \lor (\neg(X_7 \equiv X_8) \land \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$

№1. Сколько различных решений имеет логическое уравнение:

- $(a \lor \neg b) \land (b \lor \neg c) \land (c \lor \neg d) \land (d \lor \neg e) = 1$

  Решение:

  Ответ: 6

- $(a \to b) \land (b \to c) \land (c \to d) \land (d \to e) \land (e \to f) = 1$

  Ответ: 7

- $(X1 \to X2) \land (X2 \to X3) \land \ldots \land (X99 \to X100) = 1$

  Ответ: 101

$$\begin{cases} \neg X1 \lor X2 = 1 \\ \neg X2 \lor X3 = 1 \\ \ldots \\ \neg X9 \lor X10 = 1 \end{cases}$$

Ответ: 11

(a ∨ ¬ b) ∧ (b ∨ ¬ c) ∧ (c ∨ ¬ d) ∧ (d ∨ ¬ e) = 1

a	0	1					2
b	0	0	1				3
c	0	0	0	1			4
d	0	0	0	0	1		5
e	0	0	0	0	0	1	6

Количество решений

№2. Сколько существует различных наборов значений логических переменных, которые удовлетворяют всем условиям?

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1 \\ (z1 \to z2) \land (z2 \to z3) \land (z3 \to z4) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Ответ: 30

№3.

$$\begin{cases} (x1 \to x3) \land (x3 \to x5) \land \ldots \land (x9 \to x11) = 1 \\ (x2 \to x4) \land (x4 \to x6) \land \ldots \land (x8 \to x10) = 1 \end{cases}$$

Ответ: 42

$$
\begin{cases}
(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1 \\
(z1 \rightarrow z2) \wedge (z2 \rightarrow z3) \wedge (z3 \rightarrow z4) = 1
\end{cases}
$$

X1	1 **0**
X2	1 1 **0**
X3	1 1 1 **0**
X4	1 1 1 1 **0**
x5	1 1 1 1 1 **0**

- В первом уравнении 5 переменных - 6 решений.
- Во втором уравнении 4 переменных - 5 решений.

z1	1 **0**
z2	1 1 **0**
z3	1 1 1 **0**
z4	1 1 1 1 **0**

- Количество решений системы уравнений определяется как произведение **5*6 = 30**, так как переменные в уравнениях не зависят друг от друга.

№4. Сколько существует различных наборов значений логических переменных, которые удовлетворяют перечисленным условиям?

$$\begin{cases} (x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) \land (x4 \rightarrow x5) = 1 \\ (x5 \rightarrow x1) = 1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:***   **2**

$$\begin{cases} (x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1 \\ (x5 \rightarrow x1) = 1 \end{cases}$$

Первое уравнение имеет 6 решений. Для второго уравнения из них подходят только **два решения**: 11111 и 00000.

x1	1	0				
x2	1	1	0			
x3	1	1	1	0		
x4	1	1	1	1	0	
x5	1	1	1	1	1	0

№ 5. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$(x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1$

$(z1 \to z2) \land (z2 \to z3) \land (z3 \to z4) = 1$

$x1 \lor z1 = 1$

Решение: **Ответ:** 10

№ 6.

$$\begin{cases} (X1 \to X2) \land (X2 \to X3) \land (X3 \to X4) \land (X4 \to X5) = 1 \\ (Y1 \to Y2) \land (Y2 \to Y3) \land (Y3 \to Y4) \land (Y4 \to Y5) = 1 \end{cases}$$

$X5 \land Y5 = 0$

Решение: **Ответ:** 11

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) \wedge (x4 \to x5) = 1 \\ (z1 \to z2) \wedge (z2 \to z3) \wedge (z3 \to z4) = 1 \\ x1 \vee z1 = 1 \end{cases}$$

- В первом уравнении 5 переменных ⇒ 6 решений.
- Во втором уравнении 4 переменных ⇒ 5 решений.

Переменные зависят друг от друга. Возможны варианты:

- Если x1=1, то подходят все решения z_i ⇒ 5 решений.
- Если z1=1, то подходят все решения x_i ⇒ 6 решений.

x1	**z_i**		**z1**	**x_i**
11111	1111		1111	11111
	0111			01111
	0011			00111
	0001			00011
	0000			00001
				00000

Такое решение нужно учитывать один раз.

Всего решений:

5+6-1=10

$$\begin{cases} (X1 \to X2) \wedge (X2 \to X3) \wedge (X3 \to X4) \wedge (X4 \to X5) = 1 \\ (Y1 \to Y2) \wedge (Y2 \to Y3) \wedge (Y3 \to Y4) \wedge (Y4 \to Y5) = 1 \\ X5 \wedge Y5 = 0 \end{cases}$$

X1	1 0	Для уравнения **X5 ∧ Y5 = 0** подойдут следующие решения:	Y1	1 0
X2	1 1 0		Y2	1 1 0
X3	1 1 1 0		Y3	1 1 1 0
X4	1 1 1 1 0		Y4	1 1 1 1 0
x5	1 1 1 1 1 0		y5	1 1 1 1 1 0

X5=0	Yi		Xi	Y5=0
00000	11111		11111	00000
6 решений	01111		01111	6 решений
	00111		00111	
	00011		00011	
	00001		00001	
	00000		00000	

Количество решений системы уравнений:

6+6-1=**11**

(решение, выделенное красным цветом, нужно учесть один раз).

№ 7. **Сколько различных решений имеет система логических уравнений:**

$$\begin{cases} (\overline{X1} \to \overline{X2}) \wedge (X2 \to X3) \wedge (\overline{X3} \to \overline{X4}) \wedge (X4 \to X5) = 1 \\ (\overline{Y1} \to \overline{Y2}) \wedge (Y2 \to Y3) \wedge (\overline{Y3} \to \overline{Y4}) \wedge (Y4 \to Y5) = 1 \\ X1 \wedge Y1 = 1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **64**

№ 8.

$$\begin{cases} (X1 \vee X2) \wedge (X2 \vee X3) \wedge (X3 \vee X4) \wedge (X4 \vee X5) = 1 \\ (\neg Y1 \to Y2) \wedge (\neg Y2 \to Y3) \wedge (\neg Y3 \to Y4) \wedge (\neg Y4 \to Y5) = 1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **25**

$X1 \vee Y1 = 0$

$$\begin{cases} (\overline{X1} \to \overline{X2}) \wedge (X2 \to X3) \wedge (\overline{X3} \to \overline{X4}) \wedge (X4 \to X5) = 1 \\ (\overline{Y1} \to \overline{Y2}) \wedge (Y2 \to Y3) \wedge (\overline{Y3} \to \overline{Y4}) \wedge (Y4 \to Y5) = 1 \\ X1 \wedge Y1 = 1 \end{cases}$$

x1	**0**	**1**
X2	0	0 1
X3	0 1	0 1 1
X4	0 0 1	0 0 1 0 1
x5	0 1 0 1 1	0 1 0 1 1 0 1 1

Y1	**0**	**1**
Y2	0	0 1
Y3	0 1	0 1 1
Y4	0 0 1	0 0 1 0 1
Y5	0 1 0 1 1	0 1 0 1 1 0 1 1

Так как **x1** $\wedge$ **y1 = 1**, то

x1=1 (8 решений) и **y1=1** (8 решений).

Переменные независимы. Поэтому для каждого x_i существует 8 решений y_i.

Количество решений системы уравнений:

8*8=**64**

Преобразуем первое уравнение и получим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
(\neg X1 \rightarrow X2) \wedge (\neg X2 \rightarrow X3) \wedge (\neg X3 \rightarrow X4) \wedge (\neg X4 \rightarrow X5) = 1 \\
(\neg Y1 \rightarrow Y2) \wedge (\neg Y2 \rightarrow Y3) \wedge (\neg Y3 \rightarrow Y4) \wedge (\neg Y4 \rightarrow Y5) = 1 \\
X1 \vee Y1 = 0
\end{cases}
$$

X1	**0**	**1**
X2	1	0 1
X3	0 1	1 0 1
X4	1 0 1	0 1 1 0 1
X5	0 1 1 0 1	1 0 1 0 1 1 0 1

Дерево решений для второго уравнения будет аналогичное.

Так как **$X1 \vee Y1 = 0$**, то **X1=0** и **y1=0**.

Если X1=0, то получаем 5 наборов решений:	01010 01011 01101 01110 01111	**Если Y1=0, то получаем 5 наборов решений:**	01010 01011 01101 01110 01111	Переменные независимы и для каждого Xi существует 5 решений Yi. Количество решений системы уравнений : **5*5=25**

Сколько различных решений имеет система логических уравнений:

№ 9_А

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1 \\ (y1 \to y2) \land (y2 \to y3) \land (y3 \to y4) \land (y4 \to y5) = 1 \\ x1 \to y1 = 1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **31**

№ 9_Б

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1 \\ (y1 \to y2) \land (y2 \to y3) \land (y3 \to y4) \land (y4 \to y5) = 1 \\ y5 \to x5 = 1 \end{cases}$$

Ответ: **31**

$$\begin{cases} (x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) \wedge (x4 \to x5) = 1 \\ (y1 \to y2) \wedge (y2 \to y3) \wedge (y3 \to y4) \wedge (y4 \to y5) = 1 \\ x1 \to y1 = 1 \end{cases}$$

X1	1 **0**	Всего решений у системы из двух первых уравнений 6 * 6 = 36.	Y1	1 **0**
X2	1 1 **0**		Y2	1 1 **0**
X3	1 1 1 **0**		Y3	1 1 1 **0**
X4	1 1 1 1 **0**		Y4	1 1 1 1 **0**
x5	1 1 1 1 1 **0**		y5	1 1 1 1 1 **0**

Для уравнения $X1 \to Y1 = 1$ не подходят те решения, когда x1=1, а y1=0.

Xi	Yi	Количество решений системы уравнений : **6 * 6 – 5 = 31**
(11111)	(01111) (00111) (00011) (00001) (00000)	

№11. Сколько различных решений имеет система уравнений:

a)	b)
$(x1 \equiv x2) \lor (x1 \equiv x3) = 1$ $(x2 \equiv x3) \lor (x2 \equiv x4) = 1$ $(x3 \equiv x4) \lor (x3 \equiv x5) = 1$ …… $(x8 \equiv x9) \lor (x8 \equiv x10) = 1$	$(x1 \equiv x2) \lor (x2 \equiv x3) = 1$ $(x2 \equiv x3) \lor (x3 \equiv x4) = 1$ $(x3 \equiv x4) \lor (x4 \equiv x5) = 1$ …… $(x8 \equiv x9) \lor (x9 \equiv x10) = 1$

Ответ: 20

Решение:

Ответ: 178

Решение:

Пусть X1 = 0

	Решения	Количество решений
X1	0	1
X2	1 0	2
X3	0 1 0	3
X4	1 0 1 0	4
X5	0 1 0 1 0	5
X6		6
X7		7
X8		8
X9		9
X10		10

Каждое следующее число на единицу больше предыдущего

Принцип построения дерева:

- Если две предыдущие переменные имеют одинаковые значения, то значение текущей переменной может быть 0 и 1.
- Если две предыдущие переменные имеют разные значения, то значение текущей переменной должно совпадать со значением переменной на два уровня выше.

Аналогичные рассуждения проводим для X1 = 1.

Количество решений системы уравнений: **2 * 10 = 20**

К задаче №19

Пусть X1 = 0

	Решения	Количество решений
X1	0	1
X2	0 1	2
X3	0 1 1	3
X4	0 1 1 0 1	5
X5	0 1 1 0 1 0 0 1	8
X6		13
X7		21
X8		34
X9		55
X10		89

Следующее число является суммой двух предыдущих чисел.

Принцип построения дерева:

- Если две предыдущие переменные имеют одинаковые значения, то значение текущей переменной может быть 0 и 1.
- Если две предыдущие переменные имеют разные значения, то значение текущей переменной должно совпадать со значением предыдущей переменной.

Аналогичные рассуждения проводим для X1 = 1.

Количество решений системы уравнений: **2 * 89 = 178**

Сколько различных решений имеет система уравнений:

11_с.	10.
$\begin{cases} (x2 \equiv x1) \lor (x2 \equiv x3)=1 \\ (x3 \equiv x1) \lor (x3 \equiv x4)=1 \\ \ldots \\ (x9 \equiv x1) \lor (x9 \equiv x10)=1 \\ (x10 \equiv x1) = 0 \end{cases}$	$(A \rightarrow B) + (C \rightarrow D) = 1$ **Решение:** **Ответ:** 15

Решение: **Ответ:** 18

	Решения	Количество решений
X1	1 0	1
X2	1 0 0 1	4
X3	1 0 0 0 1 1	6
X4	1 0 0 0 0 1 1 1	8
X5	1 0 0 0 0 0 1 1 1 1	10
X6		12
X7		14
X8		16
X9		18
X10		20

$(x2 \equiv x1) \lor (x2 \equiv x3)=1$
$(x3 \equiv x1) \lor (x3 \equiv x4)=1$
…
$(x9 \equiv x1) \lor (x9 \equiv x10)=1$

Из уравнения

$$x10 \equiv x1 = 0$$

следует, что переменные X1 и X10 должны иметь разные значения.

Одинаковые значения переменные X1 и X10 имеют только на двух наборах: **(111…1)** и **(000…0).**

Количество решений системы уравнений: **20-2=18**

Воспользуемся методом «замены переменных».

Введем новые переменные: $X = A \to B$ и $Y = C \to D$

Тогда уравнение принимает вид: $X + Y = 1$

Решениями уравнения являются: (0;1), (1;0), (1;1)

(0;1)	(1;0)	(1;1)
A → B = 0 – одно решение : (1;0) **C → D = 1** – три решения: (0;1), (0,0), (1,1) Всего решений для исходного набора: **1*3=3**	**A → B = 1 -** три решения: (0;1), (0,0), (1,1) **C → D = 0** – одно решение : (1;0) Всего решений для исходного набора: **1*3=3**	**A → B = 1** **C → D = 1** Каждое уравнение имеет по три решения: (0;1), (0,0), (1,1) Всего решений для исходного набора: **3*3=9**
Количество решений для системы уравнений: 3+3+9=15		

№11_d. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} \neg(X1 \equiv X2) \lor (X3 \equiv X4) = 1 \\ \neg(X3 \equiv X4) \lor (X5 \equiv X6) = 1 \\ \neg(X5 \equiv X6) \lor (X7 \equiv X8) = 1 \\ \neg(X7 \equiv X8) \lor (X9 \equiv X10) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Ответ: 192

К задаче №15

Исходная система	Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} \neg(X1 \equiv X2) \lor (X3 \equiv X4) = 1 \\ \neg(X3 \equiv X4) \lor (X5 \equiv X6) = 1 \\ \neg(X5 \equiv X6) \lor (X7 \equiv X8) = 1 \\ \neg(X7 \equiv X8) \lor (X9 \equiv X10) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} Y1 = X1 \equiv X2 \\ Y2 = X3 \equiv X4 \\ Y3 = X5 \equiv X6 \\ Y4 = X7 \equiv X8 \\ Y5 = X9 \equiv X10 \end{cases}$	$\begin{cases} \neg Y1 + Y2 = 1 \\ \neg Y2 + Y3 = 1 \\ \neg Y3 + Y4 = 1 \\ \neg Y4 + Y5 = 1 \end{cases}$

Построим дерево решений для новой системы уравнений:

Y1	1 0
Y2	1 1 0
Y3	1 1 1 0
Y4	1 1 1 1 0
Y5	1 1 1 1 1 0
Получили 6 решений.	

Так как **$Y1 = X1 \equiv X2$, то**
Y1=0 при двух наборах значений переменных x1 и x2: (0;1), (1;0);
Y1=1 – имеет два решения: (0;0) и (1;1).

Тогда одному решению новой системы соответствует $\mathbf{2^5}$ наборов **Xi.**

Количество решений системы уравнений:

$$6 * 2^5 = 192$$

№12. Сколько различных решений имеет уравнение (система уравнений):

$$\begin{cases} (X1 \equiv X2) \leftrightarrow (X3 \equiv X4) = 1 \\ (X3 \equiv X4) \leftrightarrow (X5 \equiv X6) = 1 \\ (X5 \equiv X6) \leftrightarrow (X7 \equiv X8) = 1 \\ (X7 \equiv X8) \leftrightarrow (X9 \equiv X10) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Ответ: 64

№13.

$$\begin{cases} X1 \lor \neg X2 \lor \neg X3 \land X4 = 1 \\ X3 \lor \neg X4 \lor \neg X5 \land X6 = 1 \\ X5 \lor \neg X6 \lor \neg X7 \land X8 = \end{cases}$$

Решение:

Ответ: 364

Исходная система	Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} (X1 \equiv X2) \leftrightarrow (X3 \equiv X4) = 1 \\ (X3 \equiv X4) \leftrightarrow (X5 \equiv X6) = 1 \\ (X5 \equiv X6) \leftrightarrow (X7 \equiv X8) = 1 \\ (X7 \equiv X8) \leftrightarrow (X9 \equiv X10) = 1 \end{cases}$	**Y1 = (X1 ≡ X2)** **Y2 = (X3 ≡ X4)** **Y3 = (X5 ≡ X6)** **Y4 = (X7 ≡ X8)** **Y5 = (X9 ≡ X10)**	**Y1 ↔ Y2 =1** **Y2 ↔ Y3 =1** **Y3 ↔ Y4 =1** **Y4 ↔ Y5 =1**

Построим дерево решений:

Y1	1 0
Y2	1 0
Y3	1 0
Y4	1 0
Y5	1 0
Получили 2 решения.	

Так как **Yi = (Xi ≡ Xi+1)** имеет две пары решений, как для 1, так и для 0. То всего решений для системы уравнений: $\mathbf{2*2^5}$ = **64**.

В процессе решения будем использовать формулу: $\overline{x3} \cdot x4 = \overline{\overline{x4} + x3}$

Исходная система	Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} X1 \lor \neg X2 \lor \neg X3 \land X4 = 1 \\ X3 \lor \neg X4 \lor \neg X5 \land X6 = 1 \\ X5 \lor \neg X6 \lor \neg X7 \land X8 = 1 \\ X7 \lor \neg X8 \lor \neg X9 \land X10 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} X1 \lor \neg X2 = Y1 \\ X3 \lor \neg X4 = Y2 \\ X5 \lor \neg X6 = Y3 \\ X7 \lor \neg X8 = Y4 \\ X9 \lor \neg X10 = Y5 \end{cases}$	$\begin{cases} Y1 + \neg Y2 = 1 \\ Y2 + \neg Y3 = 1 \\ Y3 + \neg Y4 = 1 \\ Y4 + \neg Y5 = 1 \end{cases}$

Построим дерево решений для новой системы уравнений:

Y1	0	1				
Y2	0	0	1			
Y3	0	0	0	1		
Y4	0	0	0	0	1	
Y5	0	0	0	0	0	1

Для подсчета количества решений исходной системы уравнений будем учитывать, что

1) так как **$X1 \lor \neg X2 = Y1$,** то

Y1=0 в одном случае: решением является набор (0;1)

Y1=1 в трех случаях: (1;0), (1;1), (0;0);

2) Переменные Yi независимы

Количество решений на каждом наборе:

(00000)=1*1*1*1*1

(10000)=3*1*1*1*1

(11000)=3*3*1*1*1

(11100)=3*3*3*1*1

(11110)=3*3*3*3*1

(11111)=3*3*3*3*3

Всего решений:

$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5 = 364$.

№14. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} ((X1 \equiv X2) + (X3 \equiv X4))*(\neg(X1 \equiv X2) + \neg(X3 \equiv X4)) = 1 \\ ((X3 \equiv X4) + (X5 \equiv X6))*(\neg(X3 \equiv X4) + \neg(X5 \equiv X6)) = 1 \\ \cdots\cdots \\ ((X7 \equiv X8) + (X9 \equiv X10))*(\neg(X7 \equiv X8) + \neg(X9 \equiv X10)) = 1 \end{cases}$$

Решение: **Ответ:** 64

$$
\begin{cases}
((x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4)) \cdot (\overline{x_1 \equiv x_2} + \overline{x_3 \equiv x_4}) = 1 \\
((x_3 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_6)) \cdot (\overline{x_3 \equiv x_4} + \overline{x_5 \equiv x_6}) = 1 \\
\dots \\
((x_7 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10})) \cdot (\overline{x_7 \equiv x_8} + \overline{x_9 \equiv x_{10}}) = 1
\end{cases}
$$

Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} Y1 = (X1 \equiv X2) \\ Y2 = (X3 \equiv X4) \\ Y3 = (X5 \equiv X6) \\ Y4 = (X7 \equiv X8) \\ Y5 = (X9 \equiv X10) \end{cases}$	$\begin{cases} (Y1 + Y2) * (\neg Y1 + \neg Y2) = 1 \\ (Y2 + Y3) * (\neg Y2 + \neg Y3) = 1 \\ (Y3 + Y4) * (\neg Y3 + \neg Y4) = 1 \\ (Y4 + Y5) * (\neg Y4 + \neg Y5) = 1 \end{cases}$

Дерево решений:

Y1	1 0
Y2	0 1
Y3	1 0
Y4	0 1
Y5	1 0
Получили 2 решения.	

Так как **Yi = (Xi ≡ Xi+1)** имеет две пары решений, как для 1, так и для 0. То всего решений для системы уравнений: $\mathbf{2*2^5 = 64}$.

№15. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}+X3\cdot\overline{X4}+\overline{X3}\cdot X4=1 \\ X3\cdot X4+\overline{X3}\cdot\overline{X4}+X5\cdot\overline{X6}+\overline{X5}\cdot X6=1 \\ X5\cdot X6+\overline{X5}\cdot\overline{X6}+X7\cdot\overline{X8}+\overline{X7}\cdot X8=1 \\ X7\cdot X8+\overline{X7}\cdot\overline{X8}+X9\cdot\overline{X10}+\overline{X9}\cdot X10=1 \end{cases}$$

Решение: **Ответ:** 192

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_3} \cdot x_4 = 1 \\ x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_5 \cdot \overline{x_6} + \overline{x_5} \cdot x_6 = 1 \\ x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + x_7 \cdot \overline{x_8} + \overline{x_7} \cdot x_8 = 1 \\ x_7 \cdot x_8 + \overline{x_7} \cdot \overline{x_8} + x_9 \cdot \overline{x_{10}} + \overline{x_9} \cdot x_{10} = 1 \end{cases}$$

Так как $(X1 \equiv X2) = X1 \cdot X2 + \overline{X1} \cdot \overline{X2}$

$$\overline{X3 \equiv X4} = X3 \cdot \overline{X4} + \overline{X3} \cdot X4$$

Замена переменных	Новая система
Y1 = (X1 ≡ X2) **Y2 = (X3 ≡ X4)** **Y3 = (X5 ≡ X6)** **Y4 = (X7 ≡ X8)** **Y5 = (X9 ≡ X10)**	**Y1 + ¬Y2 =1** **Y2 + ¬Y3 =1** **Y3 + ¬Y4 =1** **Y4 + ¬Y5 =1** Система имеет 6 решений.

См. решение задачи № 11 d.

Так как **Yi = (Xi ≡ Xi+1)** имеет две пары решений, как для 1, так и для 0. То всего решений для системы уравнений: 6***2^5=192**.

№16. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$
\begin{cases}
X1 \cdot X2 + \overline{X1} \cdot \overline{X2} + \overline{\overline{X3} \cdot X4 + X3 \cdot \overline{X4}} = 1 \\
X3 \cdot X4 + \overline{X3} \cdot \overline{X4} + \overline{\overline{X5} \cdot X6 + X5 \cdot \overline{X6}} = 1 \\
X5 \cdot X6 + \overline{X5} \cdot \overline{X6} + \overline{\overline{X7} \cdot X8 + X7 \cdot \overline{X8}} = 1 \\
X7 \cdot X8 + \overline{X7} \cdot \overline{X8} + \overline{\overline{X9} \cdot X10 + X9 \cdot \overline{X10}} = 1 \\
X9 \cdot X10 + \overline{X9} \cdot \overline{X10} + \overline{\overline{X11} \cdot X12 + X11 \cdot \overline{X12}} = 1
\end{cases}
$$

Решение:

Ответ: **224**

$$
\begin{cases}
X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}+\overline{\overline{X3}\cdot X4+X3\cdot\overline{X4}}=1\\
X3\cdot X4+\overline{X3}\cdot\overline{X4}+\overline{\overline{X5}\cdot X6+X5\cdot\overline{X6}}=1\\
X5\cdot X6+\overline{X5}\cdot\overline{X6}+\overline{\overline{X7}\cdot X8+X7\cdot\overline{X8}}=1\\
X7\cdot X8+\overline{X7}\cdot\overline{X8}+\overline{\overline{X9}\cdot X10+X9\cdot\overline{X10}}=1\\
X9\cdot X10+\overline{X9}\cdot\overline{X10}+\overline{\overline{X11}\cdot X12+X11\cdot\overline{X12}}=1
\end{cases}
$$

Так как $(X1\equiv X2)=X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}$

$$\overline{X3\equiv X4}=\overline{\overline{X3}\cdot X4+X3\cdot\overline{X4}}$$

Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} Y1 = (X1 \equiv X2)\\ Y2 = (X3 \equiv X4)\\ Y3 = (X5 \equiv X6)\\ Y4 = (X7 \equiv X8)\\ Y5 = (X9 \equiv X10)\\ Y6 = (X11 \equiv X12)\end{cases}$	$\begin{cases} Y1 + \neg Y2 = 1\\ Y2 + \neg Y3 = 1\\ Y3 + \neg Y4 = 1\\ Y4 + \neg Y5 = 1\\ Y5 + \neg Y6 = 1\end{cases}$

См. решение задачи № 11 d. Только в нашем случае количество переменных шесть, поэтому ответ: $7*2^6$=**448**.

№17. Сколько различных решений имеет система уравнений:

а)	б)
$\begin{cases} A \lor \neg B \lor \neg C \land D = 1 \\ C \lor \neg D \lor \neg E \land F = 1 \\ E \lor \neg F \lor \neg G \land H = 1 \\ G \lor \neg H \lor \neg I \land J = 1 \\ I \lor \neg J \lor \neg A \land B = \end{cases}$ Ответ: 244 Решение:	$\begin{cases} A \to B \lor C \land \neg D = 1 \\ C \to D \lor E \land \neg F = 1 \\ E \to F \lor G \land \neg H = 1 \\ G \to H \lor I \land \neg J = 1 \\ I \to J \lor A \land \neg B = 0 \end{cases}$ Ответ: 120 Решение:

Исходная система	Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} A \lor \neg B \lor \neg C \land D = 1 \\ C \lor \neg D \lor \neg E \land F = 1 \\ E \lor \neg F \lor \neg G \land H = 1 \\ G \lor \neg H \lor \neg I \land J = 1 \\ I \lor \neg J \lor \neg A \land B = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} A \lor \neg B = Y1 \\ C \lor \neg D = Y2 \\ E \lor \neg F = Y3 \\ G \lor \neg H = Y4 \\ I \lor \neg J = Y5 \end{cases}$	$\begin{cases} Y1 + \neg Y2 = 1 \\ Y2 + \neg Y3 = 1 \\ Y3 + \neg Y4 = 1 \\ Y4 + \neg Y5 = 1 \\ Y5 + \neg Y1 = 1 \end{cases}$

Построим дерево решений для новой системы уравнений:

Y1	0	1				
Y2	0	0	1			
Y3	0	0	0	1		
Y4	0	0	0	0	1	
Y5	0	0	0	0	0	1
Y5+¬Y1=1	+	-	-	-	-	+

Два решения: (00000) и (11111).

Для подсчета количества решений исходной системы уравнений будем учитывать, что

1) так как **$A \lor \neg B = Y1$,** то уравнение

Y1=0 имеет одно решение: (0;1)

Y1=1 имеет три решения: (1;0), (1;1), (0;0);

2) Переменные Yi независимы.

Тогда для исходной системы уравнений набор (00000) дает одно решение, а набор (11111) дает $3*3*3*3*3=3^5=243$ решения. Всего решений 1+243=244.

Заметим, что $\neg(A \to B) = \neg(\neg A \lor B) = A \land \neg B$

Исходная система	Замена переменных	Новая система
$\begin{cases} A \to B \lor C \land \neg D = 1 \\ C \to D \lor E \land \neg F = 1 \\ E \to F \lor G \land \neg H = 1 \\ G \to H \lor I \land \neg J = 1 \\ I \to J \lor A \land \neg B = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} A \to B = Y1 \\ C \to D = Y2 \\ E \to F = Y3 \\ G \to H = Y4 \\ I \to J = Y5 \end{cases}$	$\begin{cases} Y1 + \neg Y2 = 1 \\ Y2 + \neg Y3 = 1 \\ Y3 + \neg Y4 = 1 \\ Y4 + \neg Y5 = 1 \\ Y5 + \neg Y1 = 0 \end{cases}$

Дерево решений:

Y1	0	1				
Y2	0	0	1			
Y3	0	0	0	1		
Y4	0	0	0	0	1	
Y5	0	0	0	0	0	1
Y5+¬Y1=0	-	+	+	+	+	-

Четыре решения: (10000)
(11000)
(11100)
(11110)

Для подсчета количества решений исходной системы уравнений будем учитывать, что

1) так как **$A \lor \neg B = Y1$,** то уравнение
Y1=0 имеет одно решение: (0;1)
Y1=1 имеет три решения: (1;0), (1;1), (0;0);

2) Переменные Yi независимы.

Тогда для исходной системы уравнений набор (10000) дает 3*1*1*1*1=3 решения
(11000) дает $3*3*1*1*1=3^2=9$ решений
(11100) - $3*3*3*1*1=3^3=27$ решений
(11110) - $3*3*3*3*1=3^4=81$ решение

Всего решений - 120.

№18. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$
\begin{cases}
(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3)+(\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3})+(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3})=1\\
(\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4)+(\overline{x_2}\cdot x_3\cdot\overline{x_4})+(x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4})=1\\
\ldots\\
(\overline{x_7}\cdot\overline{x_8}\cdot x_9)+(\overline{x_7}\cdot x_8\cdot\overline{x_9})+(x_7\cdot\overline{x_8}\cdot\overline{x_9})=1
\end{cases}
$$

Решение: ***Ответ:*** **3**

$$\begin{cases} (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) = 1 \\ (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) + (\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) + (x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}) = 1 \\ \ldots \\ (\overline{x_7} \cdot \overline{x_8} \cdot x_9) + (\overline{x_7} \cdot x_8 \cdot \overline{x_9}) + (x_7 \cdot \overline{x_8} \cdot \overline{x_9}) = 1 \end{cases}$$

1. Построим таблицу истинности для первого уравнения, обозначив слагаемые соответственно y1, Y2, y3 и всю сумму - F:

x1	x2	x3	y1	y2	y3	F
0	0	0	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	0	0	1
0	**1**	**0**	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Получили только три набора значений.

2. Составим дерево решений и будем подключать следующие уравнения:

X1	0	0	1
X2	0	1	0
X3	1	0	0
X4	0	0	1
X5	0	1	0
. . .			

Видим, что количество решений не увеличивается при подключении новых уравнений.

Ответ : 3 решения

№19. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}+X2\cdot X3+\overline{X2}\cdot\overline{X3}=1 \\ X2\cdot X3+\overline{X2}\cdot\overline{X3}+X3\cdot X4+\overline{X3}\cdot\overline{X4}=1 \\ \cdots\cdots \\ X7\cdot X8+\overline{X7}\cdot\overline{X8}+X8\cdot X9+\overline{X8}\cdot\overline{X9}=1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **110**

$$\begin{cases} X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}+X2\cdot X3+\overline{X2}\cdot\overline{X3}=1 \\ X2\cdot X3+\overline{X2}\cdot\overline{X3}+X3\cdot X4+\overline{X3}\cdot\overline{X4}=1 \\ \ldots\ldots \\ X7\cdot X8+\overline{X7}\cdot\overline{X8}+X8\cdot X9+\overline{X8}\cdot\overline{X9}=1 \end{cases}$$

Так как $(X1\equiv X2)=X1\cdot X2+\overline{X1}\cdot\overline{X2}$

То исходная система примет вид:

$$\begin{cases} (x1 \equiv x2) \vee (x2 \equiv x3)=1 \\ (x2 \equiv x3) \vee (x3 \equiv x4)=1 \\ (x3 \equiv x4) \vee (x4 \equiv x5)=1 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

См. решение задачи [№ 11 b.](#) Только в нашем случае количество переменных девять, поэтому ответ: **55*2=110**

№20_А). Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 = 1 \\ y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4 \to y_5 = 0 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **231**

Решение для системы уравнений:

Т.к. первое уравнение имеет 21 решение, а второе уравнение – 11 решений, и переменные в уравнениях независимы, то система уравнений имеет **21*11=231** решение.

Логическое выражение	Решений	Количество «0» и «1»
$x1 \to x2$	**4**	**3 «1»** **1 «0»**
$(x_1 \to x_2) \to x_3$	**8**	3 «1» 3 «0» 2 «1» Всего: **5 «1»** **3 «0»**
$((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$	**16**	5 «1» 5 «0» 3* 2 «1» Всего: **11 «1»** **5 «0»**
$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4) \to x_5$	**32**	11 «1» 11 «0» 5*2 «1» Всего: **21 «1»** **11 «0»**

№20_Б). Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} x1 \to x2 \to x3 \to x4 \to x5 \to x6 = 1 \\ y1 \to y2 \to y3 \to y4 \to y5 \to y6 = 1 \\ x1 \to y1 = 1 \end{cases}$$

Решение: ***Ответ:*** **1387**

Рассмотрим x1 → x2.

Если x1=0, то получаем два решения: 1 и 1.

Если x1=1, то решениями являются 0 и 1.

Логическое выражение	Решений	X1=1 Количество «0» и «1»	X1=0 Количество «0» и «1»
$x1 \to x2$	**4**	**1 «1» 1 «0»**	**2 «1»**
$(x_1 \to x_2) \to x_3$	**8**	1 «1» 1 «0» 2 «1» Всего: **3 «1» 1 «0»**	2 «1» 2 «0» Всего: **2 «1» 2 «0»**
$((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$	**16**	3 «1» 3 «0» 1* 2 «1» Всего: **5 «1» 3 «0»**	2 «1» 2 «0» 2*2 «1» Всего: **6 «1» 2 «0»**
$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4) \to x_5$	**32**	5 «1» 5 «0» 3* 2 «1» Всего: **11 «1» 5 «0»**	6 «1» 6 «0» 2* 2 «1» Всего: **10 «1» 6 «0»**
$((((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4) \to x_5) \to x_6$	**64**	11 «1» 11«0» 5*2 «1» Всего: **21 «1» 11 «0»**	10 «1» 10«0» 6*2 «1» Всего: **22 «1» 10 «0»**

Логическое выражение	Решений	X1=1 Количество «0» и «1»	X1=0 Количество «0» и «1»
$((((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4) \rightarrow x_5) \rightarrow x_6$	**64**	11 «1» 11«0» 5*2 «1» Всего: **21 «1» 11 «0»**	10 «1» 10«0» 6*2 «1» Всего: **22 «1» 10 «0»**

Решение для системы уравнений:

Рассмотрим третье уравнение: $\mathbf{x_1 \rightarrow y_1 = 1}$.

- Если **x1=1**, то y1=1.

По таблице видим, что подходят варианты для исходной системы уравнений: $\mathbf{21_{x1} * 21_{y1}}$ (переменные в уравнениях независимы).

- Если **x1=0**, то y1 может быть любым: 0 и 1.

По таблице видим, что подходят варианты для исходной системы уравнений: $\mathbf{22_{x1} * (21+22)_{y1}}$ (переменные в уравнениях независимы).

Всего решений: **21*21+22*43=1387**.

№21. Сколько различных решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} (x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) = 1 \\ (\neg y1 \vee y2) \wedge (\neg y2 \vee y3) \wedge (\neg y3 \vee y4) = 1 \\ (x1 \rightarrow y1) \wedge (x2 \rightarrow y2) \wedge (x3 \rightarrow y3) \wedge (x4 \rightarrow y4) \\ = 1 \end{cases}$$

Решение:

Ответ: **15**

$(x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) = 1$

$(\neg y1 \vee y2) \wedge (\neg y2 \vee y3) \wedge (\neg y3 \vee y4) = 1$

$(x1 \to y1) \wedge (x2 \to y2) \wedge (x3 \to y3) \wedge (x4 \to y4) = 1$

Рассмотрим систему из первых двух уравнений.

X1	1	0			
X2	1	1	0		
X3	1	1	1	0	
X4	1	1	1	1	0

Получили 5 решений.

Y1	1	0			
Y2	1	1	0		
Y3	1	1	1	0	
Y4	1	1	1	1	0

Получили 5 решений.

Т.к. переменные независимы, то всего решений: 5*5=**25**

Выясним, какие из этих решений **не подходят** для третьего уравнения

$X1 \to Y1 = 0$	**$X2 \to Y2 = 0$**		

4 решения

1		0	0	0	0
1		1	0	0	0
1		1	1	0	0
1		1	1	1	0

3 решения

1		0	0	0
1		0	0	0
1		1	0	0
1		1	1	0

0		0	0	0
1		0	0	0
1		1	0	0
1		1	1	0

Всего 6 решений. Однако, решения из первой таблицы уже учтены в первом уравнении и их повторно считать не надо.

Ответ: 3 решения.

$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) = 1$

$(\neg y1 \vee y2) \wedge (\neg y2 \vee y3) \wedge (\neg y3 \vee y4) = 1$

$(x1 \rightarrow y1) \wedge (x2 \rightarrow y2) \wedge (x3 \rightarrow y3) \wedge (x4 \rightarrow y4) = 1$

Рассмотрим систему из первых двух уравнений.

X1	1	0			
X2	1	1	0		
X3	1	1	1	0	
X4	1	1	1	1	0
Получили 5 решений.					

Y1	1	0			
Y2	1	1	0		
Y3	1	1	1	0	
Y4	1	1	1	1	0
Получили 5 решений.					

Т.к. переменные независимы, то всего решений: 5*5=**25**

Выясним, какие из этих решений **не подходят** для третьего уравнения

$X1 \rightarrow Y1 = 0$	$X2 \rightarrow Y2 = 0$	$X3 \rightarrow Y3 = 0$	

4 решения

1		0	0	0	0
1		1	0	0	0
1		1	1	0	0
1		1	1	1	0

3 решения

0		0	0	0
1		0	0	0
1		1	0	0
1		1	1	0

2 решения

1		0	0
1		0	0
1		0	0
1		1	0

0		0	0
1		0	0
1		0	0
1		1	0

0		0	0
0		0	0
1		0	0
1		1	0

Всего 6 решений. Однако, решения из первой и второй таблиц уже учтены в первом и втором уравнениях и их повторно считать не надо.

$(x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) = 1$
$(\neg y1 \vee y2) \wedge (\neg y2 \vee y3) \wedge (\neg y3 \vee y4) = 1$
$(x1 \to y1) \wedge (x2 \to y2) \wedge (x3 \to y3) \wedge (x4 \to y4) = 1$

Рассмотрим систему из первых двух уравнений.

X1	1	0			
X2	1	1	0		
X3	1	1	1	0	
X4	1	1	1	1	0

Получили 5 решений.

Y1	1	0			
Y2	1	1	0		
Y3	1	1	1	0	
Y4	1	1	1	1	0

Получили 5 решений.

Т.к. переменные независимы, то всего решений: 5*5=**25**

Выясним, какие из этих решений **не подходят** для третьего уравнения

$X1 \to Y1 = 0$	$X2 \to Y2 = 0$	$X3 \to Y3 = 0$	$X4 \to Y4 = 0$

4 решения

1		0	0	0	0
1		1	0	0	0
1		1	1	0	0
1		1	1	1	0

3 решения

0		0	0	0
1		0	0	0
1		1	0	0
1		1	1	0

2 решения

0		0	0
0		0	0
1		0	0
1		1	0

1 решение

0		0
0		0
0		0
1		0

Проводим аналогичные рассуждения

Всего решений для исходной системы уравнений: 25 – 4 – 3 – 2 – 1 = **15**

Литература:

1. Поляков К.Ю., Системы логических уравнений, Информатика, №14-2011
2. Путилов В.В, Системы логических уравнений, http://www.it-n.ru
3. Демидова М.В., Решение задачи типа B10 КИМов ЕГЭ по информатике 2011 года посредством построения дерева. , http://www.it-n.ru
4. Ройтберг М., Подготовка к ЕГЭ 2012., http://EGE-GO.RU

Евграфова Ольга Владимировна, 2012г.