Принятие решений на основе методов целочисленного программирования

Выполнили: Дудкина Анастасия,

Осипова Алена,

Полякова Софья,

Смирнова Анастасия

Дубна 2015 г..

История симплекс-метода

- Симплекс-метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.
- Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал, до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.
- В работе Л. В. Канторовича "Математические методы организации и планирования производства" (1939 г.) были впервые изложены принципы новой отрасли математики, которая позднее получила название линейного программирования.

Решение задачи симплекс-методом

- Пусть x1, x2, x3 - количество реализованных товаров, в тыс. руб., 1, 2, 3 - ей групп, соответственно. Тогда математическая модель задачи имеет вид:

F = 4 x1 + 5 x2 + 4 x3 → max

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+6x_3 \leqslant 240 \\ 4x_1+2x_2+4x_3 \leqslant 200 \\ 4x_1+6x_2+8x_3 \leqslant 160 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

- Вводим дополнительные переменные x4 ≥ 0, x5 ≥ 0, x6 ≥ 0, чтобы неравенства преобразовать в равенства.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+6x_3+x_4=240 \\ 4x_1+2x_2+4x_3+x_5=200 \\ 4x_1+6x_2+8x_3+x_6=160 \end{cases}$$

В качестве базиса возьмем x_4 = 240; x_5 = 200; x_6 = 160.
Данные заносим в симплекс-таблицу

Симплекс таблица № 1

	C_i		4	5	4	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	240	2	3	6	1	0	0	80
0	x_5	200	4	2	4	0	1	0	100
0	x_6	160	4	$\underline{6}$	8	0	0	1	$\underline{26.667}$
	Δ_i	0	−4	$\underline{-5}$	−4	0	0	0	

Целевая функция:

$$F = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot b_i = 0 \cdot 240 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot 160 = 0$$

Вычисляем оценки по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot a_{ij} - C_j$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 - 4 = -4$

$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 - 5 = -5$

$\Delta_3 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 - 4 = -4$

$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$

Поскольку есть отрицательные оценки, то план не оптимален. Наименьшая оценка:
$\Delta_2 = -5$

Вводим переменную x_2 в базис.
Определяем переменную, выходящую из базиса. Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение

$$Q_i = \frac{b_i}{a_{i2}}$$

$$Q_1 = \frac{240}{3} = 80$$

$$Q_2 = \frac{200}{2} = 100$$

$$Q_3 = \frac{160}{6} = \frac{80}{3} = 26.667$$

Наименьшее неотрицательное: Q3 = 26.667

Выводим переменную x_6 из базиса

	C_i		4	5	4	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	$240-3\cdot\frac{80}{3}$	$2-3\cdot\frac{2}{3}$	$3-3\cdot1$	$6-3\cdot\frac{4}{3}$	$1-3\cdot0$	$0-3\cdot0$	$0-3\cdot\frac{1}{6}$	
0	x_5	$200-2\cdot\frac{80}{3}$	$4-2\cdot\frac{2}{3}$	$2-2\cdot1$	$4-2\cdot\frac{4}{3}$	$0-2\cdot0$	$1-2\cdot0$	$0-2\cdot\frac{1}{6}$	
5	x_2	$\frac{80}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	

Вычисляем:

$$240-3\cdot\frac{80}{3}=240-80=160$$

$$2-3\cdot\frac{2}{3}=2-2=0$$

$$6-3\cdot\frac{4}{3}=6-4=2$$

$$200-2\cdot\frac{80}{3}=200-\frac{160}{3}=\frac{200\cdot3-160}{3}=\frac{440}{3}$$

$$4-2\cdot\frac{2}{3}=4-\frac{4}{3}=\frac{4\cdot3-4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$4-2\cdot\frac{4}{3}=4-\frac{8}{3}=\frac{4\cdot3-8}{3}=\frac{4}{3}$$

Получаем новую таблицу:

Симплекс таблица № 2

	C_i		4	5	4	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	160	0	0	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	–
0	x_5	$\frac{440}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	55
5	x_2	$\frac{80}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	40
	Δ_i	$\frac{400}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	

Целевая функция:

$$F=\sum_{i=1}^{3} C_i \cdot b_i = 0 \cdot 160 + 0 \cdot 440/3 + 5 \cdot 80/3 = 400/3$$

Вычисляем оценки по формуле:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{3} C_i \cdot a_{ij} - C_j$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 8/3 + 5 \cdot 2/3 - 4 = -2/3$

$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 5 = 0$

$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4/3 + 5 \cdot 4/3 - 4 = 8/3$

$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_6 = 0 \cdot (-1)/2 + 0 \cdot (-1)/3 + 5 \cdot 1/6 - 0 = 5/6$

Поскольку есть отрицательная оценка $\Delta_1 = -2/3$, то план не оптимален.

Вводим переменную x_1 в базис. Определяем переменную, выходящую из базиса.

Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение :

$$Q_i=\frac{b_i}{a_{i1}}$$

для столбца x_1 :

$$Q_1=\frac{160}{0}=\infty$$

$$Q_2=\frac{\frac{440}{3}}{\frac{8}{3}}=55$$

$$Q_3=\frac{\frac{80}{3}}{\frac{2}{3}}=40$$

Наименьшее неотрицательное: Q_3 = 40.
Выводим переменную x_2 из базиса

	C_i		4	5	4	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	160	0	0	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	
0	x_5	$\frac{440}{3}-\frac{8}{3}\cdot 40$	$\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\cdot 1$	$0-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\cdot 2$	$0-\frac{8}{3}\cdot 0$	$1-\frac{8}{3}\cdot 0$	$-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}$	
4	x_1	40	1	$\frac{3}{2}$	2	0	0	$\frac{1}{4}$	

Получаем новую симплекс – таблицу 3

	C_i		4	5	4	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	160	0	0	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	
0	x_5	40	0	-4	-4	0	1	-1	
4	x_1	40	1	$\frac{3}{2}$	2	0	0	$\frac{1}{4}$	
	Δ_i	160	0	1	4	0	0	1	

Целевая функция:

$$F = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot b_i = 0 \cdot 160 + 0 \cdot 40 + 4 \cdot 40 = 160$$

Вычисляем оценки по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot a_{ij} - C_j$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 4 = 0$

$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3/2 - 5 = 1$

$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 - 4 = 4$

$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 0 = 0$

$\Delta_6 = 0 \cdot (-1)/2 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 1/4 - 0 = 1$

Поскольку отрицательных оценок нет, то план оптимален.

Решение задачи: $x_1 = 40$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 160$; $x_5 = 40$; $x_6 = 0$; $F_{max} = 160$

Ответ:

$x_1 = 40$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 160$; $x_5 = 40$; $x_6 = 0$; $F_{max} = 160$

То есть необходимо реализовать товар первого вида в объеме 40 тыс. руб. Товар 2-го и 3-го видов реализовывать не надо. При этом максимальная прибыль составит $F_{max} = 160$ тыс. руб.

На основе симплекс-метода задачу можно продолжить решать с помощью следующих методов

Значительная часть задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует численного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции.

Методы решения задач целочисленного программирования:

- Методы отсечений. К ним относится метод отсекающихся плоскостей Гомори.
- Комбинаторные методы. К ним относится метод ветвей и границ
- Эти методы используются только тогда когда целочисленные переменные являются булевыми (т.е. могут принимать только два значения 0 и 1)

Метод Гомори

Идея: если добавить новые ограничения, связывающие граничные целочисленные точки, а затем в качестве многогранника решений использовать все выпуклое множество, ограниченное осями координат и новым контуром.

Необходимым условием применения метода Гомори является целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений.

Алгоритм решения задачи методом Гомори:

- Решение задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных
- Формирование уравнения отсекающих плоскостей
- Формирование и решение дополнительной задачи линейного программирования

Метод ветвей и границ

Суть: упорядоченный перебор вариантов и рассмотрение лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам пересекающимися.

Алгоритм:

- Решение непрерывной задачи. Если полученное значение является целочисленным то решение оптимальное.
- Формирование ветвей исследования. Выбор переменной на основе которой организуется процесс ветвлений влияет на эффективность решения задач
- Решение задачи
- Решение осуществляется на основе итоговой симплекс-таблицы.

Условия задачи

Найти оптимальное решение стандартной задачи максимизации для целевой функции $L = X_1 + 3X_2 + X_3 \longrightarrow \max$

с системой ограничений

$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 8, \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 4, \\ X_2 + X_3 \leq 1 \end{cases}$$

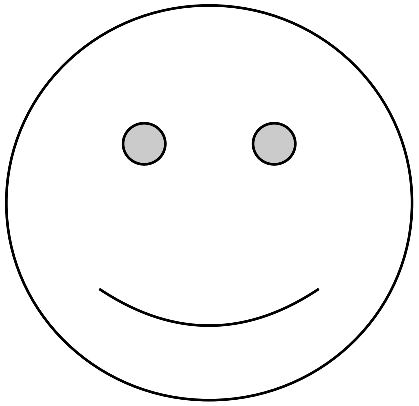
И условиями отрицательности $Xj \geq 0$, $j = 1, 2, 2$.

Ответ

Соответствующее значение целевой функции равно

$L_{max} = 4$

$X = (1, 1, 0)$



Благодарим за внимание!