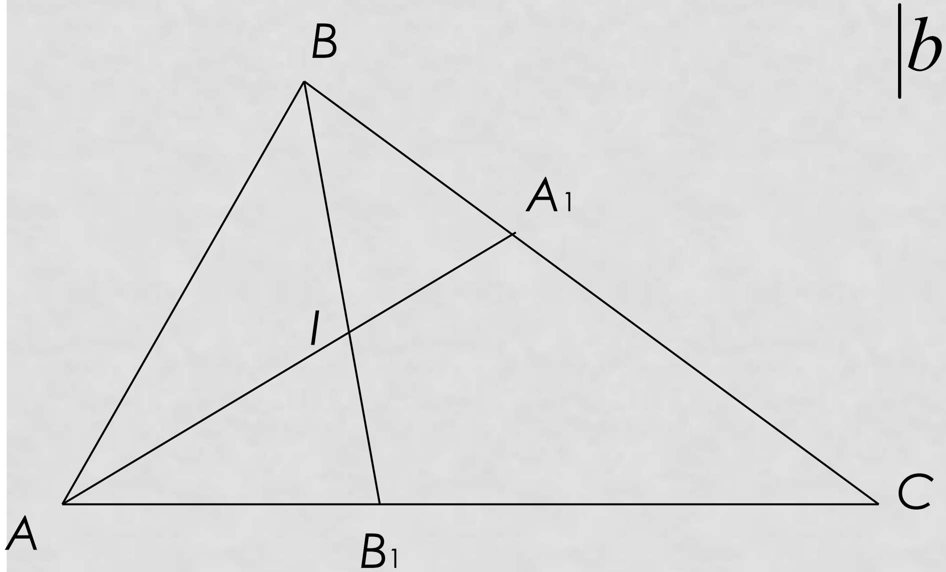
ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

ТИМЕРБАЕВА Н.В.

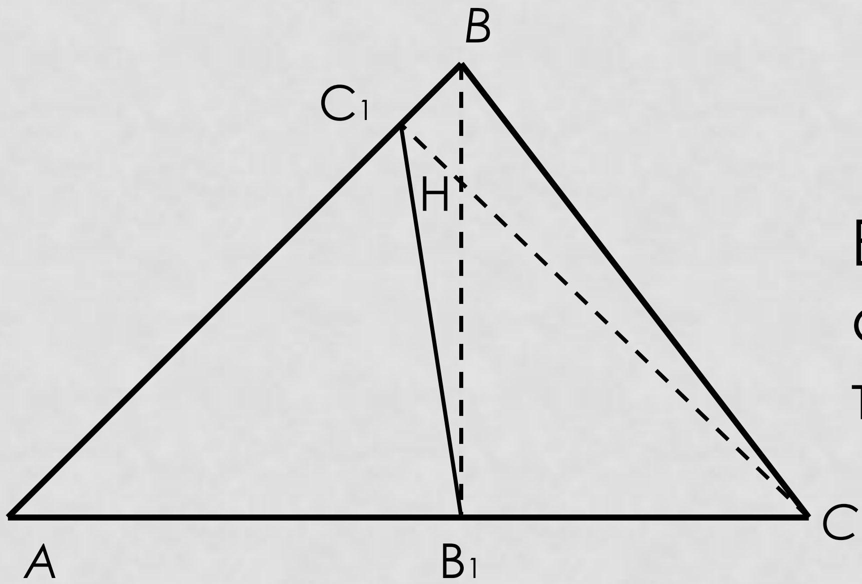
Геометрия треугольника



$$|b-c|<a<b+c$$

Если AA_1 – биссектриса в треугольнике, то

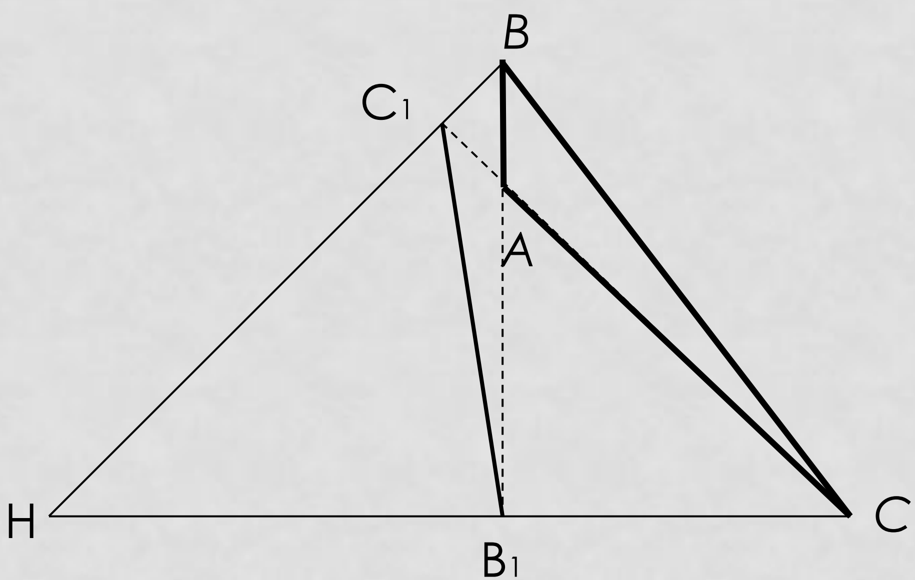
$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{CA_1}{CA}\Leftrightarrow\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{BA}{CA};\qquad AA_1^2=AB\cdot AC-BA_1\cdot CA_1$$



Если CC_1 и BB_1 – прямые, содержащие высоты треугольника ABC,

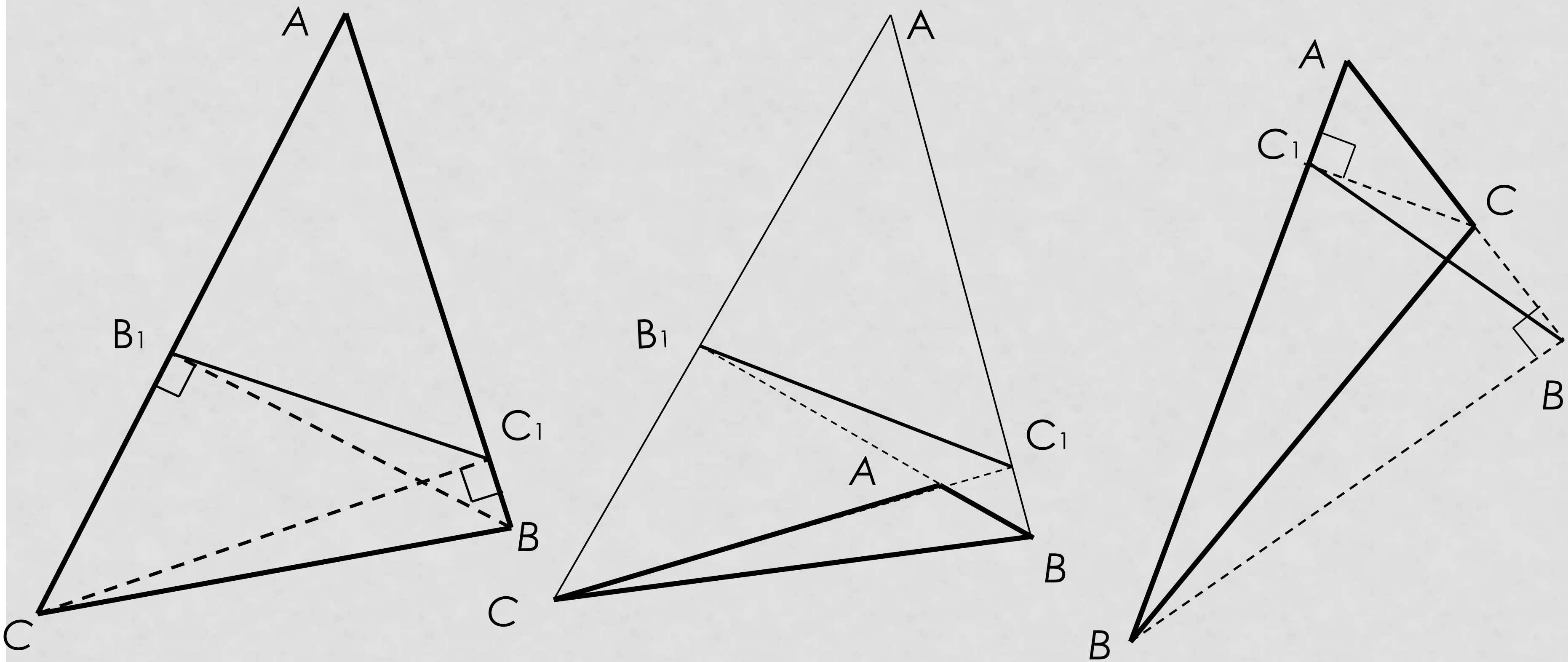
то треугольники ABC и AB_1C_1

подобны, $k = |\cos A|.$



Задача 1. В непрямоугольном треугольнике ABC, проведены высоты BB_1 и CC_1. Доказать, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны с коэффициентом $k = |cos\,A|$.

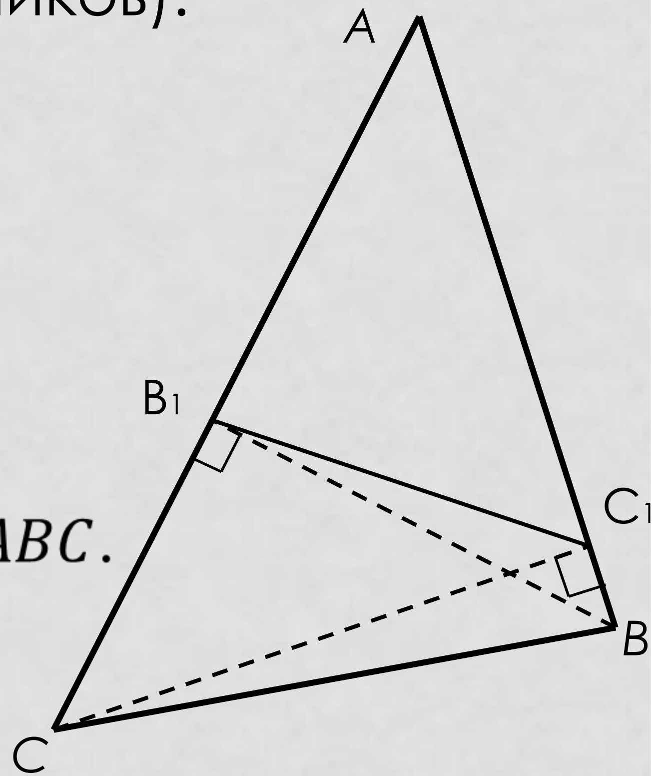
Решение. Треугольник ABC может быть остроугольным и тупоугольным, причем тупым может быть как угол A, *так* и не угол A. Поэтому возможны три различных случая.



1. $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$, (по двум углам), тогда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{BB_1}{CC_1}$ (по определению подобных треугольников).

Из равенства первых двух отношений получим пропорцию $\dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{AB_1}{AB}$

В треугольниках AB_1C_1 и ABC угол A – общий и стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Значит, $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$.



2. Если k – коэффициент подобия, то $k = \dfrac{AB_1}{AB}$.

Но $\dfrac{AB_1}{AB} = \cos A$ (в случаях 1 и 3) или $\dfrac{AB_1}{AB} = \cos(180^0 - A) = -\cos A$ (в случае 2).

Таким образом, если $A<90^0$, то $\cos A > 0$ и $-\cos A < 0$, и $|\cos A| = \cos A$; если $A>90^0$, то $\cos A < 0$ и $-\cos A > 0$, и $|\cos A| = \cos A$. Итак, $k = |cos A|$.

Комментарий к задаче

1. Приведенное выше решение не зависит от вида треугольника.

2. В доказательстве используется второй признак подобия треугольников, что встречается довольно редко.

3. Задача может быть решена и другими средствами.

Так, наличие прямых углов наводит на мысль о дополнительном построении: здесь точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности, Точки A, B_1, C_1 и точка пересечения высот также лежат на одной окружности.

Приведенное выше решение представляется более экономным.

4. Из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC можно вывести следствие о равенстве углов.

5. Если провести третью высоту – AA_1,

то она пройдет через точку пересечения первых двух и эта точку мы называем ортоцентром, а треугольник $A_1B_1C_1$ – называется **ортоцентрическим**.

Факт, доказанный в задаче 1, позволяет установить связь между углами (сторонами) исходного и ортоцентрического треугольников, что порождает довольно большую группу задач.

Метод площадей

(формулы площадей треугольников, многоугольников, свойства площадей используются при решении задач и доказательстве теорем, в условиях и требованиях которых ничего не говорится о площадях.)

Основные приемы

1. Линейные (угловые) элементы и соответствия между ними можно найти, применяя различные формулы для вычисления площади треугольника (многоугольника).

2. Если треугольник (многоугольник) разбит на несколько треугольников, то можно использовать свойство о том, что сумма площадей частей равна площади исходного многоугольника.

3. Отношение отрезков можно заменить отношением площадей треугольников

4. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то можно использовать тот факт, что отношение произведений сторон, заключающих равные углы, равно отношению площадей соответствующих треугольников

5. При доказательстве геометрических неравенств можно использовать неравенство для треугольника

$$2S \le ab.$$

Дополнительные построения в треугольнике

1. Строится биссектриса, медиана, высота к основанию в равнобедренном треугольнике.

2. Проводится высота к гипотенузе в прямоугольном треугольнике.

3. Удвоение медианы в треугольнике.

Появляются равные отрезки, равные углы, пары равных треугольников, параллелограмм

4. Если требуется получить половину отрезка, когда есть середина одной стороны треугольника, то может быть полезна средняя линия в треугольнике.

5. Если одна сторона в треугольнике в два раза больше другой, то проводится *медиана к большей стороне*.

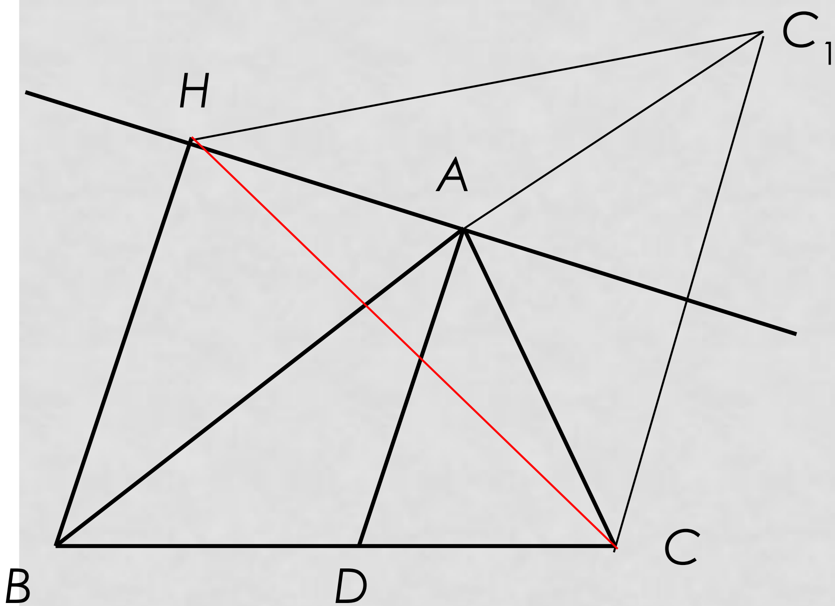
6. Если один угол в треугольнике в два раза больше другого, то проводится *биссектриса большего угла*.

7. Если речь идет о сумме двух сторон, то на продолжении одной из них за общую вершину откладывают другую.

Если речь идет о разности сторон, то от их общей вершины на большей стороне откладывается меньшая.

Задача 2.

Через вершину *A* треугольника *ABC* проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла *A*, а из вершины *B* проведен перпендикуляр *BH* к этой прямой. Доказать, что периметр треугольника *BCH* больше периметра треугольника *ABC*.



Решение.

1. $P_{BCH} = BC + BH + HC$

$$P_{ABC} = BC + AC + AB$$

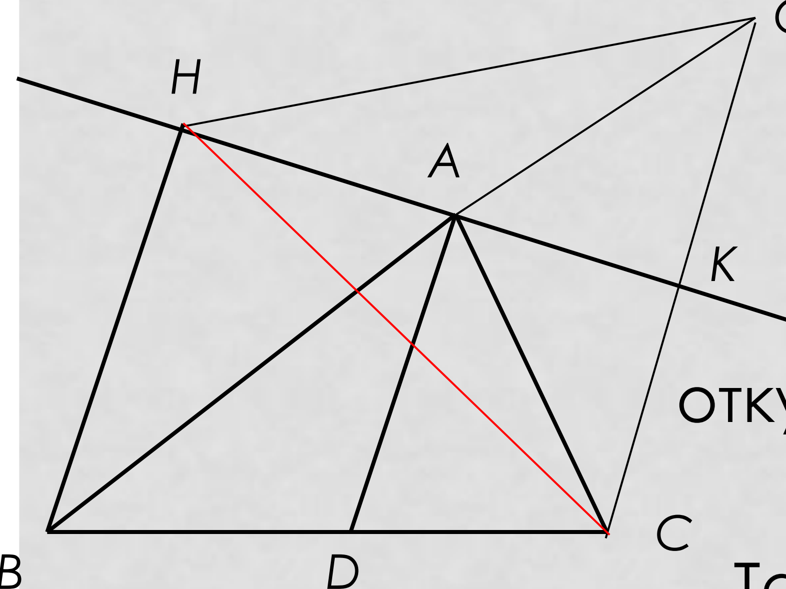
Следовательно, нужно доказать, что $BH + HC > AC + AB$

2. «Спрямим» ломаную *BAC*: на продолжении отрезка *BA* за точку *A* отложим отрезок AC_1, равный *AC*.

Применяя неравенство треугольника для треугольника BHC_1 получим $BH + HC_1 > BC_1 = BA + AC$.

Осталось доказать, что $HC_1 = HC$.

3. Треугольник CAC_1 равнобедренный по определению.



По свойству внешнего угла треугольника имеем:

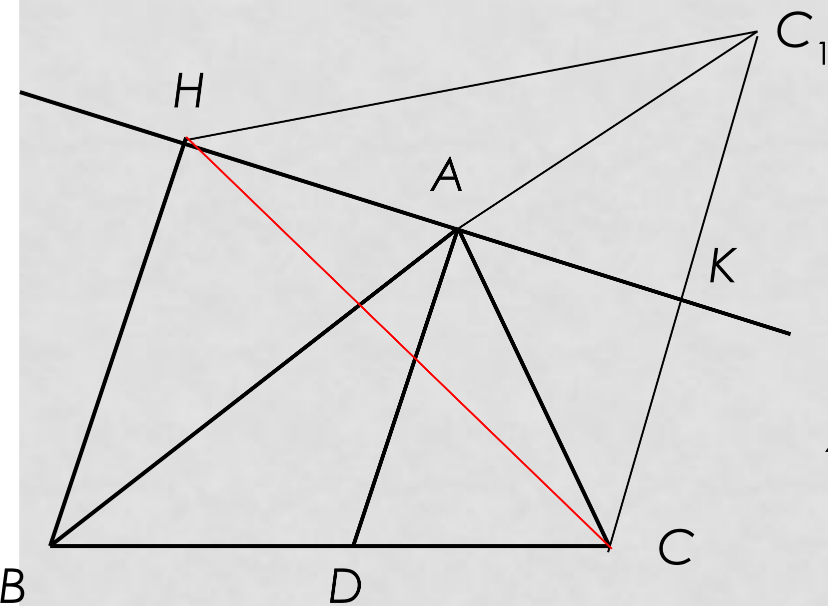
$\angle BAC = \angle ACC_1 + \angle AC_1C = 2\angle AC_1C$

или $\angle ACC_1 = 0{,}5\angle BAC = \angle BAD$,

откуда следует, что прямые CC_1 и AD параллельны.

Так как прямая *HA* перпендикулярна одной из параллельных прямых (*AD*), то она перпендикулярна и другой (CC_1).

В равнобедренном треугольнике CAC_1 отрезок *AK*– высота, а значит, и медиана.



Поскольку отрезок AK – часть отрезка HK, то HK – медиана и высота в треугольнике CHC_1 и, значит, треугольник CHC_1 – равнобедренный, $HC_1=HC$.

4. Итак, получим: $BH+HC_1 > BC_1$,

$BH+HC > AC+AB$,

$BC+HB+HC > BC+AC+BA$,

то есть $P_{HBC} > P_{ABC}$.

Комментарий к задаче

Самый сложный шаг в поиске решения задачи – второй. Как появляется мысль о дополнительном построении?

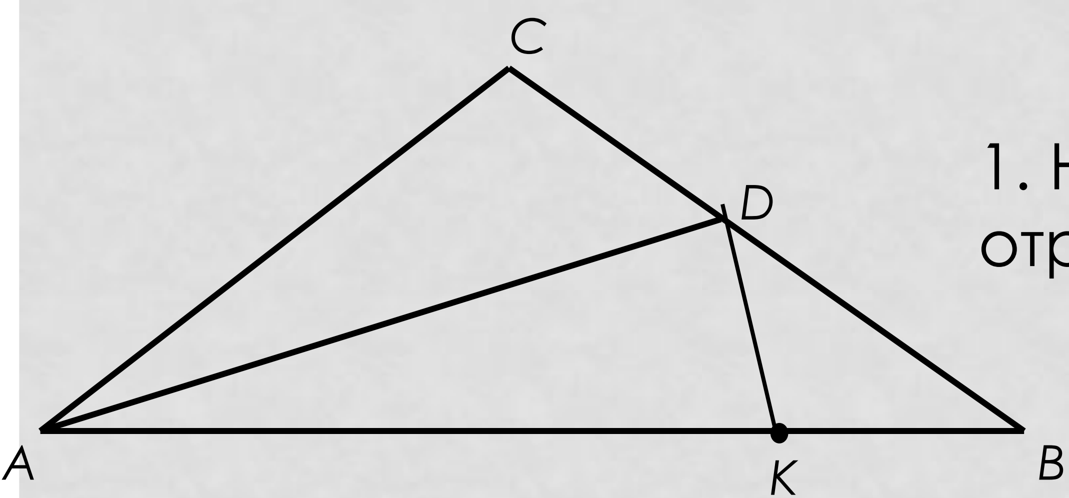
– Есть теорема, которая позволяет сравнить сумму отрезков с одним отрезком - неравенство треугольника.

Значит, можно попытаться получить нужный треугольник.

Почему спрямляем ломаную *BAC*, а не *BHC*?

– Потому что нужно чтобы отрезки *BH* и *HC* или равные им были сторонами треугольника, иначе не сможем получить неравенство с нужным знаком.

Задача 3. Дан треугольник *ABC*, в котором углы *A* и *B* равны по 40^0. Отрезок *AD* – биссектриса треугольника. Доказать, что *AD*+*CD*=*AB*.



Решение.

1. На стороне *AB* отложим отрезок *AK*, равный *AD*.
2. По построению треугольник *ADK* равнобедренный с углом при вершине 20^0, тогда $\angle AKD = \angle ADK = 80^0$.

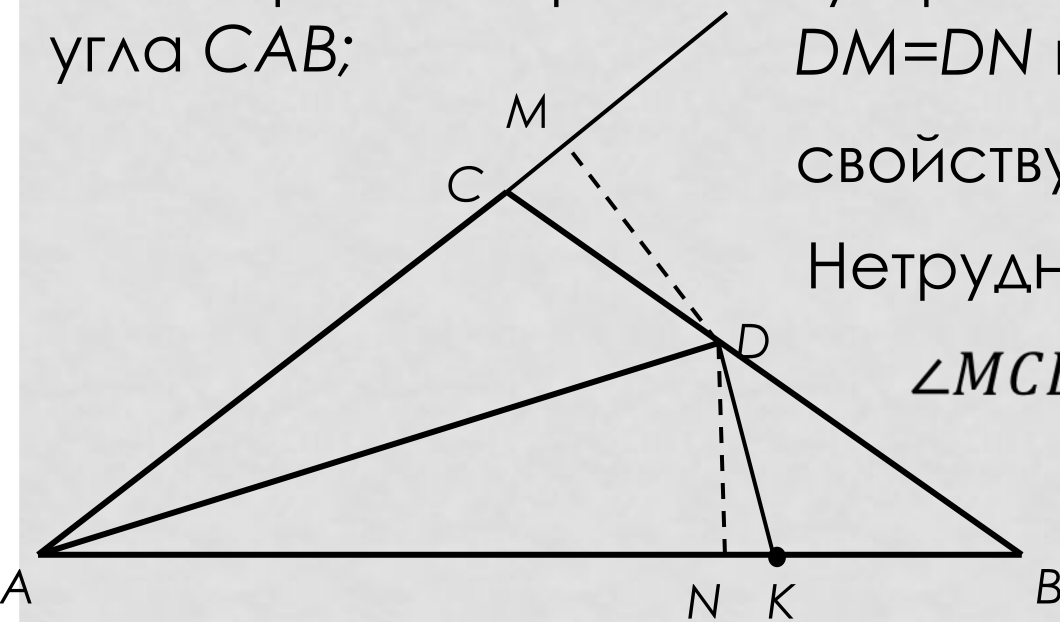
3. Угол *AKD* – внешний угол треугольника *BKD*,

$\angle DKA = \angle DBK + \angle BDK$,

откуда следует, что $\angle BDK = \angle DBK = 40^0$,

т.е. треугольник *BKD* - равнобедренный, *KB*=*KD*.

4. Построим перпендикуляры *DM* и *DN* к сторонам угла *CAB;*



DM=*DN* по свойству

свойству биссектрисы угла.

Нетрудно установить, что

$\angle MCD = \angle NKD = 80^0$,

$\angle MDC = \angle NDK = 10^0$

Прямоугольные треугольники *MDC* и *NDK* равны по катету и прилежащему к нему острому углу, тогда их гипотенузы равны, т.е. *CD*=*KD*.

5. Из равенств $KB=KD$ и $CD=KD$ получим, что $KB=CD$.

Итак, $AD+CD=AK+KB=AB$.

Комментарий к задаче

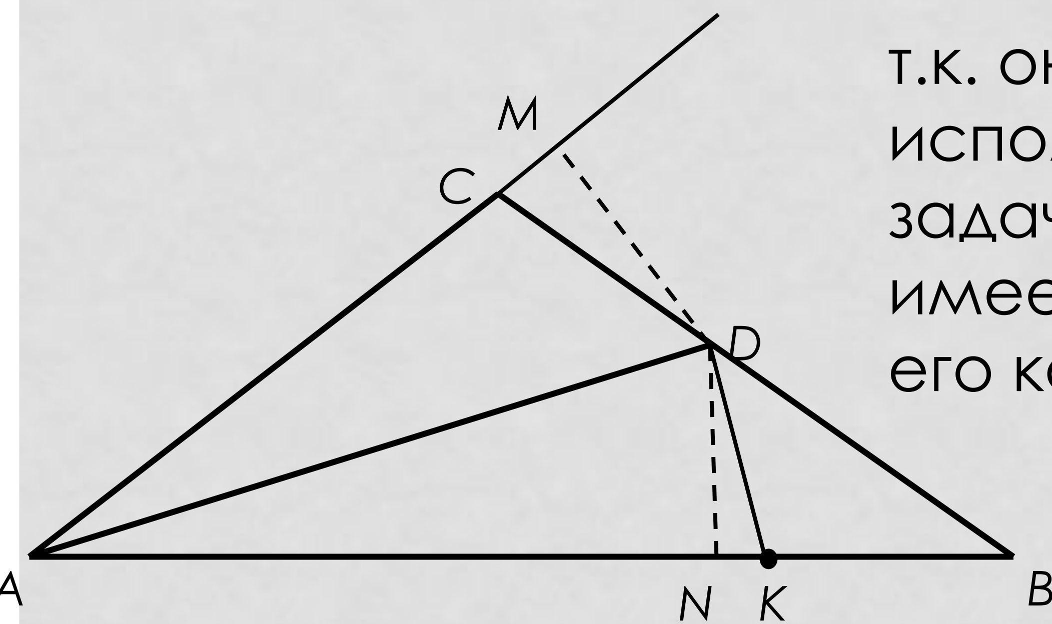
1. Как и в первой задаче, здесь потребовалось дополнительное построение. Однако, несмотря на то, что в обоих случаях задействована сумма отрезков, дополнительные построения выполняются разные.

Выведем такую эвристику: если требуется доказать, что сумма двух данных отрезков равна третьему, тоже известному отрезку, то можно от конца отрезка - результата на нем отложить отрезок, равный одному из слагаемых, и доказать, что отрезок-остаток равен второму слагаемому.

Поскольку равенства $a - b = c$ и $a = c + b$ равносильны, то аналогичным образом можно поступать, если требуется доказать, что разность двух отрезков равна третьему.

2. Заключение о равенстве отрезков (углов) при конструктивном (синтетическом) решении чаще всего делается из равнобедренности треугольника или из равенства треугольников, что устанавливается с помощью признаков. В задаче 3 использованы оба способа (см. пп. 3 и 4 в решении).

3. Равенство отрезков *DM* и *DN* легко доказывается из равенства треугольников *DAM* и *DAN*. Тем не менее, целесообразно использовать этот факт как известный,

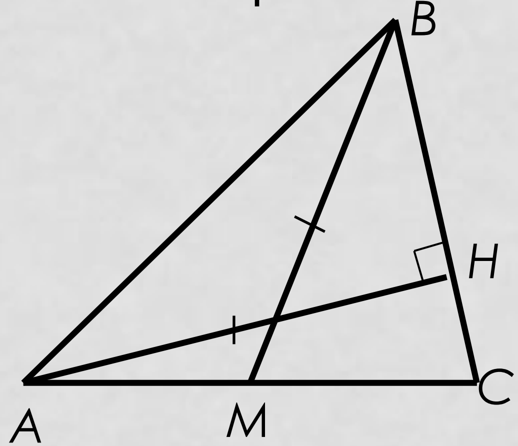


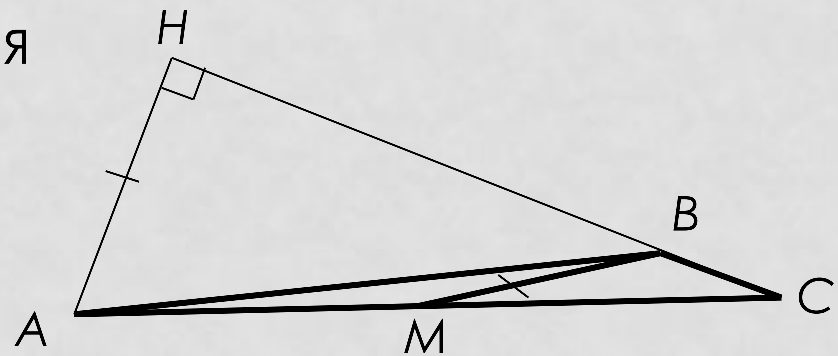
т.к. он довольно часто используется при решении задач с биссектрисой и не имеет смысла доказывать его каждый раз.

Задача 4. Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найти угол *MBC*.

Решение.

1. Вероятно, треугольник *MBC* может быть как остроугольным, так и тупоугольным. Поэтому будем рассматривать два случая





2. Равные отрезки *BM* и *AH* не связаны никакой определенной фигурой.

Поэтому требуется дополнительное построение:

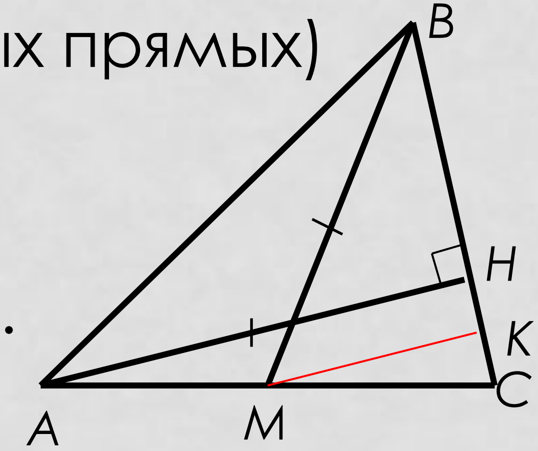
нужно получить треугольник, сторонами которого служат отрезки, равные отрезкам *BM* и *AH* или известным частям этих отрезков.

Такое построение подсказывает точка *M* – середина *AC*:

проведем через точку *M* отрезок *MK*, параллельный *AH*.

Тогда *MK*$\perp$*BC* (по свойству параллельных прямых)

и *MK* = 0,5*AH* = 0,5*BM*.

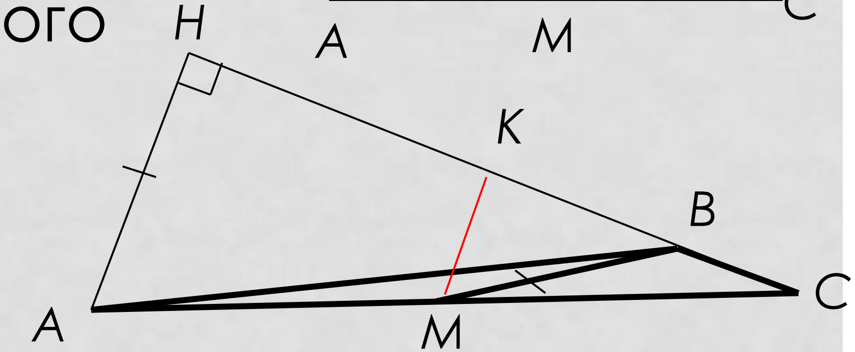


3. В прямоугольном треугольнике *BMK* катет *MK* равен половине гипотенузы *BM*.

Тогда, по свойству прямоугольного треугольника, $\angle MBK = 30^0$,

а $\angle MBC = 30^0$ или

$\angle MBC = 180^0 - 30^0 = 150^0$.



Комментарий к задаче

1. Если в условии даны два равных элемента треугольника, из которых один – медиана, то через конец медианы (середину отрезка) проводят прямую, параллельную второму элементу.

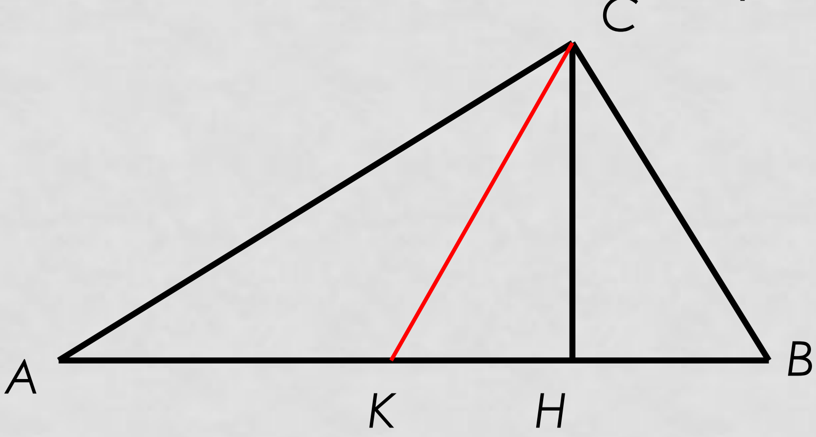
Здесь можно было выполнить другое стандартное дополнительное построение – удвоение медианы. Получили бы параллелограмм, например, *ABCD*.

Затем через точку *D* нужно было бы провести *DN* параллельно *AH*, $N \in BC$

Этот способ решения был бы несколько длиннее.

2. Если в треугольнике задано отношение равенства двух отрезков и требуется найти угол, то нередко случается, что он оказывается элементом треугольника особого вида: равностороннего, прямоугольного равнобедренного или прямоугольного, в котором катет в два раза меньше гипотенузы.

Задача 5. Высота треугольника, равная 2, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Найти площадь этого треугольника.



Решение.

1. Пусть в треугольнике *ABC* *CH* – высота, *CH* = 2, *HB* = 1, $\angle ACH = 2\angle HCB$.

2. Проведем биссектрису *CK* в треугольнике *ACH*,

Тогда $\angle ACK = \angle KCH = \angle HCB$.

3. В треугольнике *KCB* высота *CH* является биссектрисой, следовательно,треугольник *KCB* – равнобедренный и *CH* – его медиана, т.е. *KH* = *HB* =1.

4. По свойству биссектрисы *CK* *CA* : *AK* = *CH* : *HK* или

CA : *AK* = 2 : 1, т.е. *CA* = 2 *AK*.

5. Для сокращения записей введем обозначение:
AK = x, *AC* = 2x.

В прямоугольном треугольнике *ACH* имеем:

AC = 2x, *AH* = x+1, *CH* = 2.

Применяя к нему теорему Пифагора, получим уравнение

$(x+1)^2+2^2=(2x)^2$, которое приводится к виду

$3x^2-2x-5=0.$ Уравнение имеет корни -1 и 5/3.

Следовательно, *AK* = 5/3, *AB* = *AK*+ *AB* = 11/3.

$6. S=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{11}{3}.$

Комментарий к задаче

1. Задачи 1-4 решены конструктивным (или его называют синтетическим) методом. Задача 5 - алгебраическим методом. В ней пришлось решать квадратное уравнение. В других задачах могут быть

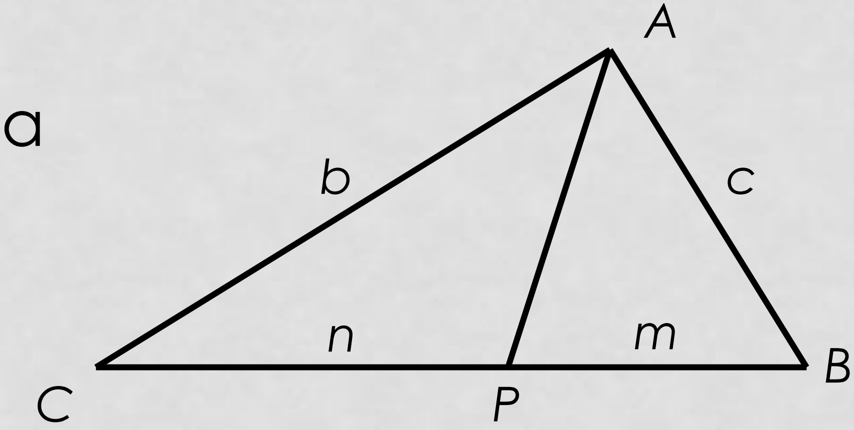
использованы и линейные уравнения, и уравнения более высоких степеней, системы уравнений, неравенства.

2. Наличие условия о том, что один из углов в 2 раза больше другого, наводит на мысль о проведении биссектрисы большего угла. В данном случае мысль оказалась плодотворной: получили биссектрисы в двух треугольниках и использовали разные их свойства, которые дали результат.

3. Теорема Пифагора используется не только для нахождения длины отрезка, но и для получения уравнения с неизвестными.

Задача 6. Дан треугольник *ABC* и точка *P* на его стороне *BC*. Выразить длину отрезка *AP* = *p* через длины отрезков *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BP* = *m*, *PC* = *n*.

Решение.



1. Отрезок *AP* – общая сторона треугольников *ABP* и *ACP*, для которых углы *APB* и *APC* - смежные. Пусть $\angle APB = \alpha$

$\angle APC = 180^0 - \alpha$. Выразим стороны, лежащие против этих углов по теореме косинусов:

$c^2 = p^2 + m^2 - 2mp\cos\alpha, \quad b^2 = p^2 + n^2 - 2np\cos(180^0 - \alpha),$

т.е. $b^2 = p^2 + n^2 + 2np\cos\alpha.$

2. Умножим первое равенство на *n*, а третье - на *m* и сложим их: $b^2 m + c^2 n = p^2(m+n) + mn(m+n)$, откуда

$$p^2 = b^2\frac{m}{m+n} + c^2\frac{n}{m+n} - mn$$

Комментарий к задаче

1. Для нахождения зависимости между длинами отрезков может быть использована теорема косинусов. При этом довольно часто она записывается не для искомого отрезка, а для известного

2. Полученный в задаче факт впервые установил английский математик М.Стюарт и опубликовал его в труде «Некоторые общие теоремы» в 1746 году. Соответствующая теорема носит имя Стюарта.

3. Если *AP* – медиана в треугольнике *ABC*, то $n = m = 0{,}5a$. Если *AP* - биссектриса, то $c : b = m : n$ и

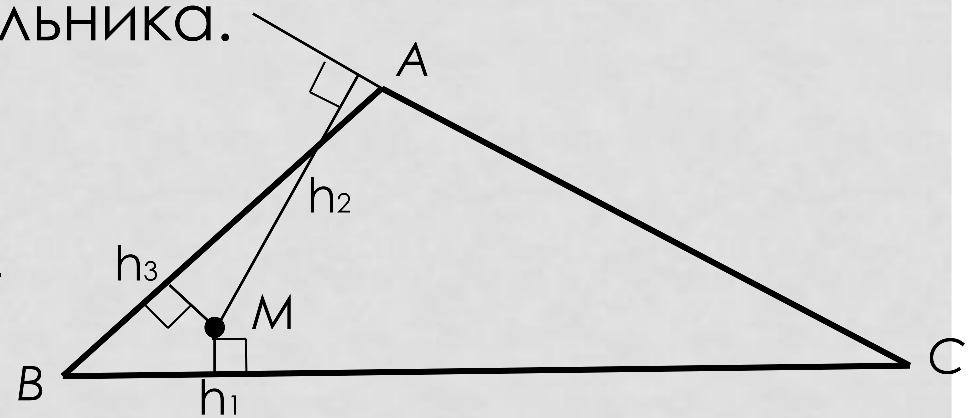
$$\frac{n}{m+n} = \frac{b}{b+c} \quad \text{и} \quad \frac{m}{m+n} = \frac{c}{b+c}$$

Используя теорему Стюарта, или проводя рассуждения, как и в задаче 6, получим:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad \text{и} \quad l_a = bc - mn.$$

Задача 7. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до прямых, содержащих стороны треугольника, заключена между наименьшей и наибольшей из высот треугольника.

Решение.



Пусть *a*, *b*, *c* – стороны треугольника *ABC*, h_a, h_b, h_c – его высоты, *M* – точка внутри треугольника, h_1, h_2, h_3 – расстояния от точки *M* до прямых, содержащих стороны треугольника. Для определенности будем считать, что $h_a \leq h_b < h_c$.

1. Если *S* – площадь треугольника *ABC*, то

$S = S_{ABM} + S_{BMC} + S_{CMA}$ (по свойству площадей), или

$a\,h_1 + b\,h_2 + c\,h_3 = 2S$ (1).

Из формул для площади треугольника находим $a = \frac{2S}{h_a}; \ b = \frac{2S}{h_b}; \ c = \frac{2S}{h_c}.$

Подставляя в равенство (1) вместо *a*, *b*, *c* их выражения через площадь и упрощая, получим $\frac{h_1}{h_a} + \frac{h_2}{h_b} + \frac{h_3}{h_c} = 1 \ (2).$

2. Умножим обе части равенства (2) на h_a

$$h_1 + h_a\frac{h_2}{h_b} + h_a\frac{h_3}{h_c} = h_a \quad (3).$$

Так как h_a – наименьшая из высот или $h_a = h_b$, то

$\frac{h_a}{h_b} \leq 1, \frac{h_a}{h_c} \leq 1$ и $h_a\frac{h_2}{h_b} \leq h_2, h_a\frac{h_3}{h_c} < h_3.$

Учитывая последние два неравенства, из равенства (3) получим:

$$h_a = h_1 + h_a\frac{h_2}{h_b} + h_a\frac{h_3}{h_c} < h_1 + h_2 + h_3$$

Аналогично докажем, что $h_1 + h_2 + h_3 < h_c.$

Комментарий к задаче

1. В тексте задачи нет упоминаний о площадях. При решении же используются свойства площадей, формулы для вычисления площади треугольника. Говорят, что задача решена методом площадей. Метод площадей относится к аналитическим методам решения геометрических задач.

2. Откуда появляется мысль об использовании теории площадей?

- Высоты треугольника, расстояние от точки до прямой, содержащей отрезок, ассоциируются с формулами площади треугольника, поэтому метод площадей и приходит на ум.

3. Метод площадей включает в себя ряд приемов. Некоторые из них, наиболее часто встречающиеся, перечислены в теоретических положениях. При решении задачи 7 использованы приемы 1 и 2.