АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Основные методы решения геометрических задач:

- *геометрический* – требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;
- *алгебраический* – искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;
- *комбинированный* – на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других - алгебраическим.

Треугольники

Признаки равенства треугольников, прямоугольных треугольников.
Свойства и признаки равнобедренного треугольника.

Задача *1*. Медиана *AM* треугольника *ABC* равна отрезку *BM*. Доказать, что один из углов треугольника *ABC* равен сумме двух других углов.

Задача 2. Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в их общей середине *O*. На *AC* и *BD* отмечены точки *K* и K_1 такие, что $AK=BK_1$.
Доказать, что а) $OK=OK_1$, б) точка *O* лежит на прямой KK_1.

***Задача* 3** (признак равнобедренного треугольника).
Если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

Задача 4 (признак прямоугольного треугольника по медиане). Доказать, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Задача 5 (свойство медианы прямоугольного треугольника). Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине.

Задача 6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

Задача 7. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины, делят этот угол на три равные части. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Свойства площадей. Площади многоугольников

Следствие из теоремы о площади треугольника.
Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы.
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Теоремы о точках пересечения чевиан

Теорема. В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке (центроид, центр тяжести) и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Свойства медианы:

1. Медиана разбивает треугольник на два равновеликих, то есть имеющих одинаковую площадь.
2. Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.
3. Отрезки, соединяющие центроид с вершинами треугольника, разбивают треугольник на три равновеликие части.

Теорема. Длина медианы треугольника *ABC*, проведенная из вершины *B* к стороне *b*, вычисляется по следующей формуле: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ (аналогично вычисляются и другие медианы).

Одним из основных методов решения задач, в которых участвуют медианы треугольника, является метод «удвоения медианы».

Достроить треугольник до параллелограмма и воспользоваться теоремой о сумме квадратов его диагоналей.

Задача 8. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

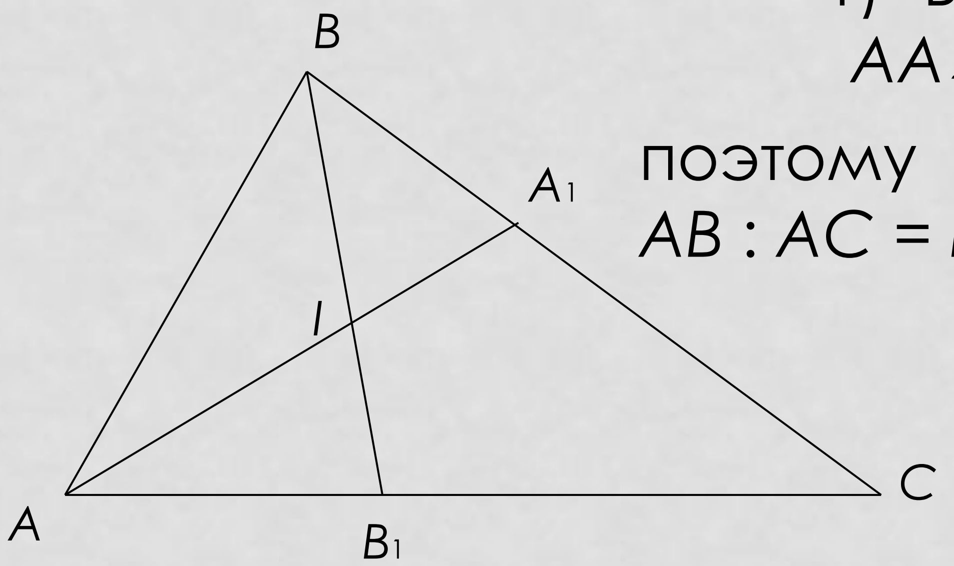
Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим ее сторонам.

Теорема. В любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке (ицентр), которая является центром вписанной в него окружности.

Замечание:
Очевидно, что центроид и ицентр треугольника всегда лежат внутри него.

Задача 9. Доказать, что если *I* – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\frac{AI}{IA_1} = \frac{b+c}{a}$, где AA_1 – биссектриса угла *A*, *AB* = *c*, *BC* = *a*, *CA* = *b*.

Решение.



1) В треугольнике ABC AA_1 – биссектриса угла A,

поэтому

$AB : AC = BA_1 : CA_1 = BA_1 : (BC – BA_1)$

или $BA_1 = \dfrac{ac}{b+c}$

2) В треугольнике ABA_1 BI – биссектриса угла B,

поэтому $AI : IA_1 = BA : BA_1$ или

$\dfrac{AI}{IA_1} = \dfrac{b+c}{a}$, ЧТД.

Теорема о серединном перпендикуляре к отрезку. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

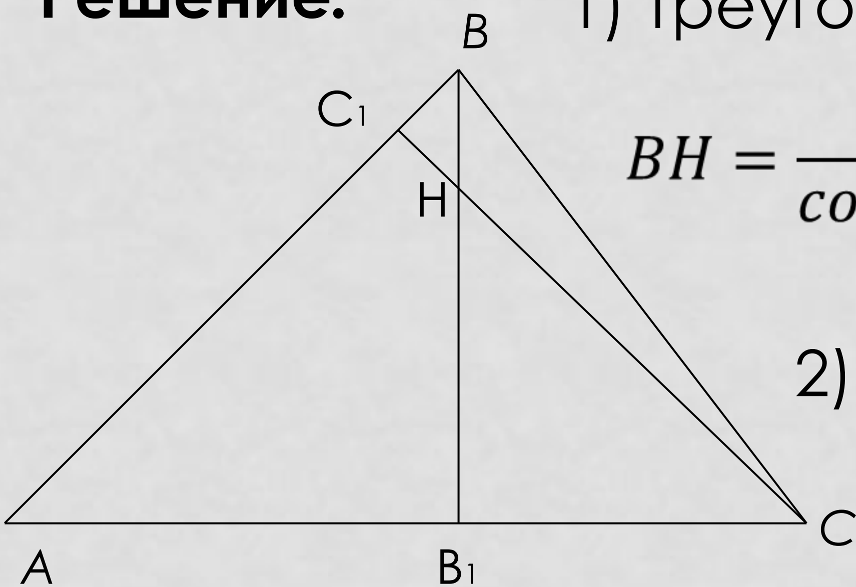
Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной около него окружности.

Теорема. В любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке (ортоцентр треугольника).

Вопрос. Где находится ортоцентр остроугольного, прямоугольного, тупоугольного треугольников?

Задача 10. Точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC делит его высоту BB_1 на отрезки b_1 и b_2, отношение которых, считая от вершины, равно $\frac{b_1}{b_2} = \frac{cos\angle B}{cos\angle A cos\angle C}$.

Решение.



1) Треугольник BC_1H – прямоугольный, и

$$BH = \frac{BC_1}{cos\angle ABH} = \frac{BC_1}{\cos(90^0 - \angle A)} = \frac{BC_1}{sin\angle A}$$

2) Треугольник BC_1C – прямоугольный, и

$$BC_1 = BCcos\angle B = a \cdot cos\angle B$$

$$BH = \frac{a \cdot cos\angle B}{sin\angle A} = \frac{b \cdot cos\angle B}{sin\angle B} = \frac{c \cdot cos\angle B}{sin\angle C}$$

(по теореме синусов $\frac{a}{sin\angle A} = \frac{b}{sin\angle B} = 2R$)

$$B_1 = BB_1 - BH = c \cdot \sin\angle A - \frac{c \cdot \cos\angle B}{\sin\angle C} =$$

$$= \frac{c \cdot (\sin\angle A \sin\angle C - \cos\angle B)}{\sin\angle C} = \frac{c \cdot \cos\angle A \cos\angle C}{\sin\angle C}$$

Используя формулы приведения.

$$\frac{BH}{HB_1} = \frac{c \cdot \cos\angle B}{\sin\angle C} : \frac{c \cdot \cos\angle A \cos\angle C}{\sin\angle C} = \frac{\cos\angle B}{\cos\angle A \cos\angle C}$$

Откуда

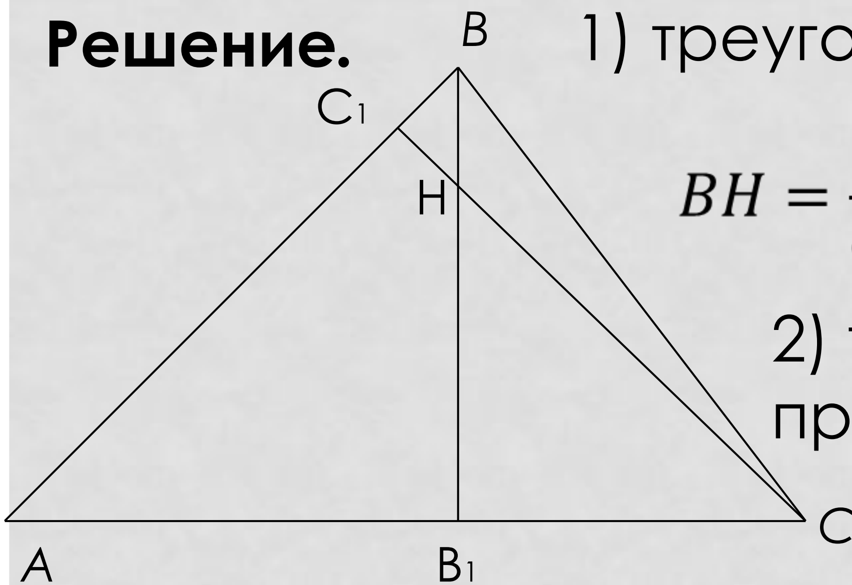
$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\cos\angle B}{\cos\angle A \cos\angle C}$ (*)

Замечание. Если один из углов тупой, то в (*) соответствующий косинус нужно взять по модулю.

Интересными являются задачи на нахождение расстояния от произвольной вершины треугольника до одной из его замечательных точек. Сначала решим задачу на нахождения расстояния от вершины до ортоцентра.

Задача 11. В треугольнике ABC опущены высоты BB_1 и CC_1. Найти длину отрезка HB, где H – точка пересечения высот.

Решение.



1) треугольник BC_1H – прямоугольный, и

$$BH = \frac{BC_1}{cos\angle ABH} = \frac{BC_1}{\cos(90^0 - \angle A)} = \frac{BC_1}{sin\angle A}$$

2) треугольник BC_1C – прямоугольный, и

$$BC_1 = BCcos\angle B = a \cdot cos\angle B$$

$$BH = \frac{a \cdot cos\angle B}{sin\angle A} = \frac{b \cdot cos\angle B}{sin\angle B} = \frac{c \cdot cos\angle B}{sin\angle C}$$

$$BH = b|ctg\angle B| = 2R|cos\angle B|$$

или $BH = \frac{a \cdot cos\angle B}{sin\angle A}$, а также $BH = \frac{|cos\angle C|BB_1}{sin\angle A sin\angle B}$

Задача 12. Найти расстояние от вершины *B* треугольника *ABC* до ортоцентра, если

$AC = 5\sqrt{7},\ CB = 4\sqrt{7},\ BA = 6\sqrt{7}.$

Решение.

По теореме косинусов $cosB = \frac{9}{16}$.

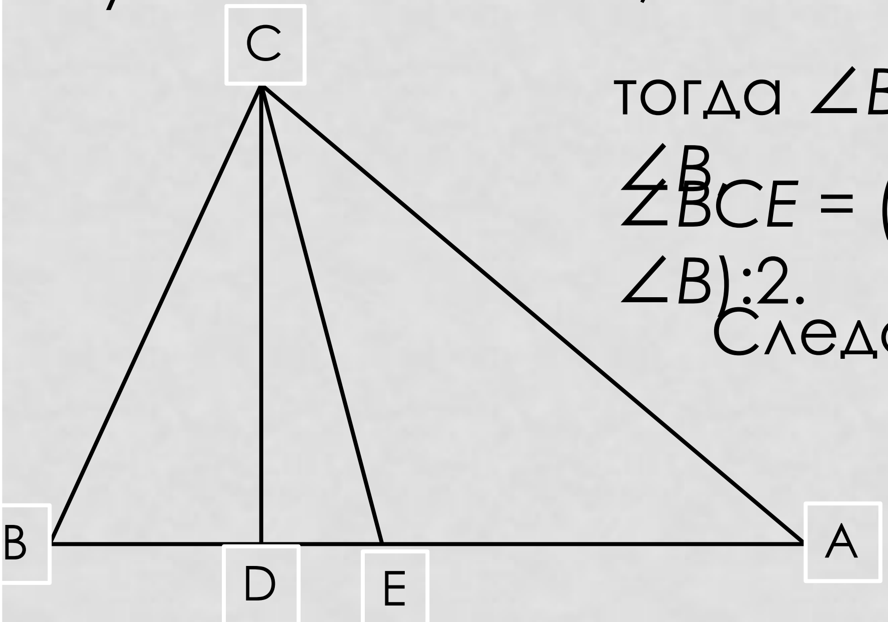
Тогда $\sin B = \frac{5\sqrt{7}}{16},\quad ctgB = \frac{9}{5\sqrt{7}}.$

$$BH = b|ctgB| = 9.$$

Задача 13. По углам A и B треугольника ABC ($\angle A < \angle B$) определите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины С.

Решение.

Пусть CD – высота, CE – биссектриса,



тогда $\angle BCD = 90° - \angle B$

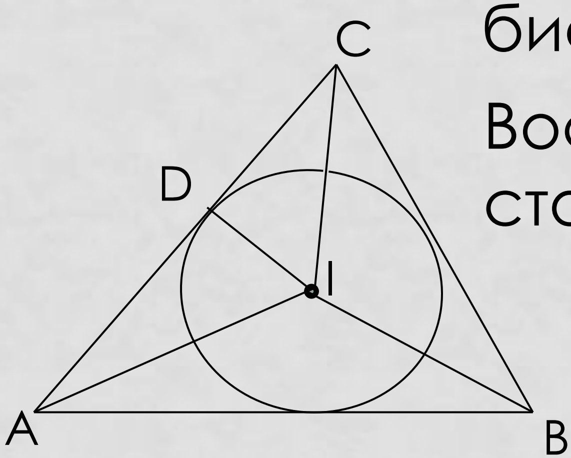
$\angle BCE = (180° - \angle A - \angle B):2.$

Следовательно,

$$\angle DCE = \frac{\angle B - \angle A}{2}$$

Задача 14. К какой из вершин треугольника ближе расположен ицентр?

Решение. Пусть I – ицентр, точка пересечения биссектрис треугольника ABC



Воспользуемся тем, что против большей стороны треугольника лежит больший угол.

Если $AB > BC$, то $\angle A < \angle C$ и,

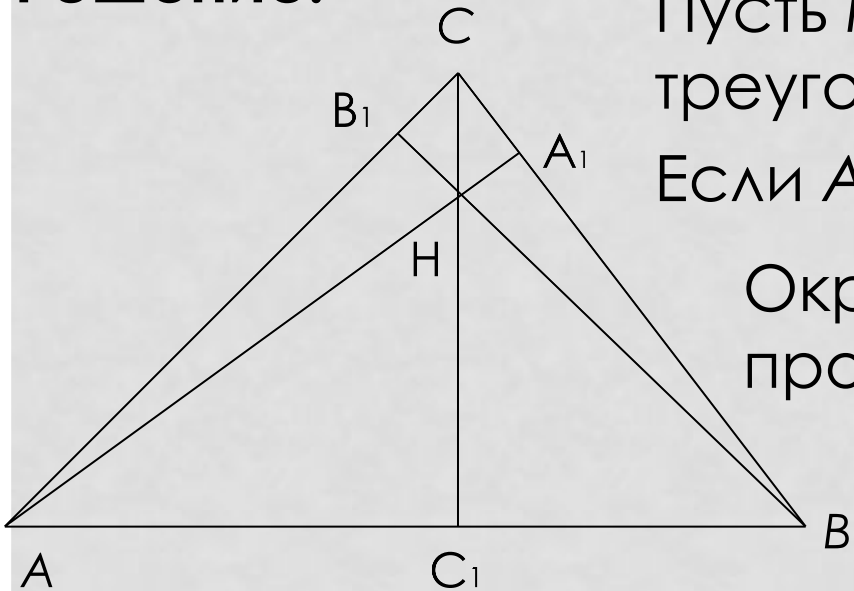
следовательно, $\angle IAD < \angle ICD$.

Поэтому $IC < IA$,

т.е. центр I вписанной окружности лежит ближе к вершине, расположенной против большей стороны.

Задача 15. Какая из высот треугольника наименьшая?

Решение.



Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC.

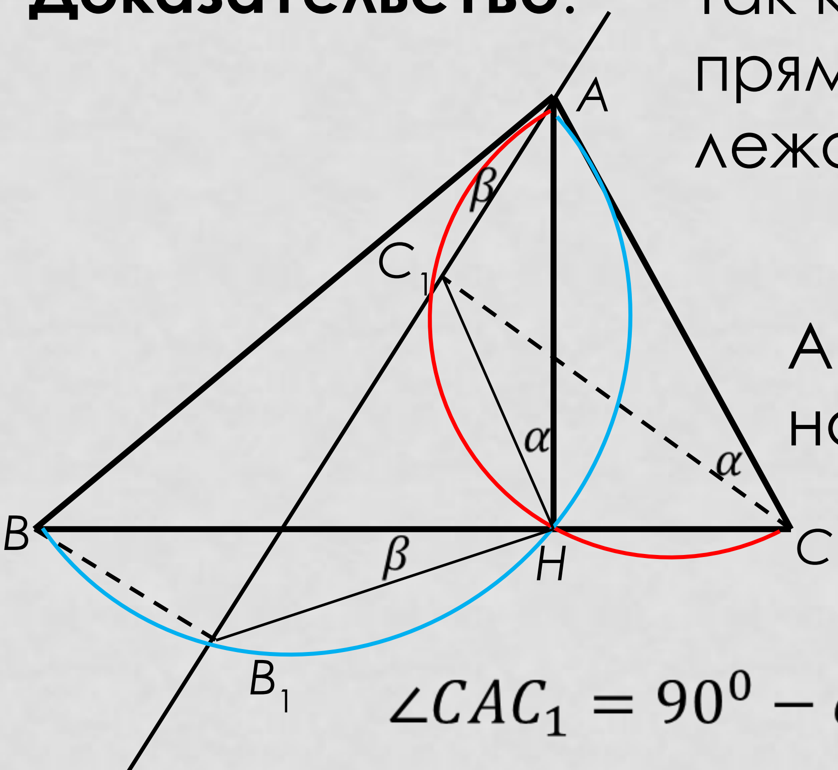
Если $AC < AB$, то $\angle C > \angle B$.

Окружность с диаметром BC пройдет через точки C_1 и B_1.

Учитывая, что из двух хорд меньше та, на которую опирается меньший вписанный угол, получаем, что $CC_1 < BB_1$, т.е. меньше та высота, которая опущена на большую сторону.

Задача 16. Отрезок AH – высота треугольника ABC. Из вершин B и C проведены перпендикуляры BB_1 и CC_1 к прямой, проходящей через точку A. Доказать, что треугольники ABC и HB_1C_1 подобны. Найти площадь треугольника HB_1C_1, если площадь треугольника ABC равна S, а $AC:HC_1=5:3$.

Доказательство.



Так как треугольники AHC и ACC_1 прямоугольные, то точки H и C_1 лежат на окружности с диаметром AC.

Аналогично, точки B_1 и H лежат на окружности с диаметром AB.

$$\angle ACC_1 = \angle AHC_1 = \alpha = 0{,}5\overset{\frown}{AC_1}$$

$$\angle BAB_1 = \angle BHB_1 = \beta = 0{,}5\overset{\frown}{BB_1}.$$

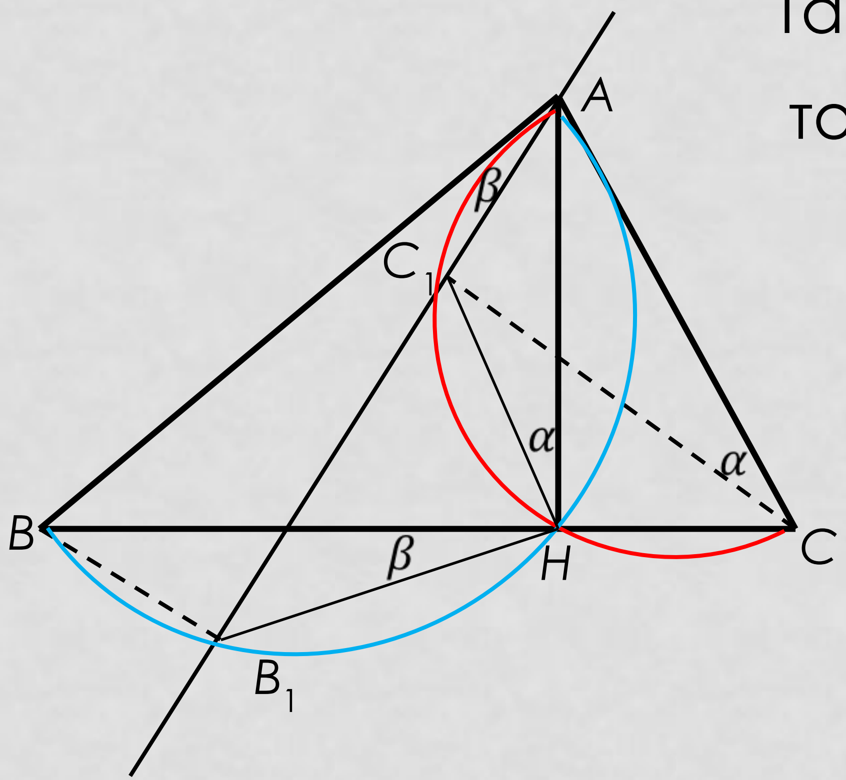
$\angle CAC_1 = 90^0 - \alpha$ в прямоугольном треугольнике ACC_1

$$\angle BAC = \angle BAB_1 + \angle B_1AH = \beta + 90^0 - \alpha$$

$$\angle C_1HB_1 = \angle C_1HB + \angle BHB_1 = 90^0 - \alpha + \beta$$

Значит, $\angle BAC = \angle C_1HB_1$ (1).

$$\angle CBA = \angle HBA = \angle HB_1A = 0{,}5\overset{\frown}{AH} = \angle HB_1C_1 \quad (2).$$



Так как имеют место (1) и (2), то треугольники ABC и HB_1C_1 подобны.

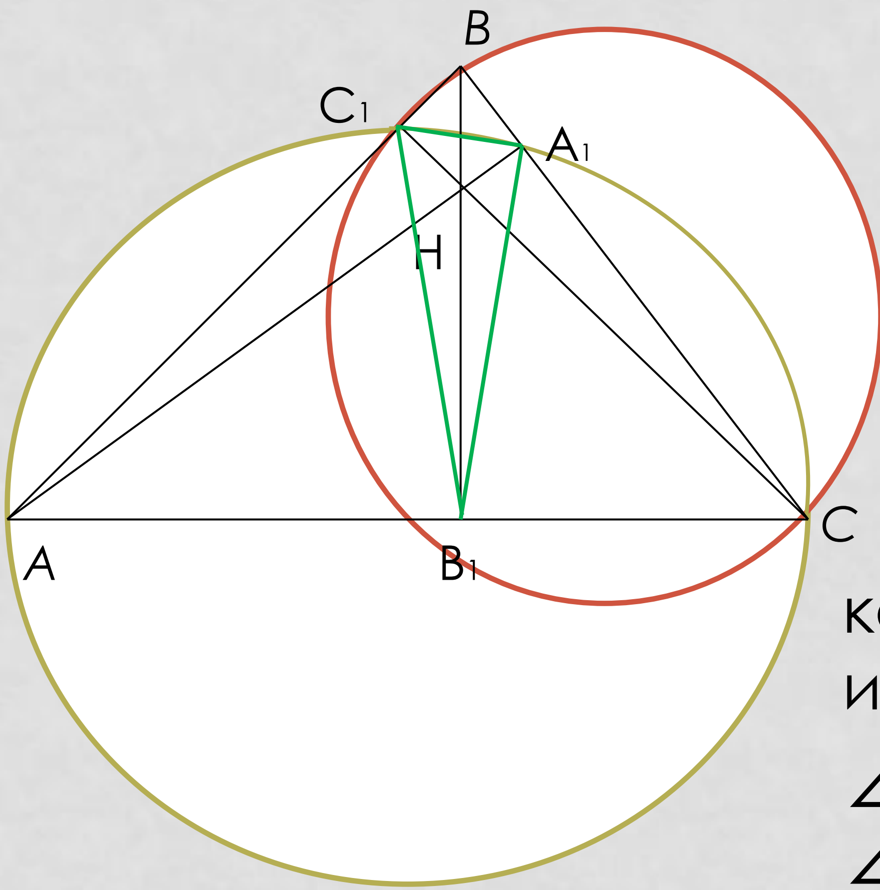
Коэффициент подобия

$k = \frac{5}{3}$, значит,

$$S_{HC_1B_1} = \frac{9}{25}S.$$

Задача 17. Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 есть основания высот. Доказать, что точка H - пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение.



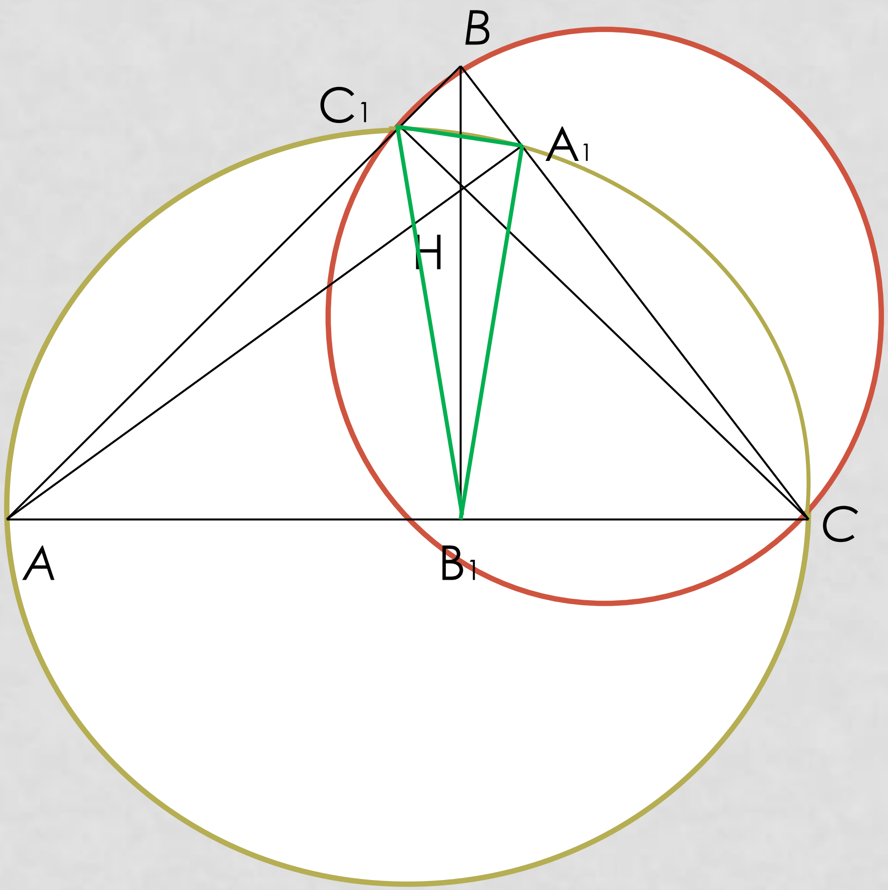
На сторонах AC и BC треугольника ABC, как на диаметрах, построим окружности.

Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат этим окружностям.

Поэтому $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.

$\angle B_1BC = \angle CAA_1$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Следовательно, $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$, т.е. C_1C является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$.



Аналогичным образом показывается, что AA_1 и BB_1 являются биссектрисами углов $B_1A_1C_1$ и $A_1B_1C_1$.

Самостоятельно исследовать случаи прямоугольного и тупоугольного треугольника.