Начало

Оглавление

Составитель

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(учебная дисциплина)

Составители

доценты кафедры математики и моделирования ВГУЭС

Шуман Галина Ивановна

Волгина Ольга Алексеевна

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

Элементы аналитической геометрии на плоскости

ВГУЭС

Начало
Оглавление
Составитель

Содержание

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым, только им присущим геометрическим свойством.

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел - ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (то есть равенства, связывающего координаты точек линии).

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- **Уравнением линии** (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x; y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются **текущими координатами** точек линии.

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат **разные виды уравнений прямой.**

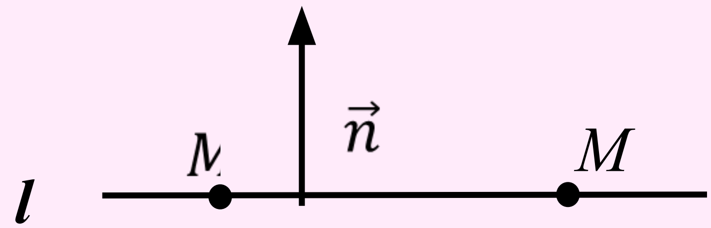
Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка прямой l. Вектор $\vec{n}(A; B)$, перпендикулярный прямой l, называется **нормальным вектором** (или **нормалью**) этой прямой.

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- Уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно данному вектору $\vec{n}$.**



ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые в последнем уравнении, получим

$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Обозначим

$-Ax_0 - By_0 = C$, тогда уравнение примет вид

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0},$$

которое называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

ВГУЭС

Начало

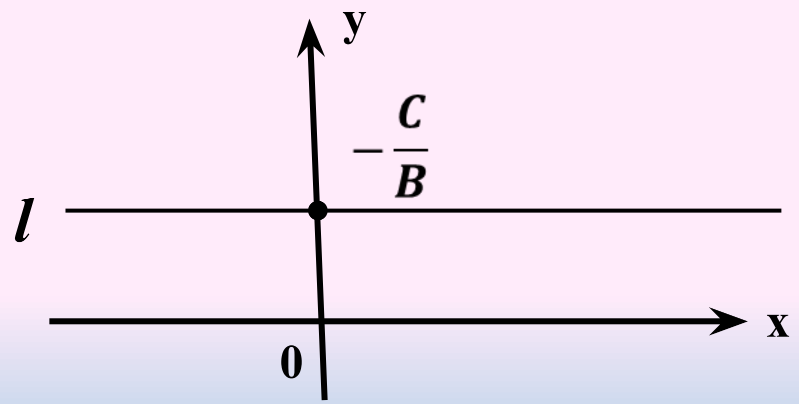
Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Некоторые **частные случаи** общего уравнения прямой:

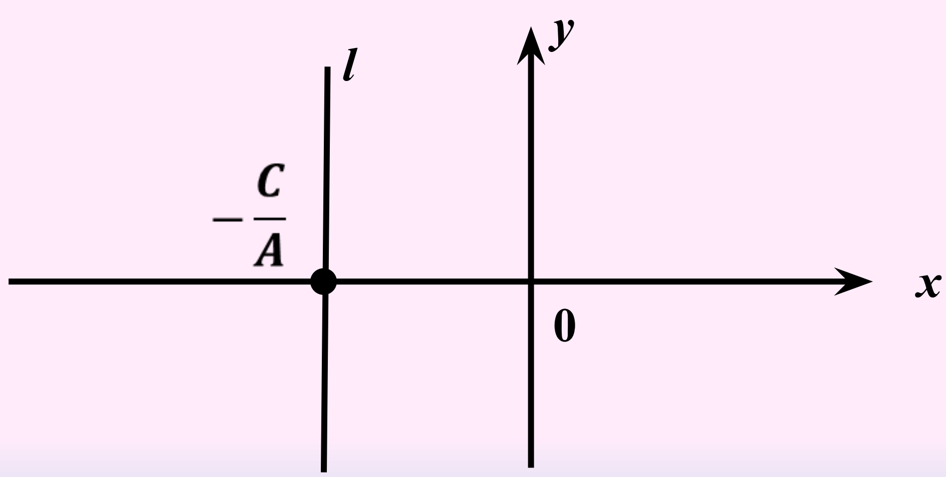
1) если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение приводится к виду $\boldsymbol{y = -\frac{C}{B}}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox



ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

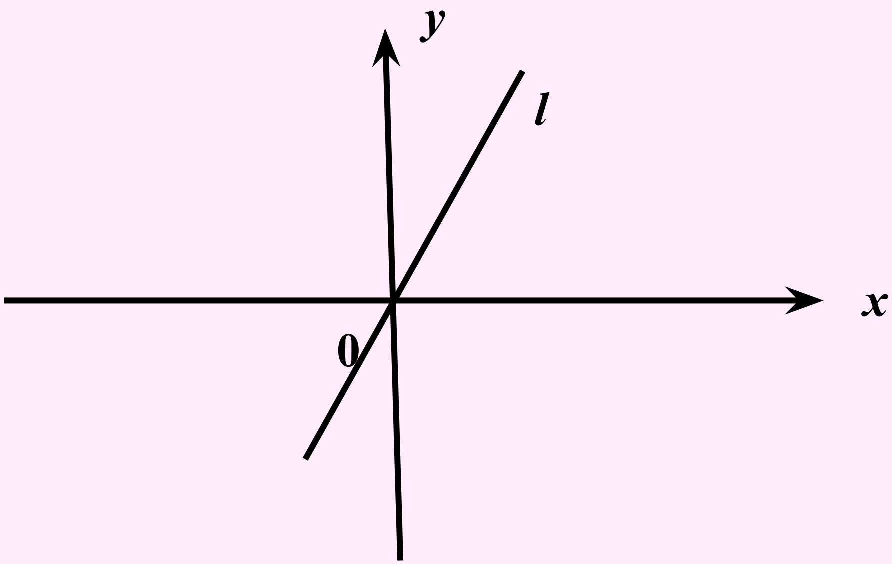
- 2) если $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$, то уравнение приводится к виду $\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}}$, прямая параллельна оси Oy



ВГУЭС

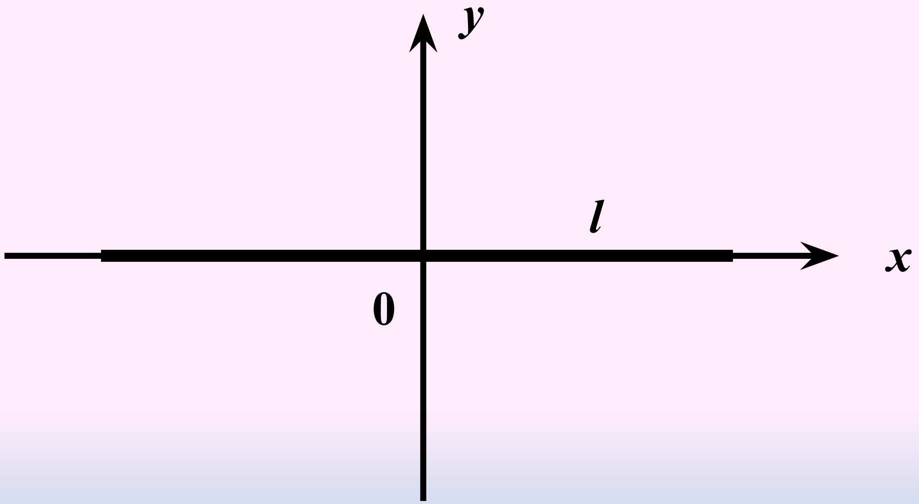
§ 1. Прямая на плоскости

- 3) если $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$, то получим уравнение прямой $Ax + By = 0$, проходящей через начало координат



§ 1. Прямая на плоскости

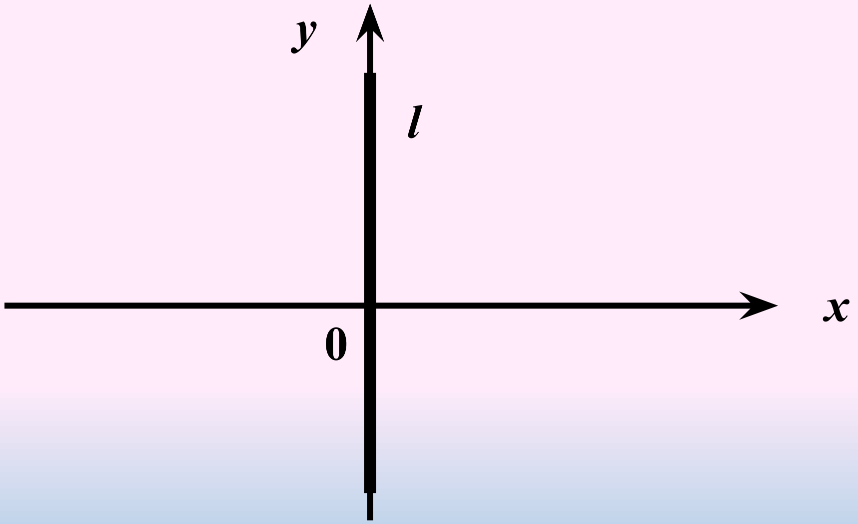
- 4) если $A = 0, B \neq 0, C = 0$, уравнение прямой принимает вид $By = 0$ или $y = 0$, которая проходит через ось Ox



ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- 5) если $A \neq 0, B = 0, C = 0$, уравнение прямой принимает вид $Ax = 0$ или $x = 0$, которая проходит через ось Oy



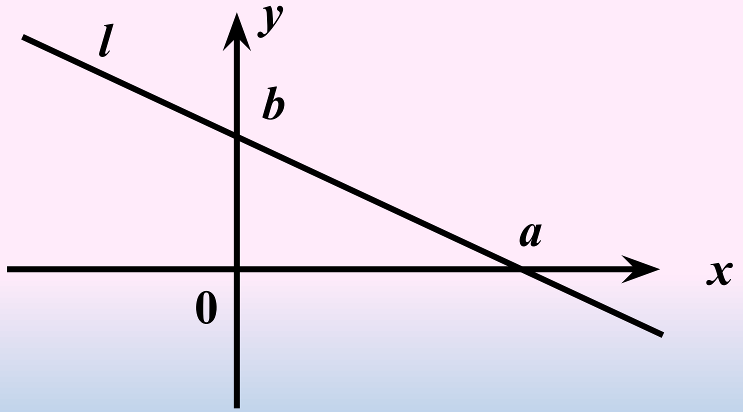
Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Если в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0, C \neq 0$, его можно преобразовать к виду $Ax + By = -C$ или $\frac{x}{-C/_A} + \frac{y}{-C/_B} = 1$. Обозначив $\frac{-C}{A} = a, \frac{-C}{B} = b$, получим уравнение $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = 1$, которое называется **уравнением прямой в отрезках**

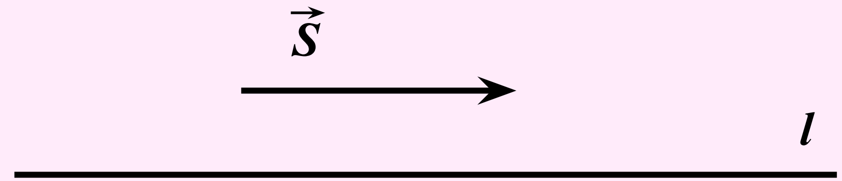


ВГУЭС

Начало
Оглавление
Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Вектор $\vec{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{n})$, параллельный прямой, называется **направляющим вектором прямой.**



Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка на прямой, $\vec{s}(m;n)$ – направляющий вектор этой прямой, $M(x;y)$ – произвольная точка прямой $\boldsymbol{l}$.

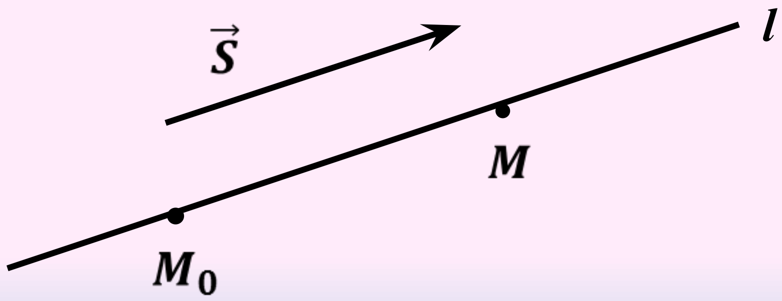
ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- Уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

называется **каноническим уравнением** прямой или **уравнением прямой, проходящей через данную точку, параллельно данному вектору**.



ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- В частности, если прямая ***l*** параллельна оси Ox, то ее направляющий вектор $\vec{S}(m;0)$ и уравнение прямой примет вид
$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}$ или $y=y_0$.

Если прямая ***l*** параллельна оси Oy, то ее направляющий вектор $\vec{S}(0;n)$, уравнение прямой примет вид $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}$ или $x=x_0$.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Если в каноническом уравнении положить $\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t$, где t – параметр, переменная величина, $t \in R$ и выразить x и y, получим уравнения $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ t \in R \end{cases}$

которые называются **параметрическими уравнениями прямой.**

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Пусть на прямой l заданы две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, $M(x;y)$ – текущая точка этой прямой. Тогда уравнение вида $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ называется **уравнением прямой, проходящей через две данные точки.**

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости

- Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – заданная точка на прямой l, α – угол наклона прямой l к оси Ox, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Обозначим $tg\alpha = k$ (k – угловой коэффициент прямой). Тогда уравнение вида

$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.**

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Прямая на плоскости

- Выразим y из последнего уравнения:

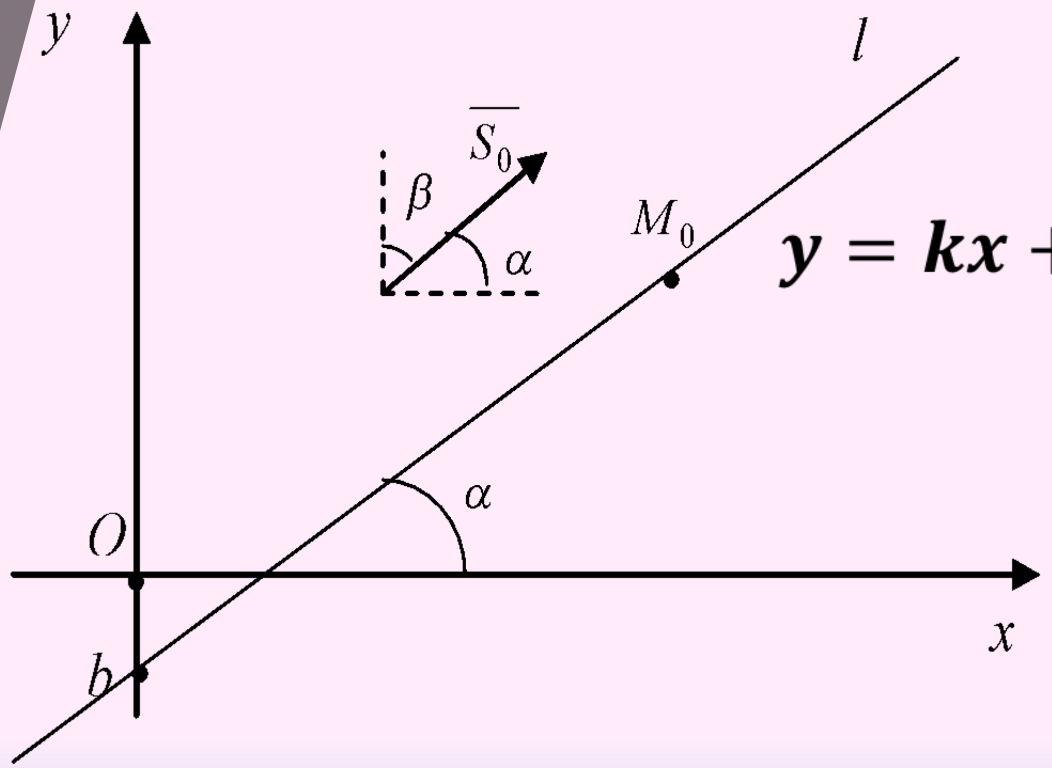
$y = kx + (y_0 - kx_0)$, обозначим $y_0 - kx_0 = b$, тогда получим уравнение

$$\boldsymbol{y_0 - kx_0 = b,}$$

которое называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом.**

ВГУЭС

§ 1. Прямая на плоскости



$$y = kx + b$$

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 2. Угол между двумя прямыми

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

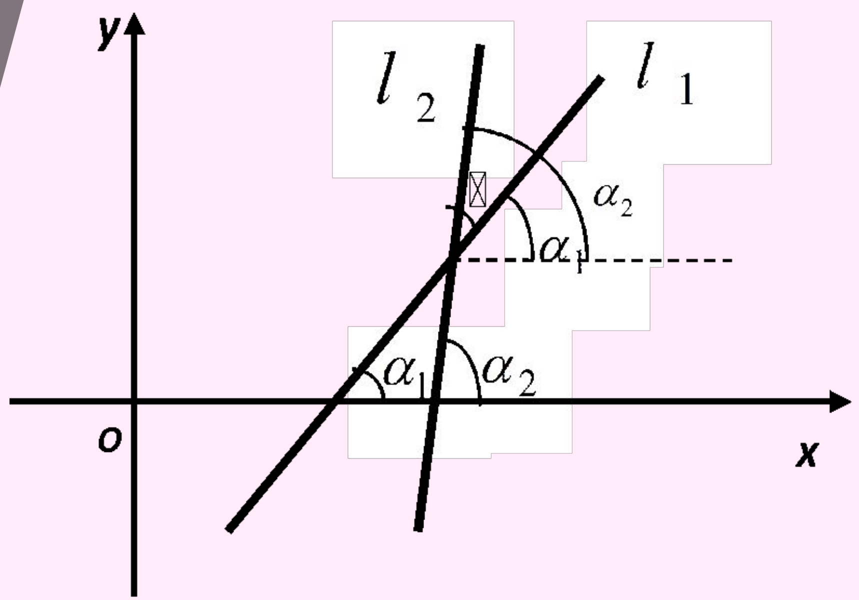
$$y = k_1 x + b_1 \text{ и}$$

$$y = k_2 x + b_2,$$

где $k_1 = \ tg\alpha_1, k_2 = \alpha_2$, α_1 и α_2 - углы наклона к оси Ox l_1 и l_2 соответственно.

ВГУЭС

§ 2. Угол между двумя прямыми



§ 2. Угол между двумя прямыми

- Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Таким образом

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

§ 2. Угол между двумя прямыми

- Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая - второй, то правая часть формулы берется по модулю, то есть

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

§ 2. Угол между двумя прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2)$ – нормальные векторы прямых. Тогда

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}}$$ или $$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}.$$

ВГУЭС

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

Начало

Оглавление

Составитель

- Если $l_1 \| l_2$, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Это означает, что $k_2 - k_1 = 0$ или

$$\boldsymbol{k_2 = k_1}.$$

Таким образом, **условие параллельности двух прямых, заданных с угловыми коэффициентами, заключается в равенстве угловых коэффициентов этих прямых.**

ВГУЭС

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

Начало

Оглавление

Составитель

- Если $l_1 \perp l_2$, тогда $1 + k_1 k_2 = 0$ или

$\boldsymbol{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$ $(\boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}})$ **- условие перпендикулярности двух прямых, заданных с угловыми коэффициентами** (угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых обратно пропорциональны и противоположны по знаку).

ВГУЭС

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

Начало

Оглавление

Составитель

- Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2)$ – нормальные векторы прямых.

  Если $l_1 \| l_2$, тогда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ **- условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями.**

ВГУЭС

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

- Если прямые заданы уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,
$l_1 \perp l_2$, тогда

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$ -

условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями.

§ 4. Расстояние от точки до прямой

Начало

Оглавление

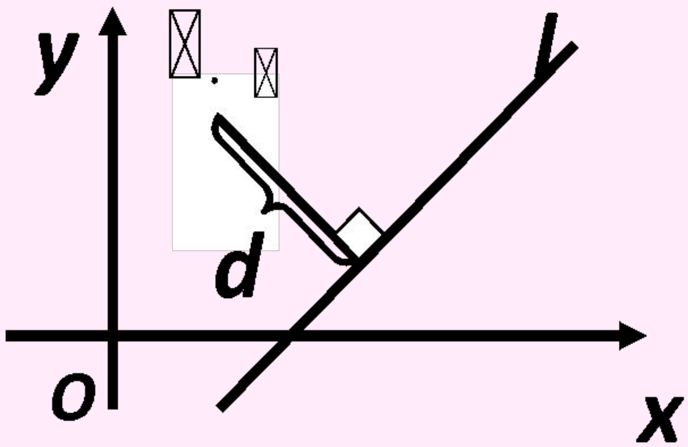
Составитель

- Пусть прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и дана точка $M_0(x_0;\ y_0)$, не принадлежащая этой прямой. Обозначим через d расстояние от точки M_0 до прямой l. Тогда

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

ВГУЭС

§ 4. Расстояние от точки до прямой



ВГУЭС