Дискретная математика

ЧАСТЬ 1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Ларионов Владимир Борисович
E – mail: vb_larionov@mti.edu.ru

Свойства действий над множествами

№	Свойства объединения множеств
1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения $\cup$);
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$);
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$);
4	$A \cup \varnothing = A$;
5	$A \cup \overline{A} = U$;
6	$A \cup A = A$;
7	$A \cup U = U$;
8	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);

№	Свойства пересечения множеств
1′	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2′	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$);
3′	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$);
4′	$A \cap U = A$;
5′	$A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6′	$A \cap A = A$;
7′	$A \cap \varnothing = \varnothing$;
8′	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);
9′	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).

1.3. Представление множества и его подмножеств двоичным кодом

Пусть задано некоторое конечное упорядоченное множество мощности *n*, например, U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, n = 7. Будем считать, что это *универсум*. Конечное множество и все его подмножества в памяти ЭВМ удобно представлять двоичным кодом (характеристическим вектором или, что то же самое, «словом» заданной длины). Множеству U поставим в соответствие характеристический вектор (1 1 1 1 1 1 1), пустому множеству O поставим в соответствие вектор (0 0 0 0 0 0 0), множеству {2, 3, 5, 7} – характеристический вектор (0 1 1 0 1 0 1). Таким образом, между множеством всех подмножеств и множеством «слов» длины 7, записанных двумя символами «0» и «1», установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, множество всех подмножеств множества из 7 элементов равно 2^7.

Утверждение. Если мощность конечного множества U равна | U |, то мощность множества всех его подмножеств равна $2^{|U|}$.

Примеры действий над множествами, представленными двоичным кодом

Пример. Пусть заданы множества:

$$U = \{1,2,3,4,5\};\ A = \{1,3,5\};\ B = \{2,3,4\};\ C = \{2,4\};\ D = \{5\}.$$

тогда им соответствуют характеристические вектора:

$$\vec{u} = (11111);\ \vec{a} = (10101);\ \vec{b} = (01110);\ \vec{c} = (01010);\ \vec{d} = (00001)$$

Пример. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Подмножества будут иметь вид: $\{\,\text{O}\,\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, т. е. $2^{|A|} = 2^3 = 8$.

Задачи с множествами, особенно на компьютере, удобно решать, используя характеристические векторы.

1. Операция объединения подмножеств $A \cup B$ может быть выполнена логическим сложением соответствующих элементов характеристических векторов этих подмножеств.

При объединении множеств $A \cup B$ соответствующие элементы характеристических векторов складывают по правилу:

$$0 + 0 = 0,$$

$$0 + 1 = 1,$$

$$1 + 0 = 1,$$

$$1 + 1 = 1.$$

2. Операция пересечения подмножеств $A \cap B$ может быть выполнена логическим умножением соответствующих элементов характеристических векторов этих подмножеств.

При пересечении множеств $A \cap B$ соответствующие элементы характеристических векторов считают по правилу:

$$0 \times 0 = 0,$$

$$0 \times 1 = 0,$$

$$1 \times 0 = 0,$$

$$1 \times 1 = 1.$$

3. При нахождении отрицания A нули меняют на единицы, единицы – на нули.

4. При нахождении разности $A \setminus B$, используют формулу $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Примеры решения задач

Пример №1

Например, пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, А = {1, 2, 4, 5} и В = {3, 5}. Характеристическим вектором множества A является вектор $\vec{a} = (1\,1\,0\,1\,1\,0)$. Характеристический вектор множества B равен $\vec{b} = (0\,0\,1\,0\,1\,0)$.

Вычислим характеристический вектор множества $A \cup \overline{B}$. Его можно записать следующим образом:

$\vec{a}$ или («не» $\vec{b}$) = (1 1 0 1 1 0) или (1 1 0 1 0 1) = (1 1 0 1 1 1).

Следовательно, $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

Замечание:

5. При нахождении симметричной разности $A \Delta B$ используют формулу $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

При этом учтем равенство $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

Примеры №2

Например, пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 2, 4, 5} и B = {3, 5}. Характеристическим вектором множества A является вектор $\vec{a} = (1\,1\,0\,1\,1\,0)$.

Характеристический вектор множества B равен $\vec{b} = (0\,0\,1\,0\,1\,0)$.

1. Вычислим характеристический вектор множества $A \cup B$. Его можно записать следующим образом:

$$\vec{a} + \vec{b} = +\begin{array}{c} 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,1\,0 \end{array}$$. Следовательно, $A \bigcup B$ = {1, 2, 3, 4, 5}.

2. Вычислим характеристический вектор множества $A \bigcap B$. Его можно записать следующим образом:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \times \frac{\begin{array}{c} 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 \end{array}}{000010}$$. Откуда $A \bigcap B = \{6\}$

3. Вычислим характеристический вектор множества $\overline{A}$.

Вектор $\vec{a} = (110110)$, вектор $\overline{\vec{a}} = (0\,0\,1\,0\,0\,1)$. Тогда множество $\overline{A} = \{3,\ 6\}$.

4. Вычислим разность $A \setminus B$, используя формулу $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

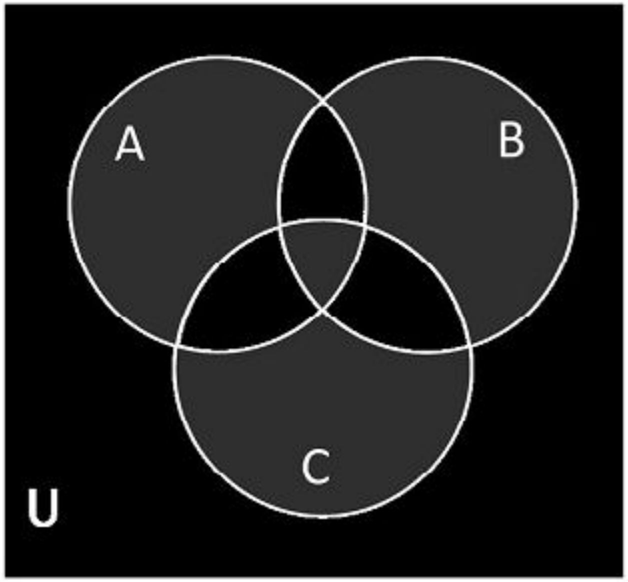
Характеристический вектор множества A: $\vec{a} = (1\,1\,0\,1\,1\,0)$.

Характеристический вектор множества B: $\overline{\vec{b}} = (1\,1\,0\,1\,0\,1)$.

$$\vec{a} \times \overline{\vec{b}} = \times \begin{array}{c} 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,0 \end{array}.$$ Откуда A \ B = {1, 2, 4}.

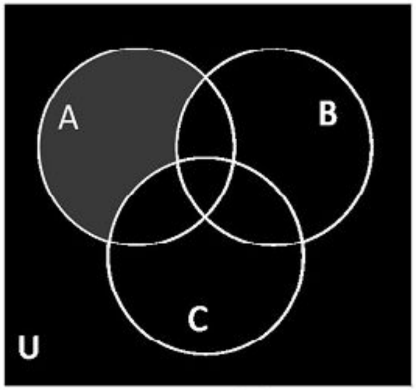
Примеры №3

Описать множество, соответствующее закрашенной области, представленной на диаграмме Эйлера - Венна

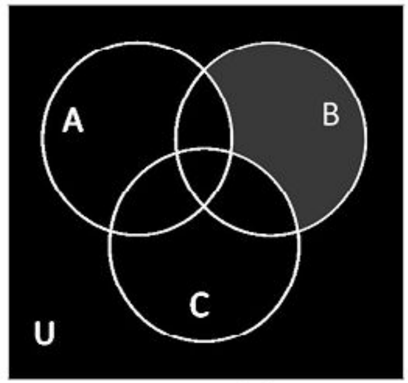


Примеры решения задач

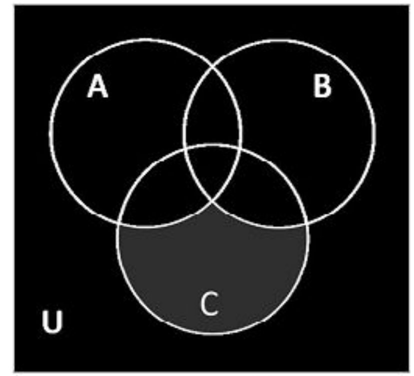
Последовательность действий:



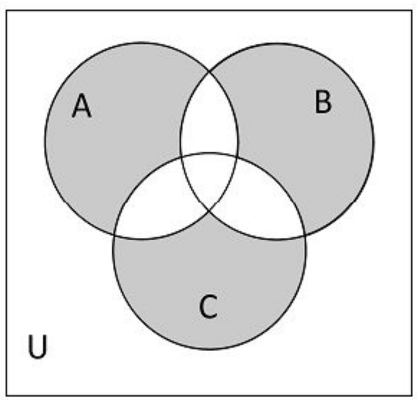
1) $A \setminus (B \cup C)$



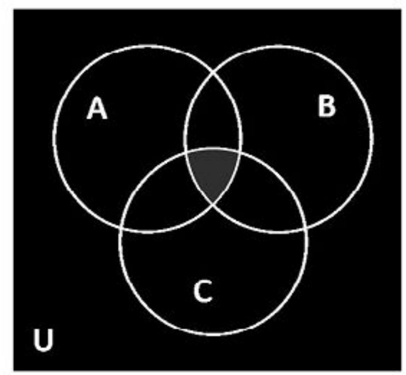
2) $B \setminus (A \cup C)$



3) $C \setminus (A \cup B)$



4) $(A \setminus (B \cup C) \cup B \setminus (A \cup C)) \cup C \setminus (A \cup B))$



5) $A \cap B \cap C$

Ответ: $(A \setminus (B \cup C)) \cup B \setminus (A \cup C)) \cup C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$

Ответ: $(A\setminus(B\cup C))\cup B\setminus(A\cup C))\cup C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C)$

Замечание. Очевидно, что такое описание формулой не единственно. Например, ответ можно «упростить», воспользовавшись законами булевой алгебры, и получить ответ, содержащий только операции объединения ($\cup$ – дизъюнкт), пересечения ($\cap$ – конъюнкт) и отрицания ($\neg$).

Существует единый алгоритм описания множества формулой в так называемой совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

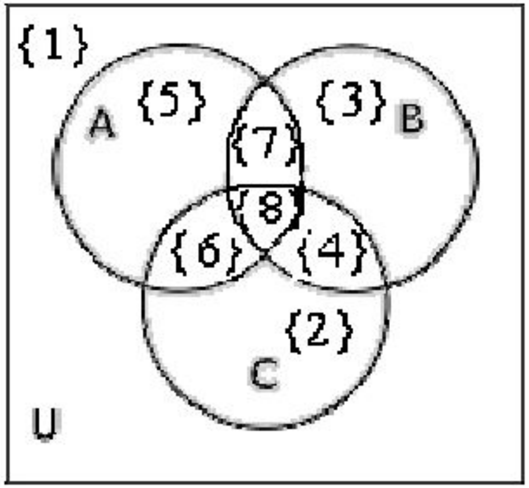
Примеры №4

Пример 1.1.3. На диаграмме Венна указаны мощности множеств: $|\{1\}|=30$, $|\{2\}|=7$, $|\{3\}|=5$, $|\{4\}|=2$, $|\{5\}|=6$, $|\{6\}|=4$, $|\{7\}|=8$, $|\{8\}|=2$.

Необходимо:

а) заштриховать на диаграмме множество, которое задается формулой $(\overline{A \cup B) \setminus C}$;

б) определить мощность множества $\left|(\overline{A \cup B) \setminus C}\right|$.



Решение. Введем обозначения: если элемент принадлежит множеству, будем использовать символ 1 – истина, если не принадлежит, будем использовать символ 0 – ложь. Расчеты оформим в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2

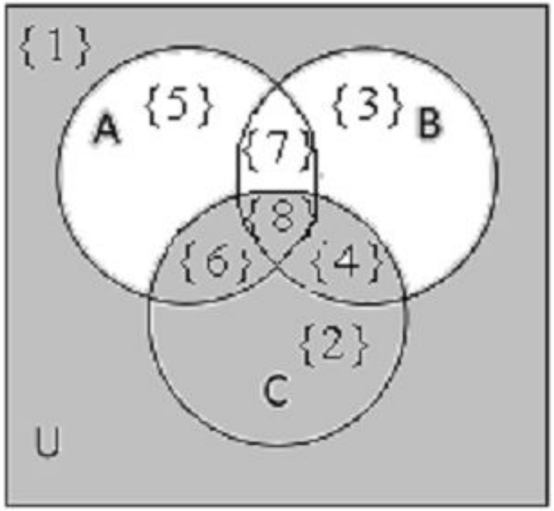
$x \in \{N\}$	$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus C$	$\overline{(A \cup B) \setminus C}$
$\{1\}$	0	0	0	0	0	1
$\{2\}$	0	0	1	0	0	1
$\{3\}$	0	1	0	1	1	0
$\{4\}$	0	1	1	1	0	1
$\{5\}$	1	0	0	1	1	0
$\{6\}$	1	0	1	1	0	1
$\{7\}$	1	1	0	1	1	0
$\{8\}$	1	1	1	1	0	1

Таким образом, получим следующие результаты:

а) $\overline{(A \cup B) \setminus C} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup$
$(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;

б) построим область на диаграмме Венна и найдем мощность множества:

$$\left|\overline{(A \cup B) \setminus C}\right| = |\{1\}| + |\{2\}| + |\{4\}| + |\{6\}| + |\{8\}| = 30 + 7 + 2 + 4 + 2 = 45.$$



Упражнения для самостоятельной работы

Задано универсальное множество U и множества A, B, C и D. (см.таблица 1)

Выполнить задание двумя способами:

а) вычислить элементы результирующего множества, используя непосредственно операции над множествами;

б) сформировать характеристические векторы для исходных множеств и получить результирующее множество, используя действия над характеристическими векторами.

Сравнить результаты.

Таблица 1.

Вариант	Дано	Найти
1	$U=\{-15,-14,-13,-12,-11\}$, $A=\{-15,-13,-12,\}$; $B=\{-14,-12,-11\}$; $C=\{-15,-11,\}$; $D=\{-12\}$	$A\cup\overline{C}$; $(B\cup C)\setminus(A\setminus D)$; $(U\setminus C)\cap A$
2	$U=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$; $C=\{a,e\}$; $D=\{d\}$	$\overline{A\cap B}$; $(B\setminus D)\setminus(A\cup C)$; $(U\setminus B)\cup D$
3	$U=\{1,2,3,4,5\}$; $A=\{1,3,5\}$; $B=\{2,4\}$; $C=\{2,3,4\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{D}}$; $((A\setminus C)\setminus D)\cup B$; $(U\setminus A)\cup D$.

Таблица 1. продолжение

4	$U=\{2,4,6,8,10\}$, $A=\{2,4\}$; $B=\{4,6,8\}$; $C=\{2,6,10\}$; $D=\{4\}$.	$A\cap\overline{D}$; $(B\setminus C)\cap D$; $(A\setminus B)\cap(U\setminus D)$.
5	$U=\{x,y,z,t,u\}$, $A=\{t\}$; $B=\{x,u\}$; $C=\{x,y,z\}$; $D=\{y,\ t\}$.	$C\cup\overline{D}$; $(A\cup C)\setminus B$; $(U\setminus A)\setminus\overline{B}$.
6	$U=\{-10,-5,5,10,15\}$, $A=\{-10,10\}$; $B=\{-5,5,15\}$; $C=\{5,10,15\}$; $D=\{5\}$.	$A\cap\overline{B}$; $\overline{D\cap C}\setminus A$; $U\cap(B\setminus\overline{D})$.

Таблица 1. продолжение

7	$U=\{10,11,12,13,14\}$, $A=\{10,11,12\}$; $B=\{12,13,14\}$; $C=\{10,14\}$; $D=\{12\}$.	$(B\cup A)\setminus\overline{C}$; $\overline{B\cup D}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$.
8	$U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f,g\}$, $C=\{d,e,f\}$, $D=\{f,g\}$.	$(U\setminus A)\setminus B$; $C\cap\overline{D}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}$.
9	$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{4,5,6,7\}$; $C=\{2,4,6\}$; $D=\{2,4\}$.	$(B\cup D)\setminus(A\cap C)$; $\overline{D\cup\overline{C}}$; $(U\setminus\overline{A})\setminus\overline{D}$.
10	$U=\{1,3,4,5,7,9\}$, $A=\{1,3,9\}$; $B=\{5,7,9\}$; $C=\{4,5\}$; $D=\{9\}$.	$(U\setminus D)\setminus C$; $(\overline{C\setminus B})\cup A$; $A\cap D$.