Элементы теории вероятностей

**ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ**

- **Сдать зачет по математической статистике.**
- **Продемонстрировать общее понимание теории вероятностей и математической статистики.**

**Доцент**
**Дьяконова Нина Викторовна**

# Понятие вероятности событий

Под событием понимают такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

Различают достоверное, невозможное и случайное события.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В называют суммой событий. А+В

Событие, состоящее в наступлении обоих событий А или В называют произведением событий. А*В

Вероятностью события А называют отношение числа ***m*** благоприятных исходов, к числу ***n*** всех равновозможных несовместных элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

# Основные формулы комбинаторики

Число возможных **перестановок** множества из *n* элементов есть

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

**Пример:**

Сколько существует способов расстановки на полке 6 разных книг?

Если из ***n*** разных объектов по ***k*** разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

-число размещений без повторений.

**Пример**:

Сколько трехзначных чисел (без повторений) можно составить из чисел ***1,2,3,4,5***.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Если в выборках из ***n*** объектов по ***k*** разных объектов порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то используют формуле для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Пример**:

Сколько комбинаций из трех монет можно собрать, имея пять разных монет:

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -без учета порядка в комбинации

$C_n^k = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ -с учетом порядка в комбинации

**Пример**:

Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет не более четырех очков.

Общее число элементарных исходов n=6 (могут выпасть 1,2,3,4,5,6). Благоприятных исходов 4, соответственно, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**Пример**:

В урне имеются 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность извлечь синий шар?

$$P(A) = \frac{0}{15} = 0$$

**Пример**:

В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Извлекли два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \qquad m = C_{6}^{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

# Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятности. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Для независимых событий

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

**Пример**:

В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Извлекли один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар красный, белый или черный?

1) Имеем n=10+15+20+25=70.
   P(K)=25/70=5/14.
2) Применив теорему сложения вероятностей, получим:
   P(Б+Ч)=P(Б)+P(Ч)=1/7+3/14=5/14.

**Пример**:

В первом ящике имеются 2 белых и 10 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика извлекли по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

События A и B - независимые. Речь идет о совмещении событий. Необходимо применить теорему умножения вероятностей: P(A*B)=P(A)*P(B)=2/3 * 8/12=1/6 * 2/3=1/9.

**Пример**:

В ящике имеются 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика извлекли два шара ( не возвращая извлеченный шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Пусть событие А-появление белого шара при первом извлечении. В-при втором. По теореме умножения вероятностей в случае зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A)$

P(A)=6/(6+8)=3/7,
P(B/A)=(6-1)/(6+8-1)=5/13.
P(AB)= 3/7 * 5/13=15/91.

# Формула полной вероятности.

Пусть $H_1$, $H_2, \dots,$ $H_n$ — полная группа событий (события $H_i$ называются гипотезами). Тогда вероятность любого события $A$ может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A \backslash H_i)$$

Отметим свойство: $$\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$$

**Пример**:

Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1=0,25$, $p_2=0,35$ и $p_3=0,40$. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Определить вероятность того, что случайно взятая лампа проработает заданное число часов.

Введем обозначения:
А-лампа проработает заданное число часов.
$H_1$, $H_2$, $H_3$ -лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. По условию задачи: $P(H_1)=p_1$, $P(H_2)=p_2$, $P(H_3)=p_3$

Тогда, $P(A)= P(H_1)P(A/H_1)+ P(H_2)P(A/H_2)+ P(H_3)P(A/H_3)=$
$=0,25*0,1+0,35*0,2+0,40*0,3=0,215$

# Формула Байеса.

Пусть $H_1$, $H_2$ …— полная группа событий и $A$ — некоторое событие положительной вероятности. Тогда условная вероятность того, что имело место событие $H_k$, если в результате эксперимента наблюдалось событие $A$, может быть вычислена по формуле:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A \setminus H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A \setminus H_i)}$$

**Пример**:

Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок — с вероятностью 0,00001. Можно сделать два предположения об эксперименте:
$H_1$ = {стреляет 1-й стрелок}
$H_2$ = { стреляет 2-й стрелок } .
Вероятности этих гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$.
Рассмотрим событие A = {пуля попала в мишень}. Известно, что $P(A\backslash H_1) = 1$, $P(A\backslash H_2) = 0{,}00001$

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень P(A) = 1/2*1 + 1/2*0,00001. . Предположим, что событие A произошло. Какова теперь вероятность каждой из гипотез $H_i$? Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз). Действительно,

$$P(H_1/A) = \frac{1/2*1}{1/2*1 + 1/2*0{,}00001} = \frac{1}{1+0{,}00001}$$

**Пример**:

Имеются три одинаковые по виду ящика. В первом ящике – 20 белах шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шара, в третьем 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика извлекли белый шар. Вычислить вероятность того, что этот шар извлечен из первого ящика.

Пусть $H_1$ , $H_2$ , $H_3$ – гипотезы, состоящие в выборе соответственно первого второго и третьего ящика, событие А – появление белого шара. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) =1/3$ (выбор любого ящика равновозможен).
$P(A \backslash H_1) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика); $P(A \backslash H_2) = 10/20=1/2$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика); $P(A \backslash H_3) = 0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика). Тогда искомая вероятность :

$$P(H_1 / A) = \frac{1/3*1}{1/3*1+1/3*1/2+1/3*0} = \frac{2}{3}$$

# Схема Бернулли

- Рассмотрим последовательность **n** независимых однородных испытаний (экспериментов).
  - Испытания считаем независимыми, если результат испытания не зависит от номера испытания и от того, что произошло до этого испытания.
  - Однородными испытаниями считаем такие, которые проводятся в одинаковых условиях.

Пусть в каждом испытании событие **A** может произойти с вероятностью **p**

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

# Формула Бернулли

- Вероятность того, что при **n** испытаниях
- событие **A** наступит **к**-раз:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

$$где \quad C_n^k - \text{ число сочетаний}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Схема Бернулли

- **Пример.**
- Вероятность того, что образец бетона при испытании выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9.
- Найти вероятность того, что из 7 образцов 5 выдержат испытания.
- **Решение.**
- По формуле Бернулли

$$P_7^5 = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5!\,2!} 0{,}9^5\, 0{,}1^2 = 0{,}124$$

# Схема Бернулли

- **Асимптотические формулы.**

- **1. Формула Пуассона.**
- Пусть число испытаний **n** - *велико* ( $n \to \infty$ )
- Вероятность **p** события **A** – *мала* ( $p \to 0$ )
- Причем

$$\boxed{np \to a}$$

- Тогда при любом фиксированном **к**

$$\boxed{P_n(k) \cong \frac{a^k}{k!} e^{-a}}$$

**Закон редких событий**

$$( n \geq 100 , \ a = np \leq 10 )$$

# Схема Бернулли

- **Пример 1 .**
- Известно, что при транспортировке 2,5% декоративной плитки повреждается. Определить вероятность того, что в партии из 200 плиток оказалось поврежденными:
- **а) ровно 4 плитки; б) не более 6 плиток.**
- **Решение.**
- Вероятность того, что плитка окажется поврежденной,
- p=0.025 – *мала*, число испытаний n=200 –*велик*о, причем np=5<10.
- По формуле Пуассона:
- а) $P_{200}(4) \cong \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0{,}18$ б) $P_{200}(i \le 6) \cong e^{-5} \sum_{i=0}^{6} \frac{5^i}{i!} \approx 0{,}76$

# Схема Бернулли

- **2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.**
- Пусть число испытаний **n** – *велико* (n→∞)
- Вероятность **p** события **A** – *не очень мала* ( 0<<p<<1 )
- (*p не близко к 0 и к 1*)
- Тогда при любом фиксированном к

$$\boxed{P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),}$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

# Схема Бернулли

- **3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.**

Пусть число испытаний n – *велико* ($n\to\infty$)

Вероятность p события A – *не очень мала* ( $0<<p<<1$ )

(*p не близко к 0 и к 1*)

Тогда вероятность того, что событие A наступит

не менее к-раз и не более m-раз,

приближенно равна $\boxed{P_n(k \le i \le m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}$

$$где\ \ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt \quad - \quad функция Лапласа$$

$$x_1 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

# Схема Бернулли

- **Пример 2 .**
- Завод изготавливает 80% высоконапорных железобетонных труб первого сорта.
- Определить вероятность того, что из 100 труб 75 будет первого сорта.
- **Решение.**
- n =100 – велико, p=0,8 –не близко к 0 и к 1.
- По локальной теореме Муавра –Лапласа:

$$P_{100}(75) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\varphi\left(\frac{75-80}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= 0{,}25\varphi(-1{,}25) \approx 0{,}046$$

# Схема Бернулли

- **Пример 3 .**
- Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8.
- Производится 100 выстрелов.
- Норматив считается выполненным, если цель будет поражена не менее 75 раз.
- Определить вероятность выполнения норматива.
- **Решение.**
- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(75 \le i \le 100) \cong \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=0{,}5+0{,}3943\approx 0{,}89$$

КОНЕЦ

и

Слава БОГУ!