



## ЧАСТЬ 2 ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВА

Ларионов Владимир Борисович  
E – mail: [vb\\_larionov@mti.edu.ru](mailto:vb_larionov@mti.edu.ru)

## 2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Отношения* – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее часто используют *унарные* и *бинарные* отношения.

*Унарные (одноместные) отношения* отражают наличие определенного свойства  $R$  у элементов некоторого множества  $A$  (например, «быть студенткой» среди множества всех студентов).

*Способ задания унарных отношений в памяти ЭВМ*- упорядочить элементы конечного универсума и подмножеству, задающему унарное отношение, поставить в соответствие его характеристический вектор. В памяти ЭВМ такое представление является двоичным кодом. Пример показан в табл. 1.3.

Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», характеристический вектор	1	0	1	0	0	1

### *Действия над отношениями на множествах*

*Операции над унарными отношениями.* Поскольку унарное отношение определяется подмножеством универсума  $U$ , то и операции над такими отношениями сводятся к операциям над множествами:

1. *Объединение*  $R_1 \cup R_2 = \{ a \in R_1 \text{ или } a \in R_2 \}$ .

Например,  $R_1$  – «быть отличником»,  $R_2$  – «быть хорошистом». Тогда унарное отношение  $R = R_1 \cup R_2$  – «учиться хорошо».

2. *Пересечение*  $R_1 \cap R_2 = \{ a \in R_1 \text{ и } a \in R_2 \}$ .

Например, пусть  $R_3$  – унарное отношение «учиться на бюджете». Тогда, с учетом предыдущего примера, отношение  $R$  – «получать стипендию» можно записать так:

$R = (R_1 \cup R_2) \cap R_3$  – «учиться хорошо и учиться на бюджете».

В памяти ЭВМ составные унарные отношения можно определять как логические операции над соответствующими им характеристическими векторами. Пример показан в табл. 1.4

*Пример: унарные отношения, представленные двоичным кодом*

Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», $R_1$ , характеристический вектор	1	0	1	0	0	1
Унарное отношение «хорошист», $R_2$ , характеристический вектор	0	1	0	0	1	0
Унарное отношение «учиться хорошо», $R_1 \cup R_2$ , характе- ристический вектор	1	1	1	0	1	1
Унарное отношение «быть на бюджете», $R_3$ , характеристиче- ский вектор	1	0	1	1	1	0
Унарное отношение «получать стипен- дию», $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$ , характеристический вектор	1	0	1	0	1	0

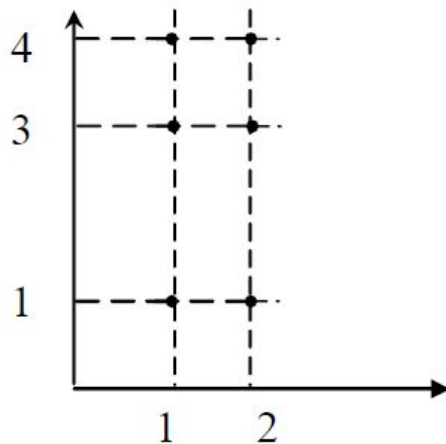


## ***Бинарные отношения***

*Бинарные (двухместные) отношения* используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов во множестве  $A$  («дружить», «любить», «быть моложе», «быть сыном», «быть подчиненным» – примеры бинарных отношений на множестве людей). Из школьной математики известны бинарные отношения (их в школе так и называли:

*Прямым (декартовым) произведением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству  $A$ , а второй элемент принадлежит  $B$ :*

Например, пусть  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3, 4\}$ . Тогда  $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$ . Геометрическое представление этого множества следующее



$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$



## *Определение бинарных отношений*

*Бинарное отношение.* Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. *Бинарным (двухместным) отношением  $R$  называется подмножество пар  $(a, b) \in R$  прямого произведения  $A \times B$ , то есть  $R \subseteq A \times B$ . Если элементы  $a$  и  $b$  находятся в отношении  $R$ , то это записывают так:  $a R b$ .*

Если  $A = B$ , то говорят, что  $R$  *есть отношение на множестве  $A$ :*

$$R \subset A \times A.$$

Обычно рассматривают бинарные отношения, заданные на одном множестве.

*Замечание.* Аналогично можно определить и 3-арные и вообще  $n$ -арные отношения, но в силу того, что информация в ЭВМ в основном подается в виде одномерного массива (вектора) и двумерного массива (матрицы), мы ограничимся бинарными отношениями.

### *Способы задания бинарных отношений*

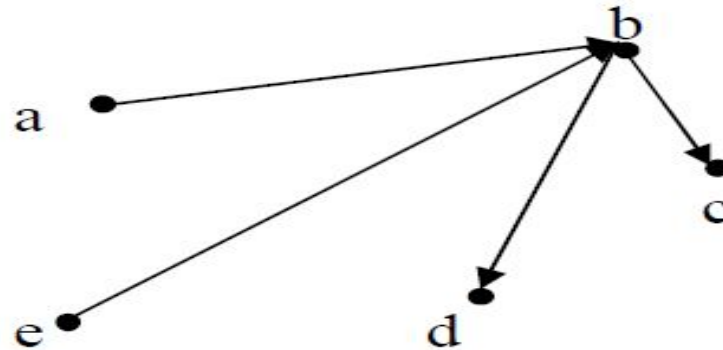
*Задание бинарных отношений в памяти ЭВМ.* Бинарное отношение  $R$  – это подмножество декартового произведения  $R \subset A \times A$ . Его можно задавать следующими способами:

1. *Списком (перечислением) пар*, на которых это отношение выполняется.

Например, на множестве  $A = \{a, b, c, d, e\}$  списком задано отношение  $R = \{(a, b), (b, c), (e, b), (b, d)\}$ .

2. *Ориентированным графом.* Наличие отношения между элементами  $a$  и  $b$  отображают стрелкой, которая проведена из вершины  $a$  в вершину  $b$ .

Например, приведенное выше отношение  $R$  можно задать графом:





3. *Характеристической матрицей (двумерным массивом), состоящей из нулей и единиц:*

$$\|R\| = R[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{если } a R b, \\ 0, & \text{если } a \bar{R} b. \end{cases}$$

Например, приведенное выше отношение  $R$  можно задать характеристической матрицей:

$$\|R\| = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} \{ a & b & c & d & e \} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{matrix} \end{matrix}.$$





## 2.2. Действия над бинарными отношениями

*Операции над бинарными отношениями.* Поскольку отношения – это подмножества декартового произведения  $R \subset A \times A$ , то для них определены те же операции, что и операции над множествами.

1. *Объединением отношений* является отношение

$$R = R_1 \cup R_2 = \{ (a, b) \mid (a, b) \in R_1 \text{ или } (a, b) \in R_2 \}.$$

Построить отношение  $R = R_1 \cup R_2$  можно, объединив соответствующим образом списки отношений  $R_1$  и  $R_2$  как подмножества или построив граф объединенного отношения.

Чтобы получить характеристическую матрицу объединенного отношения  $\|R\| = \|R_1 \cup R_2\|$ , необходимо логически сложить характеристические матрицы  $\|R_1\|$  и  $\|R_2\|$ .

**Примеры решения задач (объединение отношений)**

**Пример 1.2.1.** Отношения заданы списком:  $R_1 = \{(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)\}$ ,  $R_2 = \{(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)\}$ .

Определить отношение  $R = R_1 \cup R_2$ .

*Решение.* Построим характеристические матрицы отношений  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\|R_1\| = \begin{matrix} & \{a & b & c & d & e\} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad \|R_2\| = \begin{matrix} & \{a & b & c & d & e\} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Характеристическая матрица отношения  $R = R_1 \cup R_2$  равна логической сумме характеристических матриц  $R_1$  и  $R_2$ .

$$\|R\| = \|R_1\| + \|R_2\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Получим, что  $R = R_1 \cup R_2 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b)\}$ .

## *Примеры решения задач (пересечение отношений)*

2. Пересечением отношений является отношение:

$$R = R_1 \cap R_2 = \{ (a, b) \mid (a, b) \in R_1 \text{ и } (a, b) \in R_2 \}.$$

Построить отношение  $R = R_1 \cap R_2$  можно пересечением списков отношений  $R_1$  и  $R_2$ , рассматриваемых как подмножества.

Чтобы получить характеристическую матрицу отношения  $R = R_1 \cap R_2$ , необходимо поэлементно логически перемножить характеристические матрицы  $\|R_1\|$  и  $\|R_2\|$ .

**Пример 1.2.2.** Используя отношения  $R_1$  и  $R_2$  из примера 1.2.1, найти отношение  $R = R_1 \cap R_2$ .

*Решение:*

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)\},$$

$$R_2 = \{(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)\}.$$

Построим характеристические матрицы отношений  $R_1$  и  $R_2$ .

$$\|R_1\| = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \right\} \begin{array}{c} \{ a \ b \ c \ d \ e \} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}, \quad \|R_2\| = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \right\} \begin{array}{c} \{ a \ b \ c \ d \ e \} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Характеристическая матрица отношения  $R = R_1 \cap R_2$  равна логическому произведению характеристических матриц  $R_1$  и  $R_2$ .

$$\|R\| = \|R_1\| \times \|R_2\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получим, что  $R = R_1 \cap R_2 = \{(a, b), (e, a)\}$ .

### *Примеры решения задач (композиция отношений)*

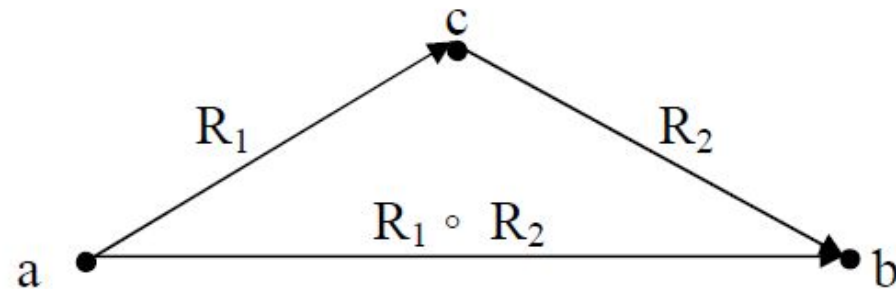
3. *Композиция отношений.* Пусть  $R_1 \subset A \times C$  – отношение из  $A$  в  $C$ , а  $R_2 \subset C \times B$  – отношение из  $C$  в  $B$ .

*Композицией двух отношений  $R = R_1 \circ R_2$  называется отношение  $R \subset A \times B$  из  $A$  в  $B$ , определяемое следующим образом:*

$$R = R_1 \circ R_2 = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B, \text{ и существует } c \in C, \text{ такое, что } a R_1 c \text{ и } c R_2 b \}$$

Композиция отношений на множестве  $A$  является отношением на множестве  $A$ .

Приведенное выше определение композиции можно трактовать как установление отношения между элементами  $a$  и  $b$  через обязательно существующего «посредника»  $c$ :



Чтобы получить характеристическую матрицу отношения  $R = R_1 \circ R_2$ , необходимо перемножить характеристические матрицы  $\|R_1\|$  и  $\|R_2\|$  по правилу перемножения матриц (строка на столбец), но под «суммой» и «произведением» подразумевать логические «сумму» и «произведение», то есть  $r[i, j] = \sum_{k=1}^n r_1[i, k] \times r_2[j, k]$ .



**Пример 1.2.3.** Используя отношения  $R_1$  и  $R_2$  из примера 1.2.1, найти отношение  $R = R_1 \circ R_2$ .

*Решение:*

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)\},$$

$$R_2 = \{(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)\}.$$

Построим характеристические матрицы отношений  $R_1$  и  $R_2$ .

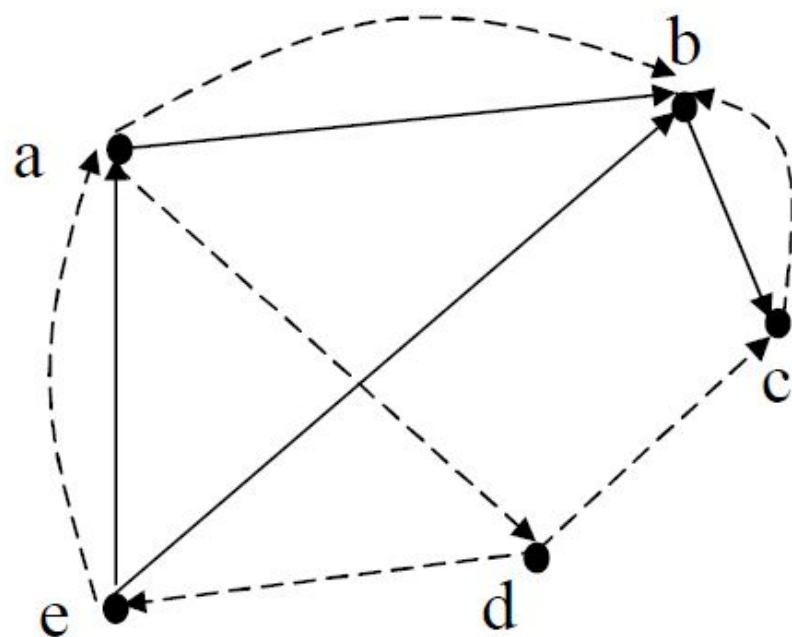
$$\|R_1\| = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} \{ a & b & c & d & e \} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix} \end{matrix}, \quad \|R_2\| = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} \{ a & b & c & d & e \} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix} \end{matrix}.$$

Построим характеристическую матрицу отношения  $R = R_1 \circ R_2$  :

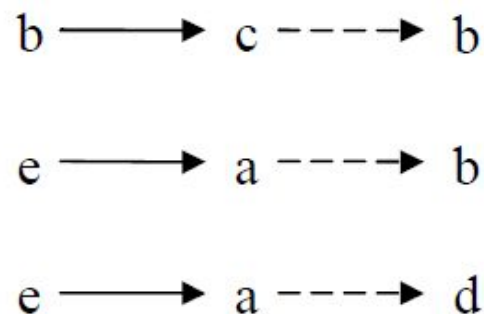
$$\|R\| = \|R_1 \circ R_2\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получим, что  $R = R_1 \circ R_2 = \{(b, b), (e, b), (e, d)\}$ .

*Замечание.* Чтобы увидеть, что отношение  $R = R_1 \circ R_2$  устанавливается через «посредника», изобразим совместно ориентированные графы отношений  $R_1$  и  $R_2$ . При этом отношения на  $R_1$  будем обозначать « $\longrightarrow$ », отношения на  $R_2$  будем обозначать « $-\!-\!-\longrightarrow$ »:



«Посредник»







### *Упражнения для самостоятельной работы*

Задано универсальное множество  $U$  и множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .  
(см.таблица 1)

Выполнить задание двумя способами:

- а) вычислить элементы результирующего множества, используя непосредственно операции над множествами;
  - б) сформировать характеристические векторы для исходных множеств и получить результирующее множество, используя действия над характеристическими векторами.
- Сравнить результаты.

Таблица 1.

Вариант	Дано	Найти
1	$U = \{-15, -14, -13, -12, -11\},$ $A = \{-15, -13, -12\}; B = \{-14, -12, -11\};$ $C = \{-15, -11\}; D = \{-12\}$	$A \cup \overline{C};$ $(B \cup C) \setminus (A \setminus D);$ $(U \setminus C) \cap A$
2	$U = \{a, b, c, d, e\}, A = \{a, b, c\}; B = \{b, c, d\};$ $C = \{a, e\}; D = \{d\}$	$\overline{A \cap B};$ $(B \setminus D) \setminus (A \cup C);$ $(U \setminus B) \cup D$
3	$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}; A = \{1, 3, 5\}; B = \{2, 4\};$ $C = \{2, 3, 4\}; D = \{5\}.$	$\overline{A \cap D};$ $((A \setminus C) \setminus D) \cup B;$ $(U \setminus A) \cup D.$

Таблица 1. продолжение

4	$U = \{2, 4, 6, 8, 10\}, A = \{2, 4\}; B = \{4, 6, 8\};$ $C = \{2, 6, 10\}; D = \{4\}.$	$A \cap \bar{D};$ $(B \setminus C) \cap D;$ $(A \setminus B) \cap (U \setminus D).$
5	$U = \{x, y, z, t, u\}, A = \{t\}; B = \{x, u\};$ $C = \{x, y, z\}; D = \{y, t\}.$	$C \cup \bar{D};$ $(A \cup C) \setminus B;$ $(U \setminus A) \setminus \bar{B}.$
6	$U = \{-10, -5, 5, 10, 15\}, A = \{-10, 10\};$ $B = \{-5, 5, 15\}; C = \{5, 10, 15\}; D = \{5\}.$	$A \cap \bar{B};$ $\overline{D \cap C} \setminus A;$ $U \cap (B \setminus \bar{D}).$

Таблица 1. продолжение

7	$U = \{10, 11, 12, 13, 14\}, A = \{10, 11, 12\};$ $B = \{12, 13, 14\}; C = \{10, 14\}; D = \{12\}.$	$(B \cup A) \setminus \bar{C}; \overline{B \cup D};$ $(U \setminus (B \cap C)) \setminus D.$
8	$U = \{a, b, c, d, e, f, g\}, A = \{a, b, c, d\},$ $B = \{c, d, e, f, g\}, C = \{d, e, f\}, D = \{f, g\}.$	$(U \setminus A) \setminus B;$ $C \cap \bar{D}; \overline{A \cap C}.$
9	$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$ $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{4, 5, 6, 7\}; C = \{2, 4, 6\};$ $D = \{2, 4\}.$	$(B \cup D) \setminus (A \cap C);$ $\overline{D \cup C}; (U \setminus \bar{A}) \setminus \bar{D}.$
10	$U = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}, A = \{1, 3, 9\}; B = \{5, 7, 9\};$ $C = \{4, 5\}; D = \{9\}.$	$(U \setminus D) \setminus C;$ $(\overline{C \setminus B}) \cup A; A \cap D.$