

Алгебра Логики

Алгебра логики — это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Логическое высказывание

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример: «3 – простое число»

- является высказыванием, поскольку оно истинно.

Пример: «Давайте пойдем в кино»

- не является логическим высказыванием.

Высказывательная форма

Высказывательная форма – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Пример. « $x+2>5$ » – высказывательная форма, которая при $x>3$ является истинной, иначе ложной.

Логические связки

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным.

Слова и словосочетания: «*не*», «*и*», «*или*», «*если..., то*», «*тогда и только тогда*» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются *логическими связками*. .

Логические связки

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными (сложными)*.

Высказывания, которые не являются составными, называются *элементарными (простыми)*.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2» - *простое* высказывание.

Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - *составное* высказывание, образованное из двух простых с помощью *логической связки «и»*.

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают *имена*.

Пример:

Обозначим через **A** простое высказывание

«число 6 делится на 2»,

а через **B** простое высказывание

«число 6 делится на 3».

Тогда составное высказывание:

«Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3»

можно записать как «**A и B**».

Здесь «и» — логическая связка, **A**, **B** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение

Основные логические операции

Линия сравнения	Инверсия	Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Эквивалентность																																																																		
Название	отрицание	логическое умножение	логическое сложение	логическое следование	логическое равенство																																																																		
Обозначение	$\bar{A}$ или $\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$																																																																		
Союз	не	и	или	Если A, то B; Когда A, тогда B	A тогда и только тогда, когда B																																																																		
Истинность результата операции	когда исходное высказывание ложно	когда истины одновременно высказывания A и B	когда истинно A, либо B, либо A и B одновременно	всегда, кроме случая, когда A истинно, а B ложно.	когда A и B одновременно истинны или одновременно ложны																																																																		
Таблица истинности	<table><tr><td>A</td><td>$\neg A$</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	A	$\neg A$	1	0	0	1	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \wedge B$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	A	B	$A \wedge B$	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	A	B	$A \vee B$	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \rightarrow B$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	A	B	$A \rightarrow B$	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	A	B	$A \leftrightarrow B$	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
A	$\neg A$																																																																						
1	0																																																																						
0	1																																																																						
A	B	$A \wedge B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	0																																																																					
0	1	0																																																																					
1	0	0																																																																					
A	B	$A \vee B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	0																																																																					
0	1	1																																																																					
1	0	1																																																																					
A	B	$A \rightarrow B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	1																																																																					
0	1	1																																																																					
1	0	0																																																																					
A	B	$A \leftrightarrow B$																																																																					
1	1	1																																																																					
0	0	1																																																																					
0	1	0																																																																					
1	0	0																																																																					

Таблицы истинности

Таблица истинности – это таблица, показывающая истинность сложного высказывания при всех возможных значениях входящих переменных

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1		0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1		1	1	1	1

Таблицы истинности

1. Определить количество строк:

- количество строк = $2n$ + строка для заголовка,
- n - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:

количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;

- определить количество переменных (простых выражений);
- определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Таблицы истинности

Пример.

Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \& B)$.

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому $n=2$ и количество строк $=2^2+1=5$.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблицы истинности

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \vee B)$.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Логические схемы

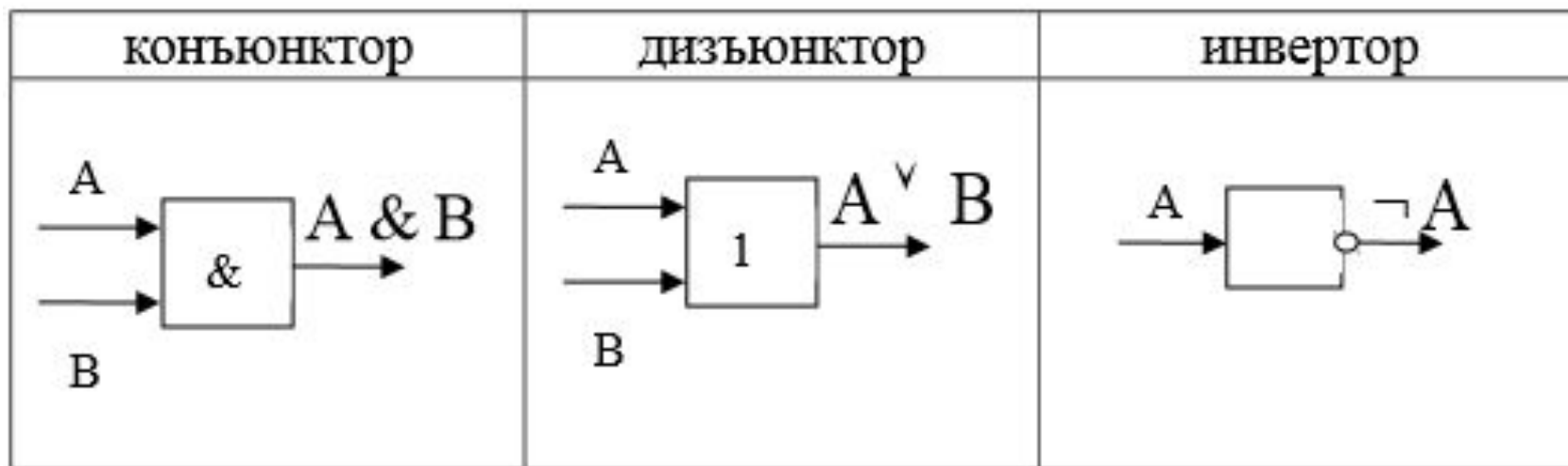
Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

логический элемент «**И**» — логическое умножение — конъюнктор;

логический элемент «**ИЛИ**» — логическое сложение — дизъюнктор;

логический элемент «**НЕ**» — инверсию — инвертор.



Алгоритм построения логических схем.

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример.

По заданной логической функции $F(A,B)=\neg A \& B \vee A \& \neg B$ построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (A и B).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция).
Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).

Логические схемы

