Дискретная математика

ЧАСТЬ 4 Элементы математической логики

Ларионов Владимир Борисович
E – mail: vb_larionov@mti.edu.ru

4.1. Основные понятия и определения

Математическая логика – это набор формальных правил, записанных специальным математическим языком и позволяющих «правильно думать» компьютеру.

Основным объектом математической логики является высказывание.

Высказывание – повествовательное предложение, о котором в заданных условиях можно однозначно сказать, является ли оно истинным или ложным. Высказывание является простым, если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества).

Примеры простых высказываний:

A – сегодня высокая влажность;

B – сегодня высокая температура;

C – я сегодня чувствую себя плохо.

Высказывание называется *сложным* (составным), если оно составлено из простых с помощью логических связок. В естественном языке роль связок играют такие грамматические средства: союзы («и», «или», «не»), слова «если… то», «тогда и только тогда».

Определение математических операций над высказываниями

- Пример задания сложного высказывания

Например: если высокая влажность или высокая температура, то я чувствую себя плохо.

Точный математический смысл логическим связкам придают с помощью понятия булевой функции.

Булевой функцией n аргументов называется функция вида $f: E_2^n \to E_2$, где $E = \{0, 1\}$, т. е. это функция, принимающая только два значения: 0 – «ложь» и 1 – «истина», и аргументом этой функции являются n-мерные двоичные векторы.

Принято множество булевых функций от n аргументов обозначать так:

$$P_n := \{f \mid E_2^n \to E_2\}.$$

Поскольку число различных значений аргументов конечно, то любую булеву функцию можно просто задать таблично, указав, в какой из своих «точек» она принимает значение 0, а в какой 1. Такое табличное значение булевой функции называют *таблицей истинности*.

Если число аргументов n, то количество строк в таблице истинности булевой функции f равно 2^n.

Таблица истинности булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$:

x_1	x_2	. . . .	x_{n-1}	x_n	f – значение
0	0		0	0	
0	0		0	1	
0	0		1	0	
- -	- -		- -	- -	
1	1		1	0	
1	1		1	1	

Число различных булевых функций от n переменных тоже конечно и составляет: $|P_n| = 2^{2^n}$, т. е. с ростом n число булевых функций растет быстро.

Булевы функции двух переменных. Булевых функций двух переменных, x и y, всего $|P_2| = 2^{2^2} = 16$.

Перечислим их, задав их таблицы истинности:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Специальное обозначение		$\equiv 0$	$x \wedge y$					$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$					$x \to y$	$x \mid y$	$\equiv 1$

Некоторые из этих функций в математической логике имеют специальное название и обозначение.

Выделим их особо.

$f_0(x, y) \equiv 0$ – *тождественный ноль*, эта функция при любых значениях аргументов (x, y) принимает значение «0» – ложь.

$f_{15}(x, y) \equiv 1$ – *тождественная единица*, эта функция при любых значениях аргументов (x, y) принимает значение «1» – истина.

Дизъюнкция. Функция $f_7(x, y) = x \vee y$ называется дизъюнкцией, «$\vee$» – знак связки, говорят: «Связка типа *или*». Ввиду ее важности выпишем еще раз ее таблицу истинности:

x	y	x ∨ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

То есть дизъюнкция равна 1, если хотя бы одна переменная, x или y, равна значению 1 – истина. Часто дизъюнкцию называют *логическим сложением*.

Например, x – сегодня высокая влажность (аргумент x), y – сегодня высокая температура (аргумент y), z – чувствую себя плохо (функция f).

Тогда запись $Z = x \vee y$ – означает что данный человек чувствует себя плохо, когда x = 1 – высокая температура или y = 1 – высокая влажность, возможно и то и другое.

Конъюнкция. Функцию $f_1(x,y)=x\Lambda y$ (часто обозначают и так $x\cdot y$; $x\,\&y$) называют конъюнкцией, ее таблица истинности:

x	y	$x\Lambda y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

То есть конъюнкция равна единице только в одном случае: когда x и y вместе равны 1.

Конъюнкцию часто называют логическим умножением.

Например, в условиях предыдущего примера конъюнкция $Z = x\Lambda y$ – означает «чувствую себя плохо» если x – «высокая влажность» и y – «высокая температура».

Ниже будет доказано, что любую из остальных булевых функций можно выразить, через $\bar{x}$ – отрицание, $x \vee y$ – дизъюнкцию и $x \wedge y$ – конъюнкцию, однако некоторые из других функций получили собственные имена и математические обозначения. Приведем их.

Неравнозначность: $f_6(x,y) = x \oplus y = (x \backslash y) \cup (y \backslash x) = (x \cap \bar{y}) \cup (y \cap \bar{x})$

Эта функция равна 1, когда значения ее аргументов различны, и равна 0, когда они равны, поэтому ее и называют неравнозначностью.

Функция истинности:

x	y	x⊕y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Например, в терминах предыдущего примера, $Z = x \oplus y$ принимает значение «истина», когда в наличии только один погодный фактор: либо высокая температура, либо высокая влажность.

Равнозначность (эквивалентность): $f_9(x, y) = x_1 \sim x_2$ (обозначают и так $x \leftrightarrow y$). Эта функция равна 1, когда значения ее аргументов равны оба «0» или оба «1».

Таблица истинности:

x	y	x~y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Еще три функции имеют свои наименования.

Импликация $f_{13}(x, y) = x \to y$, читают: из x следует y.

Функция истинности:

x	y	x→y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f_{13}(x,y) = x \to y = \bar{x} \cup y = \overline{\bar{x} \cap y}$$

Стрелка Пирса $f_8(x, y) = x \downarrow y$.

Функция истинности:

x	y	x↓y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f_8(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \cup y} = \bar{x} \cap \bar{y}$$

Штрих Шеффера: $f_{14}(x, y) = x \mid y$.

Функция истинности:

x	y	x | y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_{14}(x,y) = x|y = \overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$$

Сложные логические формулы

Формулы. Подставляя рассмотренные функции друг в друга и рассматривая функцию от функции, мы получим сложные логические формулы.

Примеры задания сложных функций

Пример 1.4.1. Записать логическими формулами следующее высказывание: если допоздна работаешь за компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью.

Решение. Обозначим простые высказывания:

x – допоздна работаешь за компьютером;

y – пьешь много кофе;

z – плохое настроение;

u – головная боль.

Тогда сложное высказывание, заданное в условии задачи, можно записать формулой: $(x \wedge y) \rightarrow (z \vee u)$.

Равносильность (эквивалентность) логических функций

Формулы, имеющие одинаковые таблицы истинности, будем называть равносильными (эквивалентными).

Проверить равносильность формул можно двумя способами.

Во-первых, способом эквивалентных преобразований, который обычно применяется в «непрерывной» математике.

Применяя этот способ, над одной из формул производят эквивалентные преобразования, пока не получат вторую.

Пример 1.4.3. Доказать равносильность формул:

$$x^3 - y^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Решение:

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$ – формулы равносильны.

Доказательство равносильности путем применения таблиц истинности

Во-вторых, сравнением таблиц истинности формул, что обычно применяется в дискретной математике.

Две формулы эквивалентны, если они совпадают при всех возможных значениях аргумента, т. е. имеют одинаковые таблицы истинности.

Пример 1.4.4. Доказать эквивалентность формул:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

Решение. Составим таблицы истинности формул.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \downarrow y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0

Формулы эквивалентны.

Таблица эквивалентных логических формул

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\} - \text{коммутативность.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y(y \wedge z) \\ x \vee y(y \vee z) \end{array} = \begin{array}{l} (x \wedge y) \wedge z \\ (x \vee y) \vee z \end{array}\right\} - \text{ассоциативность.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y(y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee y(y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z) \end{array}\right\} - \text{дистрибутивность.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge 0 = 0 \\ x \vee 0 = x \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} x \wedge 1 = x \\ x \vee 1 = 1 \end{array}\right\} - \text{тождества с константами.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y = x \\ x \vee (x \wedge y = x \end{array}\right\} - \text{закон поглощения.}$$

Таблица эквивалентных логических формул

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}\end{array}\right\}$$ – законы де Моргана (один из них доказан выше).

$x \vee \bar{x} = 1$ – закон исключенного третьего.

$x \wedge \bar{x} = 0$ – закон противоречия.

$\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания.

$\bar{x} \wedge y \vee x = y \vee x$ – правило вычеркивания.

$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$.

$x \leftrightarrow y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$.

$x \oplus y \quad x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \vee y$.

$x | y = \bar{x} \wedge \bar{y}$. $\quad x \downarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y}$ – доказано выше.

Упражнения для самостоятельной работы

ТЕМА 2 ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Задание 6. Пусть есть конечное множество A (табл. 2.3).

1. Задать отношение R (табл. 2.3):

   а) списком;

   б) характеристической матрицей.

ТАБЛИЦА 2.3.

Вариант	A	R
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	«быть строго больше»
2		«быть строго меньше»
3		«быть равно»
4		«быть не равно»
5		«быть делителем»
6		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
7		«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
8		«отличаться на 2»

ТАБЛИЦА 2.3. (продолжение)

Вариант	A	R
9	{2, 4, 6, 8, 10, 12}	«быть строго меньше»
10		«быть строго больше»
11		«быть равно»
12		«отличаться на 6»
13		«быть не равно»
14		«быть делителем»
15		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
16		«отличаться на 4»

Задание 8. Отношения R_1 и R_2 заданы списком (табл. 2.6). Используя характеристические матрицы, построить отношения $R_3 = R_1 \cup R_2$, $R_4 = R_1 \cap R_2$, $R_5 = R_1 \circ R_2$.

ТАБЛИЦА 2.6

Вариант	R_1	R_2
1	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
2	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
3	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (e, a), (a, d), (b, e)}
4	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (a, b), (b, e), (c, a)}
5	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (b, c), (c, a), (d, b)}
6	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b), (c, d)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
7	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c), (d, e)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
8	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d), (e, a)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (a, e), (a, d), (b, e)}
9	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e), (a, b)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (b, a), (b, e), (c, a)}
10	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a), (b, c)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (c, b), (c, a), (d, b)}

ВАРИАНТЫ 1 и 6

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0, 1, …, 9. Сколько различных кодов можно получить?

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 4x100м. Сколькими способами это можно сделать?

3. Определить число различных бросаний двух одинаковых кубиков.

4. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами равной ширины, если имеется материя 6 цветов? Порядок следования цветов важен. Все цвета на флаге различны.

5. Сколькими способами могут встать в круг 10 человек?

6. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинствам. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

ВАРИАНТЫ 2 и 7

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Сколько различных сигналов можно подать шестью флажками различных цветов? Отличие сигналов заключается в порядке расположения разноцветных флажков на мачте.

2. Сколькими способами можно составить подразделение из 6 рабочих четырех специальностей?

3. В группе из 25 человек разыгрывается три различных приза. Призы могут достаться одному человеку, двоим, троим. Сколькими способами призы могут распределиться?

4. Сколькими способами может быть выбрано 5 номеров из 36?

5. Пусть имеется 7 языков. Сколько нужно издать словарей, чтобы был возможен непосредственный перевод с любого языка на любой?

6. Сколько различных кодовых последовательностей можно получить перестановками кода 102020030?

7. Сколько существует нечетных четырехзначных чисел, начинающихся четной цифрой?

МТИ

ВАРИАНТЫ 3 и 8

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

2. Сколько различных ожерелий можно составить из 10 различных бусинок?

3. В пачке 20 экзаменационных билетов. Каждый студент получает билет, отвечает на него, билет возвращается в пачку, и после этого заходит следующий студент. Сколько различных вариантов раздачи билетов существует для 10 студентов?

4. Сколько можно составить кодов из 6 цифр каждый, так, чтобы все цифры были различны?

5. В магазине продаются конфеты четырех видов. Сколькими способами можно купить 8 конфет?

6. Тренер футбольной команды желает сделать одновременную замену двух полевых игроков, у него в распоряжении 5 футболистов на скамейке запасных. Сколькими способами он может это сделать?

ВАРИАНТЫ 4 и 9

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Сколько можно составить сигналов из шести флажков разного цвета, взятых по 2?

2. Футбольный матч закончился «вничью», и его судьба решается в серии послематчевых пенальти. Сколько у тренера возможностей представить судье список 5 пенальтистов из 11 закончивших матч футболистов при условии, что порядок игроков в списке имеет значение?

3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»?

4. Сколькими способами можно оснастить две различные фирмы тремя компьютерами разных типов?

5. У ювелира есть 5 различных изумрудов, 8 различных рубинов и 7 различных сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них три камня для брошки?

6. В магазине продаются конфеты двух видов. Сколькими способами можно купить четыре конфеты?

ВАРИАНТЫ 5 и 10

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Сколько существует возможных последовательностей выполнения проверок финансовой деятельности трех подразделений?
2. Сколько двузначных чисел можно составить из трех цифр, если каждая цифра входит в число один раз?
3. В распоряжении имеются яблоки, груши и апельсины. Скольками способами может быть составлен подарочный набор из 5 фруктов?
4. Восемь человек разбиваются на две команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

5. На складе имеется 7 рулонов ткани различных цветов и 5 различных стульев. Каждого рулона достаточно для обивки всех стульев. Сколькими способами можно обить стулья?
6. Из города А в город В ведут три дороги, а из города В в город С – 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из А в С через В?