§17. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z)$ – многочлен степени 2.

$\Rightarrow$ в общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0 .$$

Поверхности второго порядка делятся на

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные поверхности второго порядка это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Невырожденными поверхности второго порядка подразделяются на пять типов.

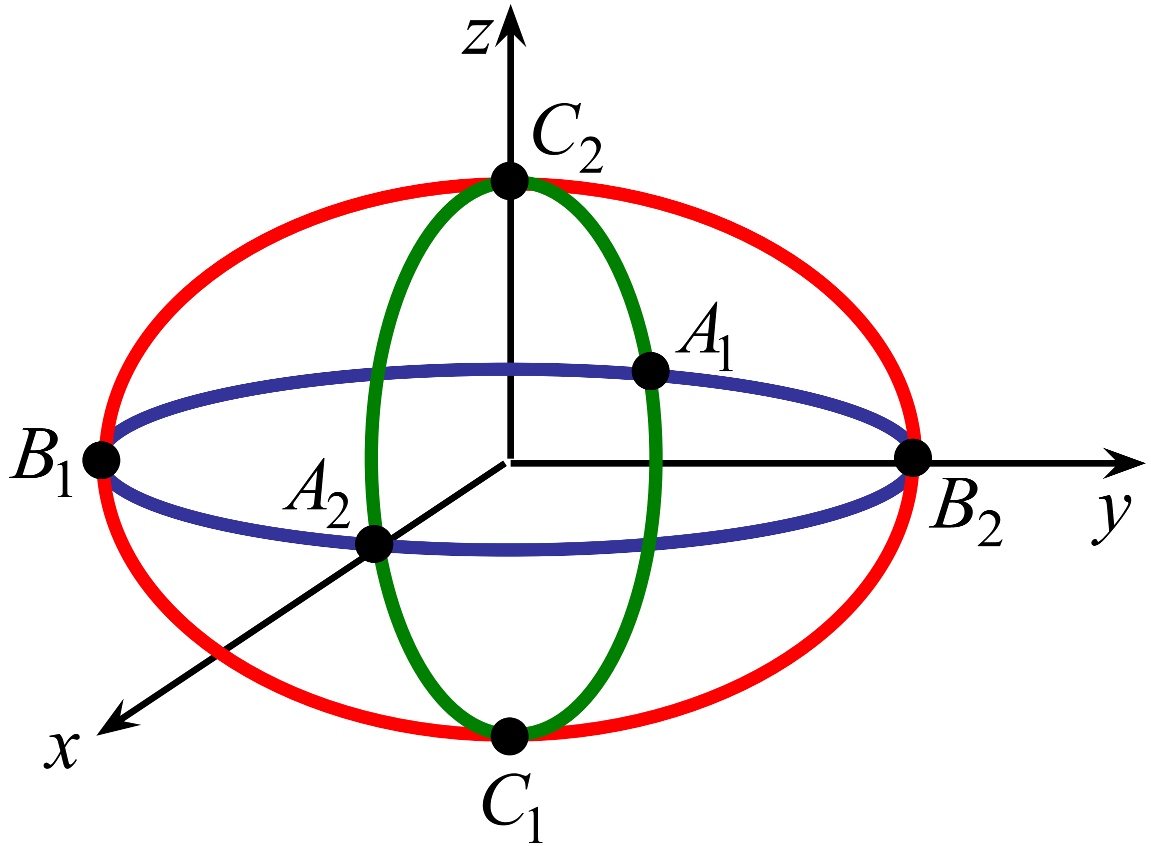
1. Эллипсоид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллипсоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (1) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (1) – ***каноническим уравнением эллипсоида***.



Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида.

Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехостным***.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***.

Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется ***радиусом сферы***.

С геометрической точки зрения, *сфера – геометрическое место точек пространства, равноудаленных* (на расстояние r) *от некоторой фиксированной точки (*называемой *центром)*. В канонической системе координат сферы, центр – начало координат.

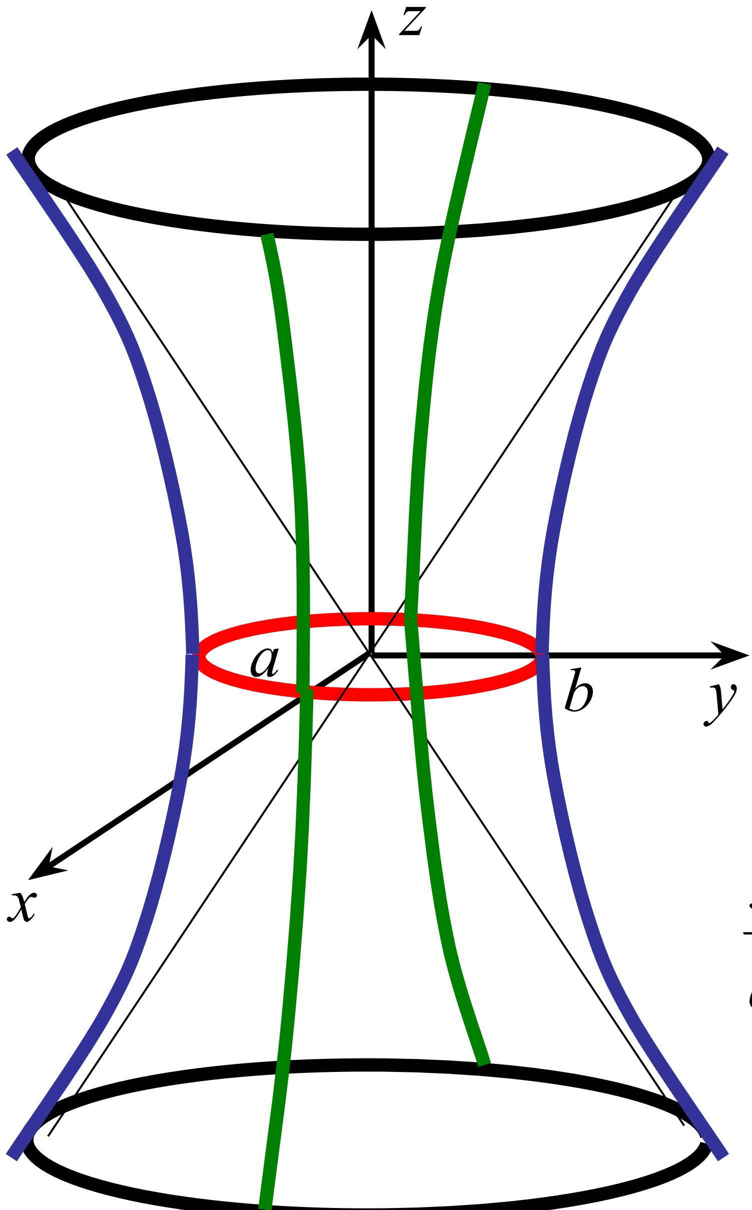
2. Гиперболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Однополостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b, c – *положительные константы*.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (2) – ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** однополостного гиперболоида.

Если $a=b$, то однополосный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг своей мнимой оси.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

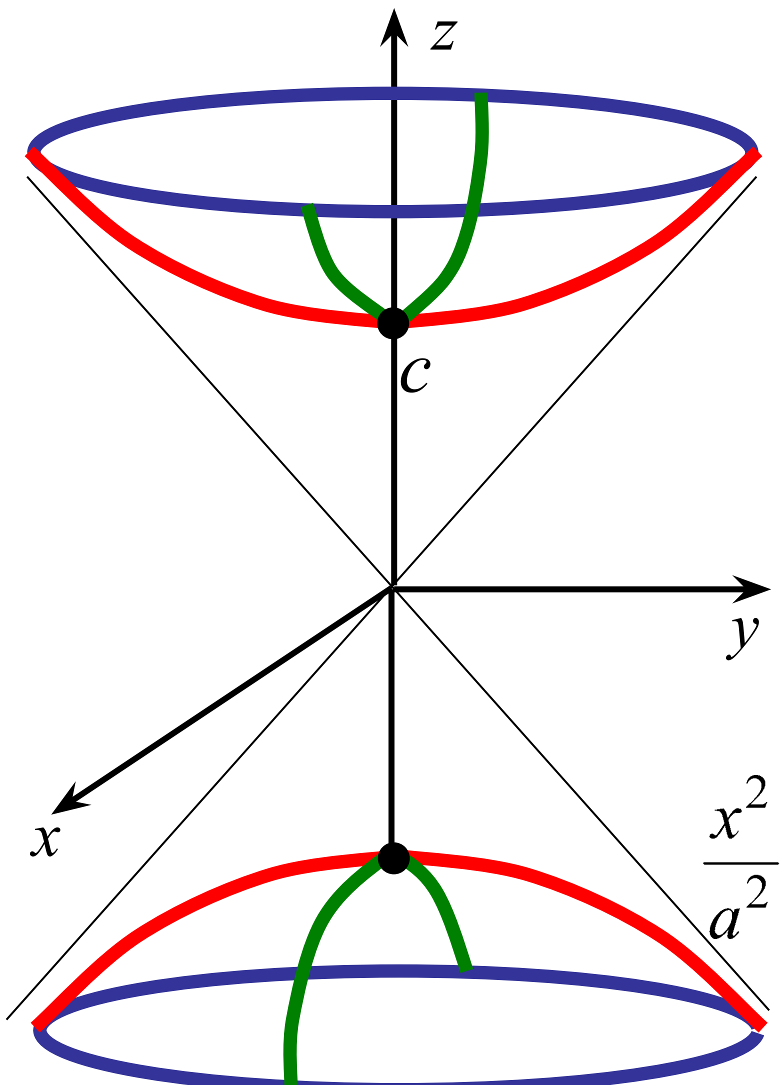
тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Двуполостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (3)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (3) – ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** двуполостного гиперболоида.

Если $a=b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг своей действительной оси.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

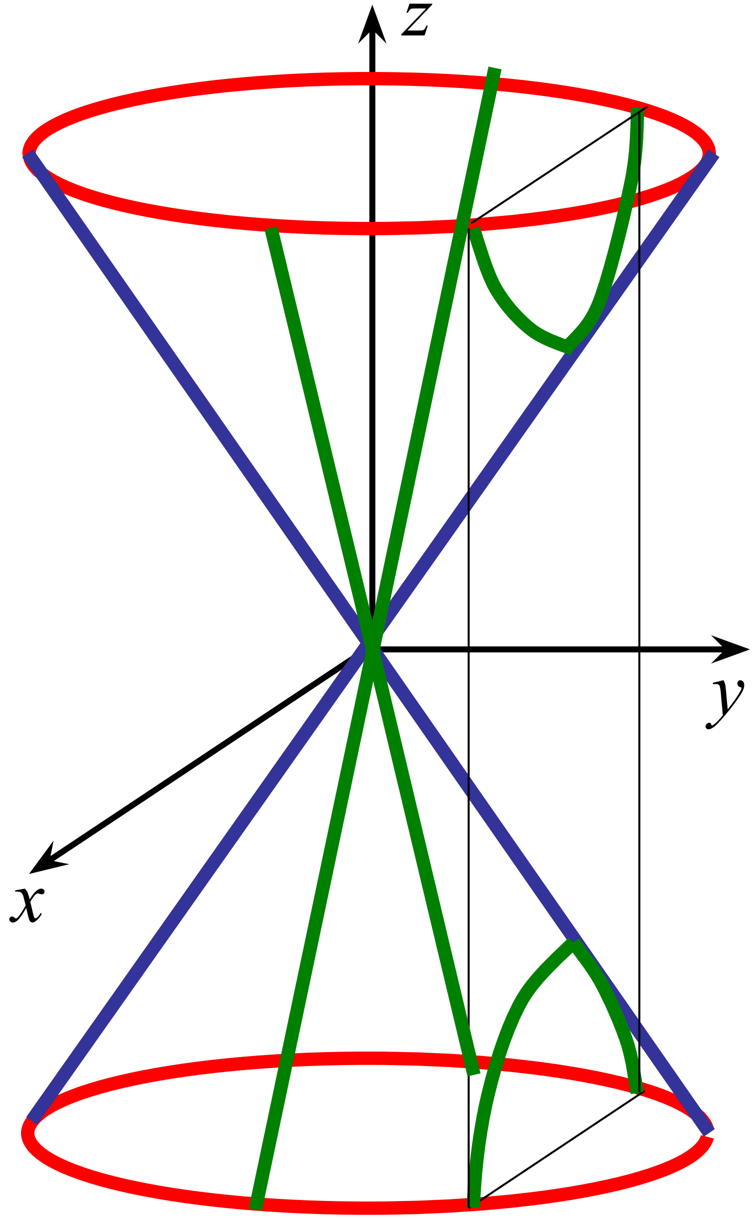
3. Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Конусом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,, \qquad (4)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой конус имеет уравнение (4) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (4) – ***каноническим уравнением конуса***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** конуса. Центр симметрии O называется ***вершиной конуса***.

Если $a=b$, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

вокруг оси Oz.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

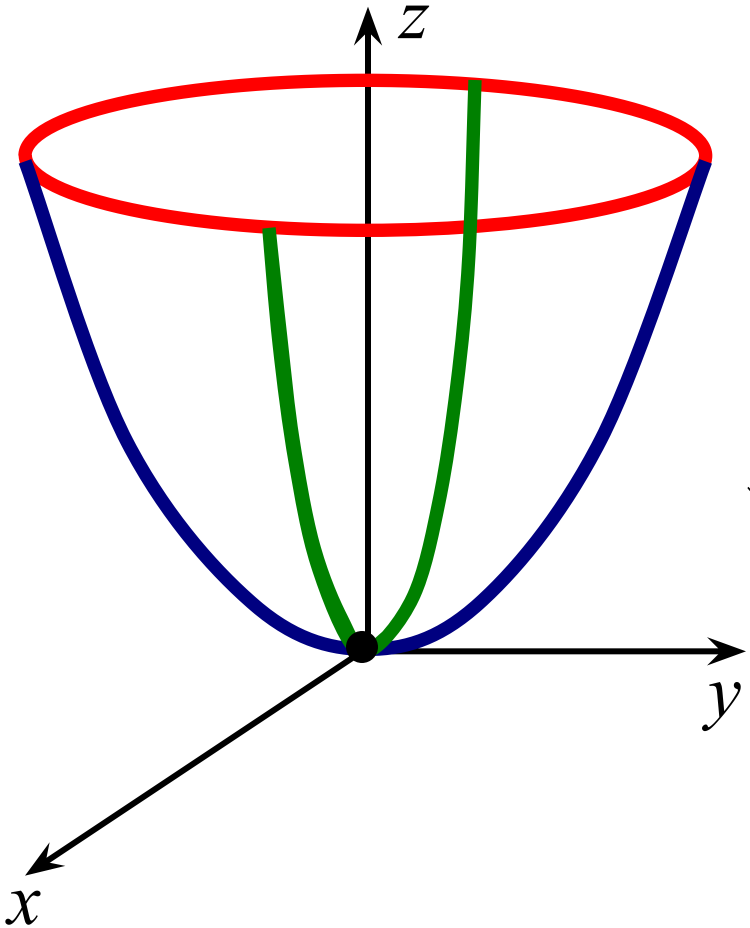
4. Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллиптическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \qquad (5)$$

где a, b *– положительные константы*.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (5) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (5) – ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a=b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2 z$ вокруг оси Oz.

Замечания: 1) Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

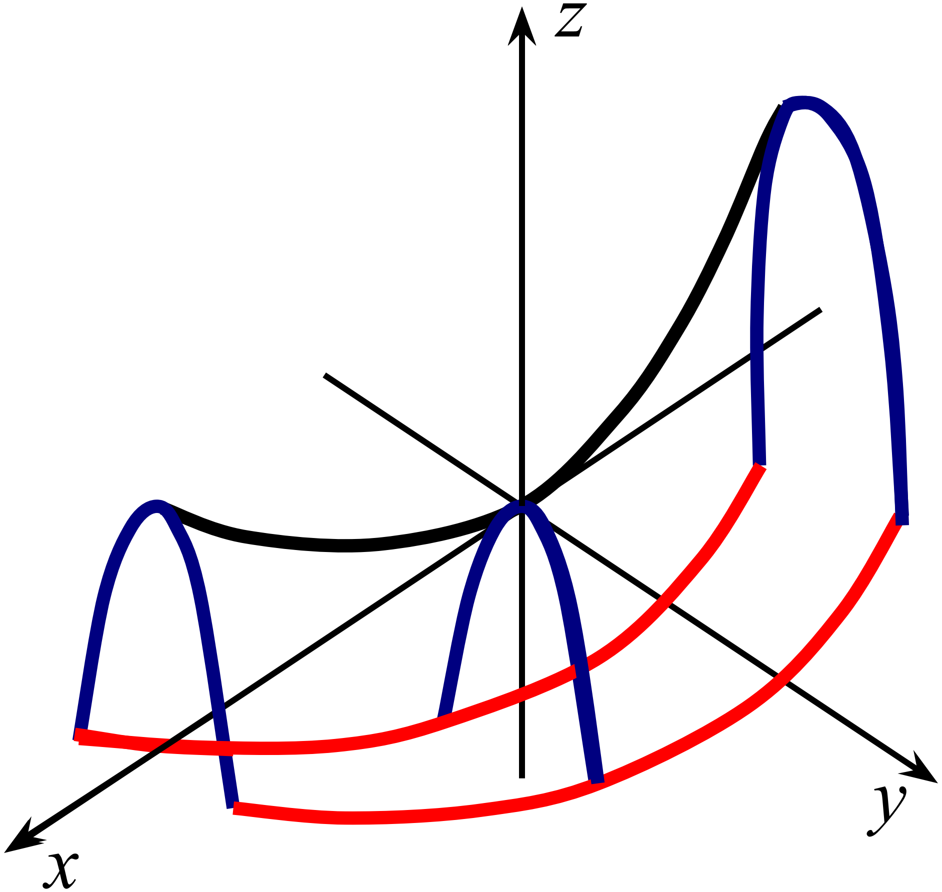
Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,, \qquad (6)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (6) – ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.



Величины a и b называются ***параметрами*** параболоида.

Замечания: 1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

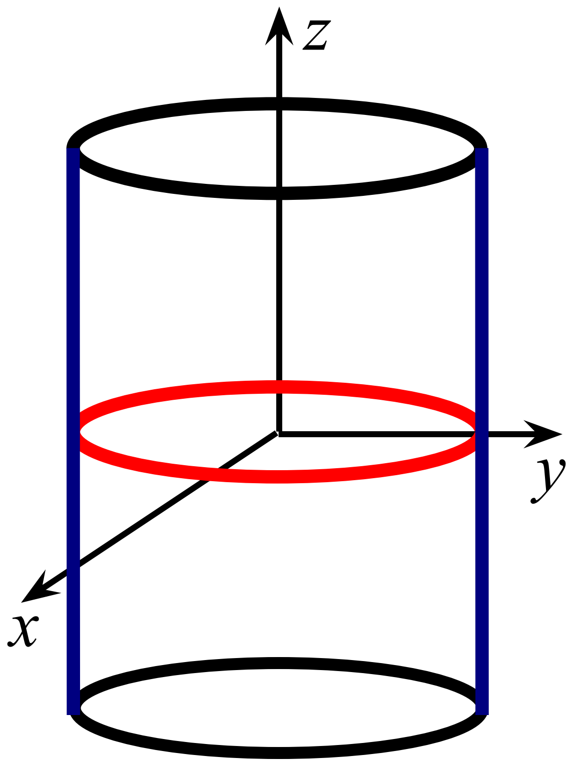
определяют параболоиды, «вытянутые» вдоль осей Oz и Oy соответственно.

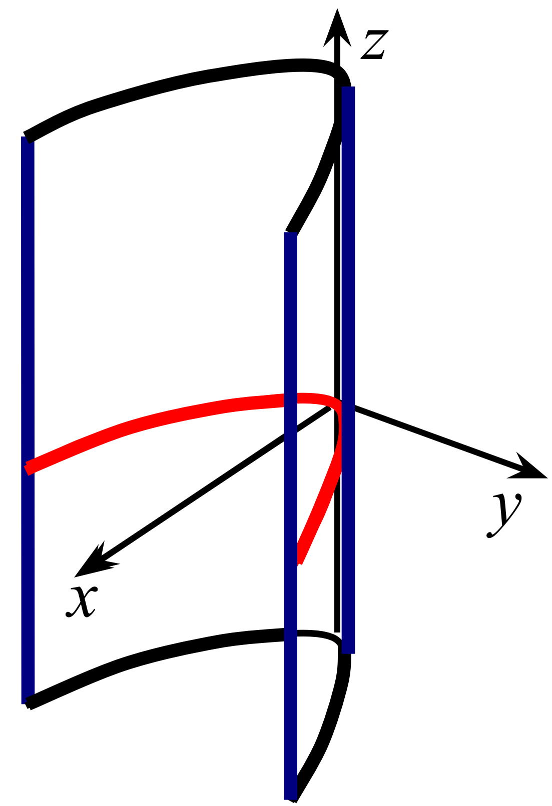
Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

5. Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Цилиндрической поверхностью*** (***цилиндром***) *называется поверхность, которую описывает прямая (называемая **образующей**), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой **направляющей**)* .

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.





Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.