СТАТИСТИКА

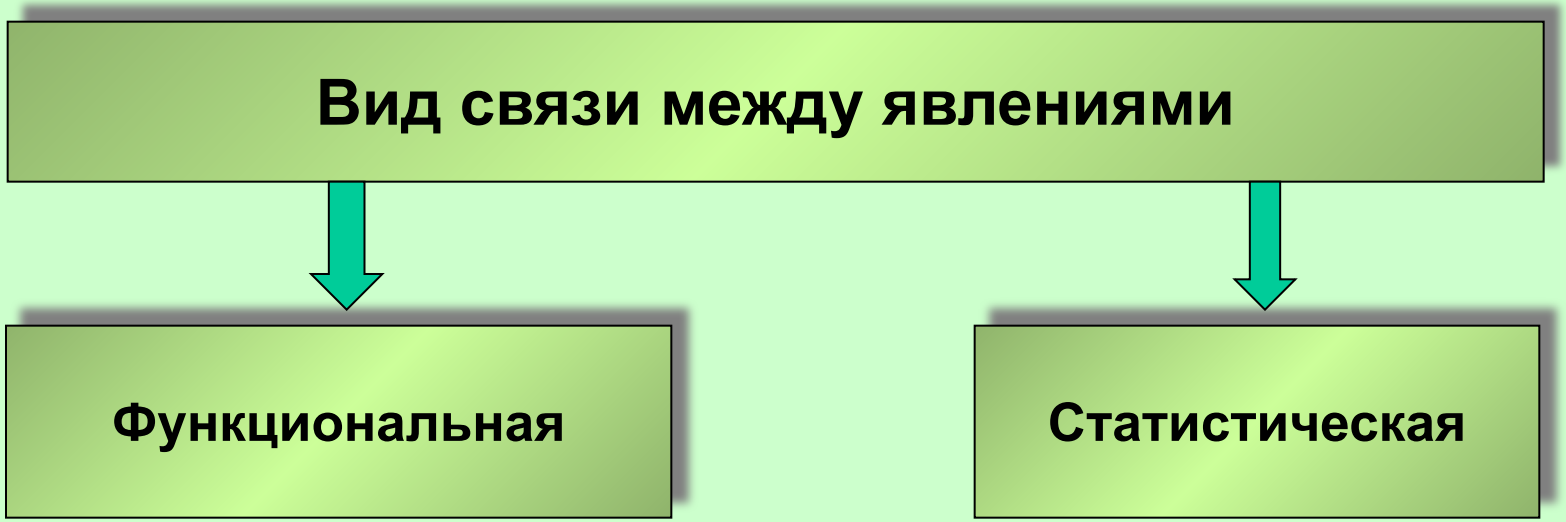
Аналитическая статистика.

Лекция 3. Статистическое изучение взаимосвязи социально-экономических явлений.

Автор: Равичев Л.В.
РХТУ им. Д.И.Менделеева
Кафедра управления технологическими инновациями
Москва - 2013

Корреляционный и регрессионный анализ

Основная задача статистики – обнаружить связь между явлениями, её вид и дать количественную характеристику этой связи.



Корреляционный и регрессионный анализ

Предмет корреляционно-регрессионного анализа составляет исследова-ние статистических зависимостей между явлениями.

Корреляционный анализ

- **Существует ли связь между явлениями?**
- **Насколько сильная связь между явлениями?**

Регрессионный анализ

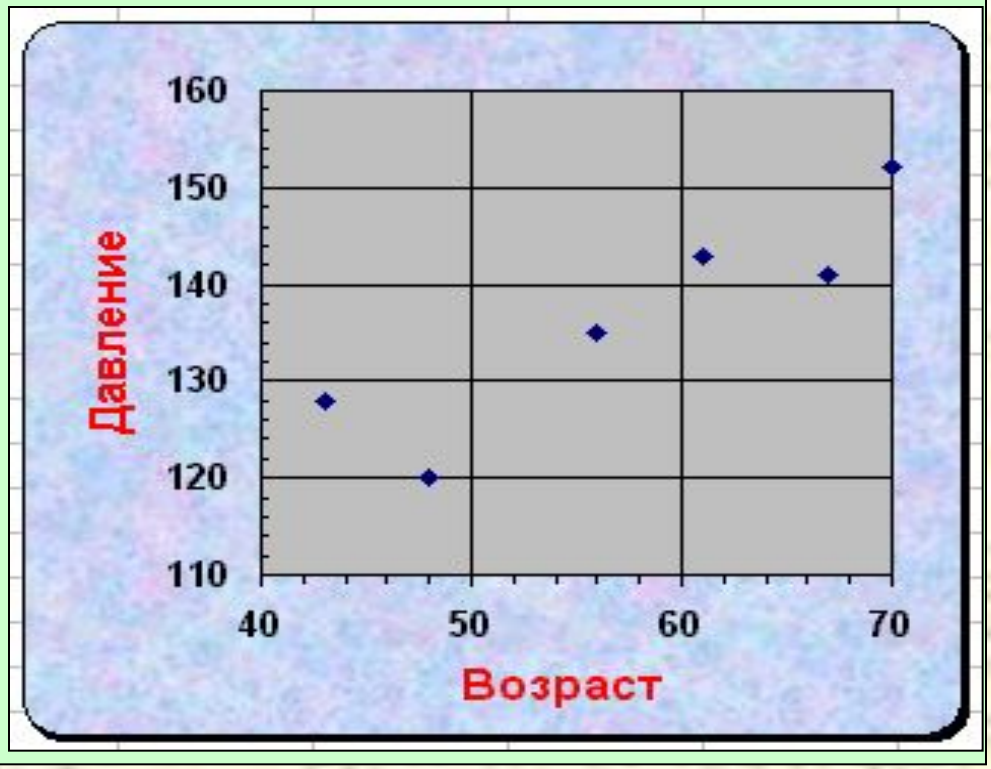
- **Каков характер связи между явлениями?**
- **Построение регрессионной модели явлений.**

Корреляционный анализ
Диаграмма рассеяния

Простейшим приемом при исследовании зависимости между двумя количественными признаками является построение **диаграммы рассеяния.**

Пример 1. Построить диаграмму рассеяния для результатов наблюдения за возрастом и артериальным давлением группы людей, приведенных в таблице.

№	Возраст, лет (x)	Давление, мм.рт.ст. (y)
1	43	128
2	48	120
3	56	135
4	61	143
5	67	141
6	70	152



Корреляционный анализ
Линейный коэффициент корреляции Пирсона

Наиболее часто употребляемой ***количественной*** характеристикой линейных зависимостей между признаками является ***линейный коэффициент корреляции Пирсона:***

$$r = \frac{\overline{(x - \tilde{x}) \cdot (y - \tilde{y})}}{\sigma_{\tilde{x}} \cdot \sigma_{\tilde{y}}}$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \tilde{x} \cdot \tilde{y}}{\sigma_{\tilde{x}} \cdot \sigma_{\tilde{y}}}$$

$$r = \frac{\sum (x_i - \tilde{x}) \cdot (y_i - \tilde{y})}{n \cdot \sigma_{\tilde{x}} \cdot \sigma_{\tilde{y}}}$$

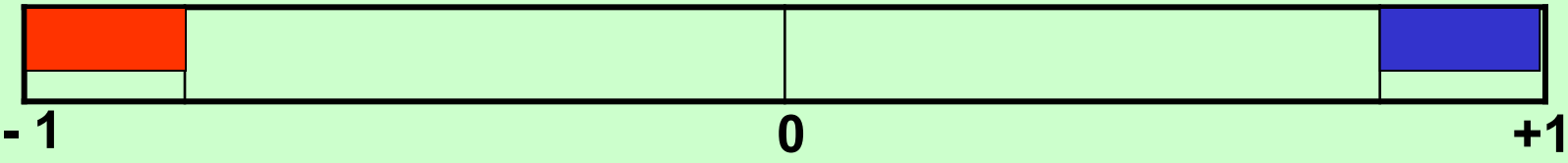
Корреляционный анализ
Линейный коэффициент корреляции Пирсона

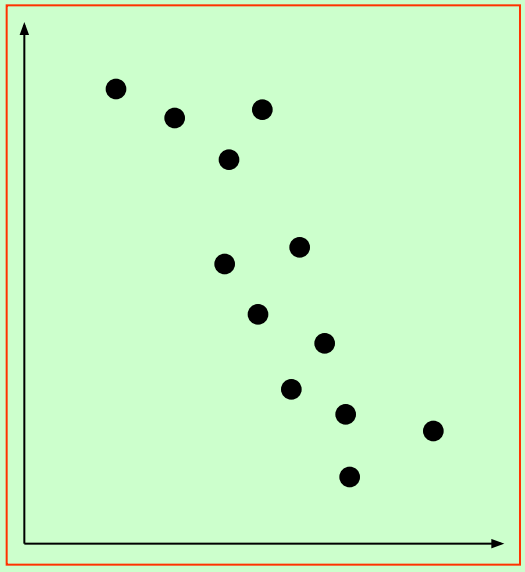
Основные свойства коэффициента корреляции:

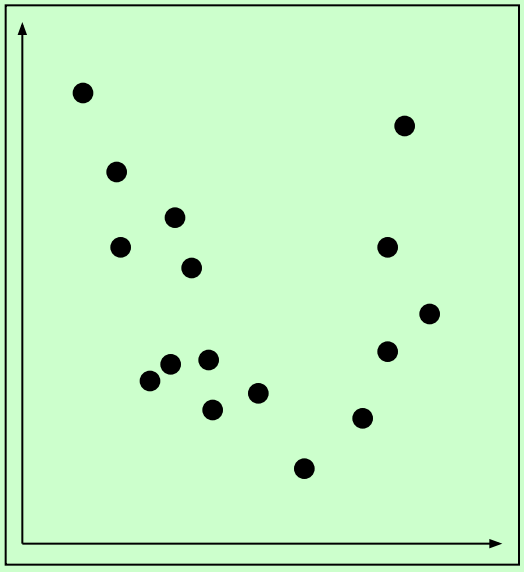
Сильная обратная связь

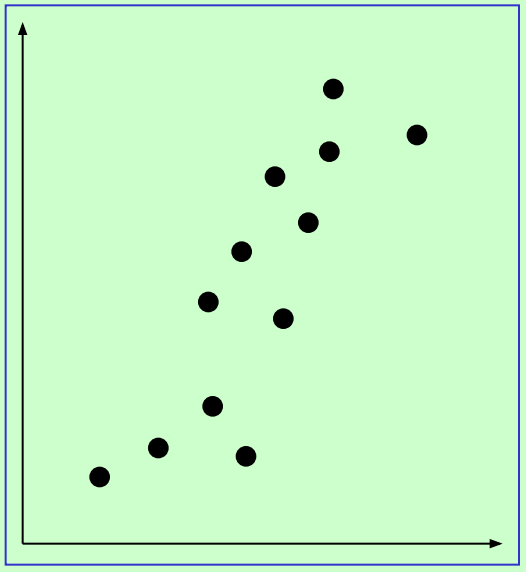
Нет линейной связи

Сильная прямая связь









Корреляционный анализ
Линейный коэффициент корреляции Пирсона

Пример 2. Для данных, приведенных в примере 1 вычислить линейный коэффициент корреляции Пирсона и оценить тип связи между величинами.

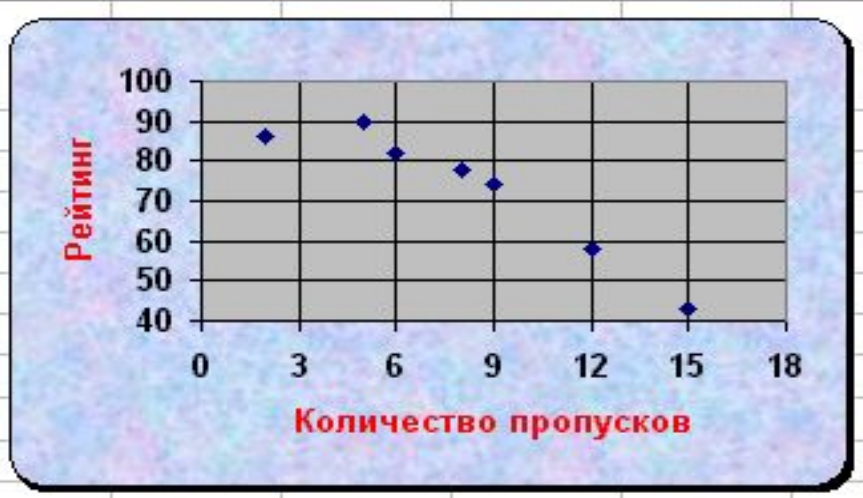
	A	B	C	D	E	F
1	№	Возраст, лет (x)	Давление, мм.рт.ст. (y)	$(x_i-x_{ср})/ст.x$	$(y_i-y_{ср})/ст.y$	
2	1	43	128	-1,50	-0,82	
3	2	48	120	-0,98	-1,59	
4	3	56	135	-0,16	-0,14	
5	4	61	143	0,36	0,62	
6	5	67	141	0,98	0,43	
7	6	70	152	1,29	1,49	
8	Среднее x		57,50	=СРЗНАЧ(B2:B7)		
9	Среднее y		136,50	=СРЗНАЧ(C2:C7)		
10	Стандарт x		9,67	=СТАНДОТКЛОНП(B2:B7)		
11	Стандарт y		10,40	=СТАНДОТКЛОНП(C2:C7)		
12	Коэффициент корреляции		0,897	=СУММПРОИЗВ(D2:D7;E2:E7)/6		
13	Коэффициент корреляции, рассчитанный через КОРРЕЛ		0,897	=КОРРЕЛ(B2:B7;C2:C7)		

Корреляционный анализ
Линейный коэффициент корреляции Пирсона

Пример 3. Для данных, приведенных в таблице построить диаграмму рассеяния и вычислить коэффициент корреляции для группы студентов (7 человек).

Число пропусков занятий, x	**6**	**2**	**15**	**9**	**12**	**5**	**8**
Итоговый рейтинг, y	**82**	**86**	**43**	**74**	**58**	**90**	**78**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Число пропусков занятий, x	Итоговый рейтинг, y						
2	6	82						
3	2	86						
4	15	43						
5	9	74						
6	12	58						
7	5	90						
8	8	78						
9								
10								
11								
12	Коэффициент кор-реляции		-0,94422	=КОРРЕЛ(A2:A8;B2:B8)				
13								

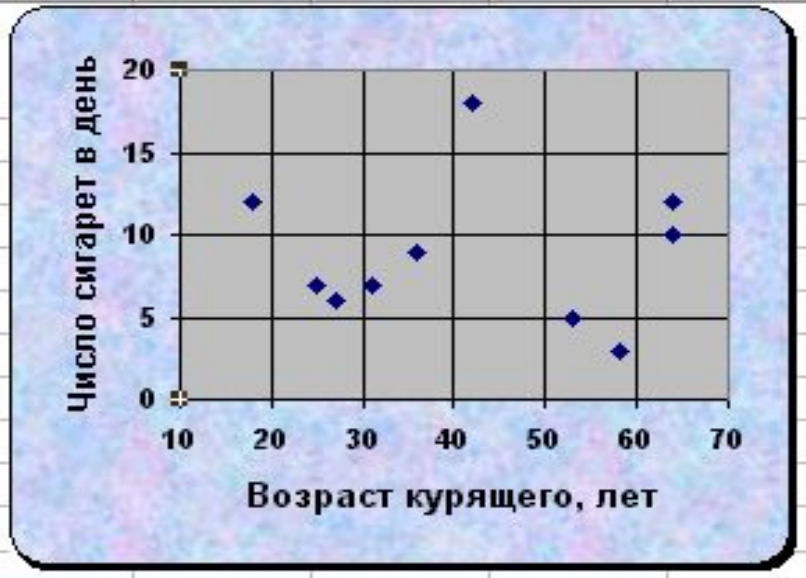


Корреляционный анализ
Линейный коэффициент корреляции Пирсона

Пример 4. В таблице приведены данные для группы курящих людей. Построить диаграмму рассеяния и вычислить коэффициент корреляции.

Возраст курящего, x	**27**	**64**	**36**	**42**	**31**	**18**	**53**	**64**	**58**	**25**
Число сигарет в день, y	**6**	**10**	**9**	**18**	**7**	**12**	**5**	**12**	**3**	**7**

	A	B	C	D	E	F	G
1	Возраст курящего, x	Число сигарет в день, y					
2	27	6					
3	64	10					
4	36	9					
5	42	18					
6	31	7					
7	18	12					
8	53	5					
9	64	12					
10	58	3					
11	25	7					
12							
13	Коэффициент корреляции		-0,03507	=КОРРЕЛ(A2:A8;B2:B8)			



Корреляционный анализ
Проверка значимости коэффициента корреляции

Линейный коэффициент корреляции для генеральной совокупности:

$$\rho = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{N \cdot \sigma_{\bar{x}} \cdot \sigma_{\bar{y}}}$$

Критерий Стьюдента для коэффициента корреляции:

$$t_p = |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

При большом числе наблюдений (n>100):

$$t_p = |r| \sqrt{\frac{n}{1-r^2}}$$

Корреляционный анализ
Проверка значимости коэффициента корреляции

Оценка значимости коэффициента корреляции проводится с помощью ***аппарата проверки гипотез.***

Относительно ***генерального*** коэффициента корреляции можно выдвинуть две гипотезы:

- генеральный коэффициент корреляции равен 0 (основная гипотеза);
- генеральный коэффициент корреляции отличен от 0.

Сформировав выборку и рассчитав её коэффициент корреляции r, необходимо решить – является ли его значение настолько большим, чтобы вероятность (по различным выборкам) выпадения такого значения при нулевом генеральном коэффициенте корреляции ρ была бы мала (меньше уровня значимости). Если является, то в этом случае основная гипотеза отвергается, а коэффициент корреляции и установленная зависимость между величинами полагаются значимыми.

Корреляционный анализ
Проверка значимости коэффициента корреляции

Пример 5. Исследовать значимость коэффициента корреляции, рассчитанного в примере 2.

1) Сформулируем проверяемые утверждения:

H_0: $\rho=0$ (в генеральной совокупности нет зависимости, найденная зависимость случайна);

H_1: $\rho\neq0$ (найденная зависимость справедлива для генеральной совокупности).

2) Находим критическое значение критерия Стьюдента:

при $p=0,05$ и $k=6-1=5$ $\mathbf{t_{кр}=2,571}$

3) Находим расчетное значение критерия Стьюдента:

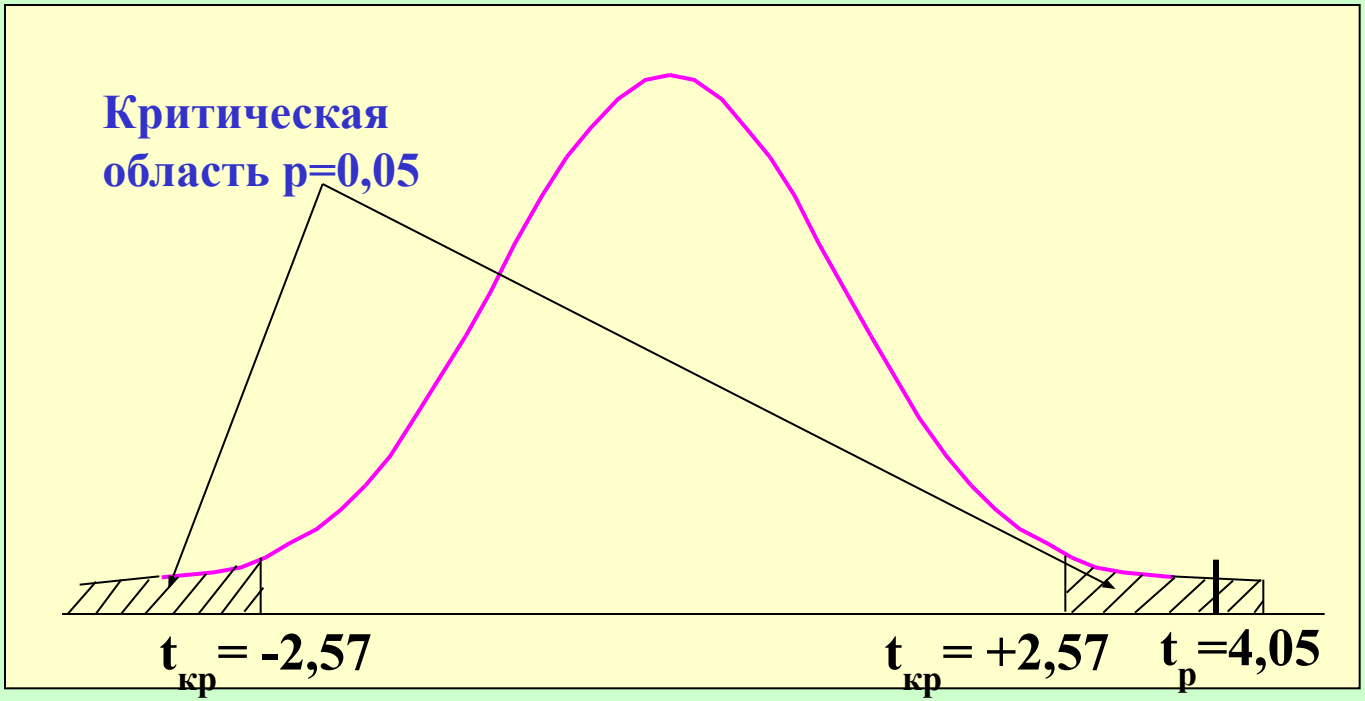
$$\mathbf{t_р=4,059}$$

4) Находим критическую область значения критерия Стьюдента:

$$\mathbf{|t_р| \geq t_{кр}}$$

Корреляционный анализ
Проверка значимости коэффициента корреляции

5) Принятие решения. Значение критерия попадает в критическую область:



основная гипотеза отклоняется.

Вывод: прямая зависимость между возрастом человека и артериальным давлением является значимой и её можно распространить на всю совокупность пациентов.

Регрессионный анализ

Диаграмма рассеяния → **Проверка значимости коэффициента корреляции** → **Построение уравнения регрессии**

Наиболее распространенным способом построения уравнения регрессии является ***метод наименьших квадратов (МНК).***

Метод МНК для получения уравнения регрессии основан на минимизации суммы квадратов остатков:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + \varphi(a_i, x_i))]^2 \Rightarrow \min$$

Уравнение регрессии является <u>линейным</u> относительно коэффициентов a_j (j=0,1,…,n).

Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия

Для уравнения линейной регрессии:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} [(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1)] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} [(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i)] = 0$$

Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия

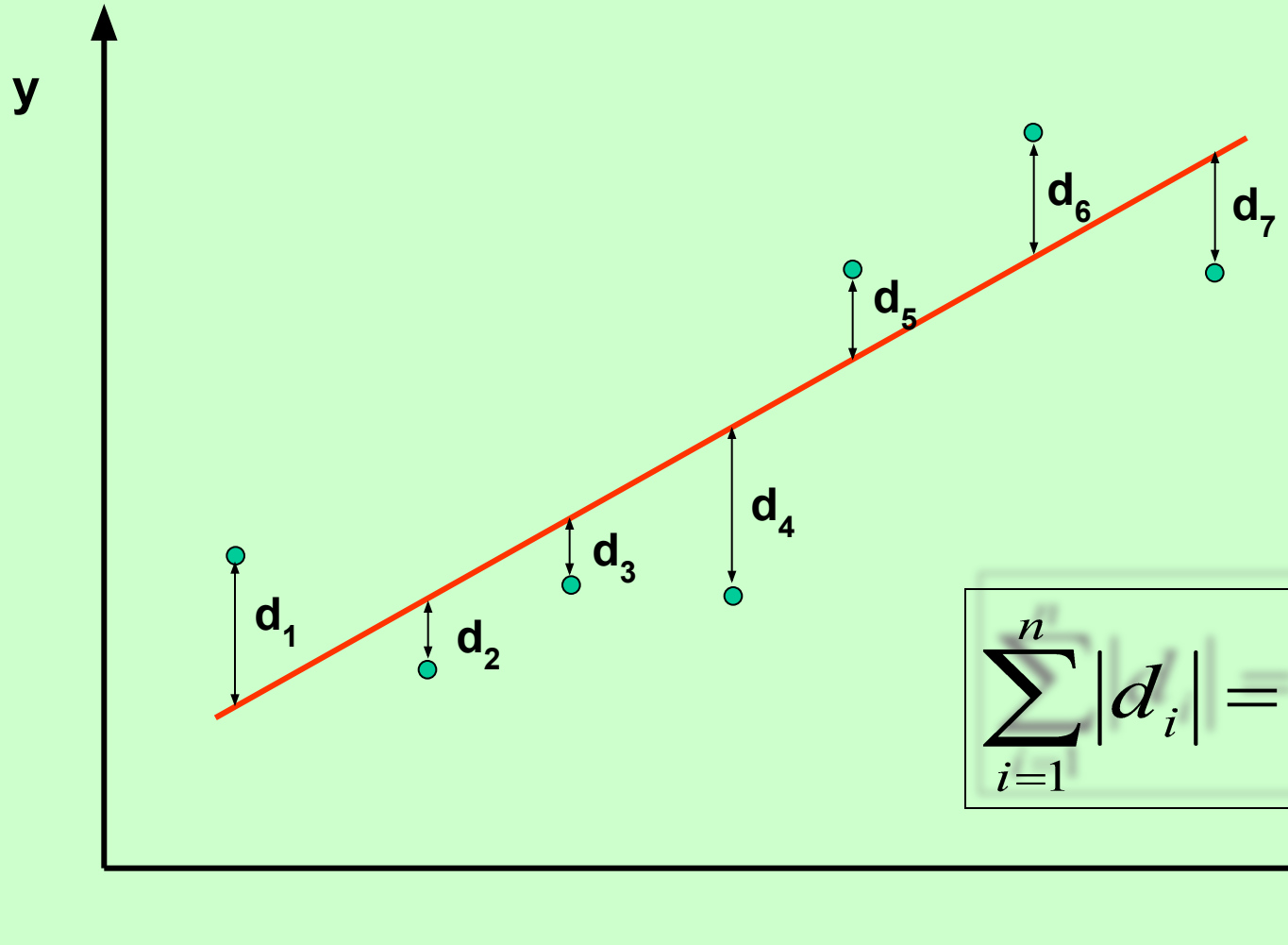
$$na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(y_i)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

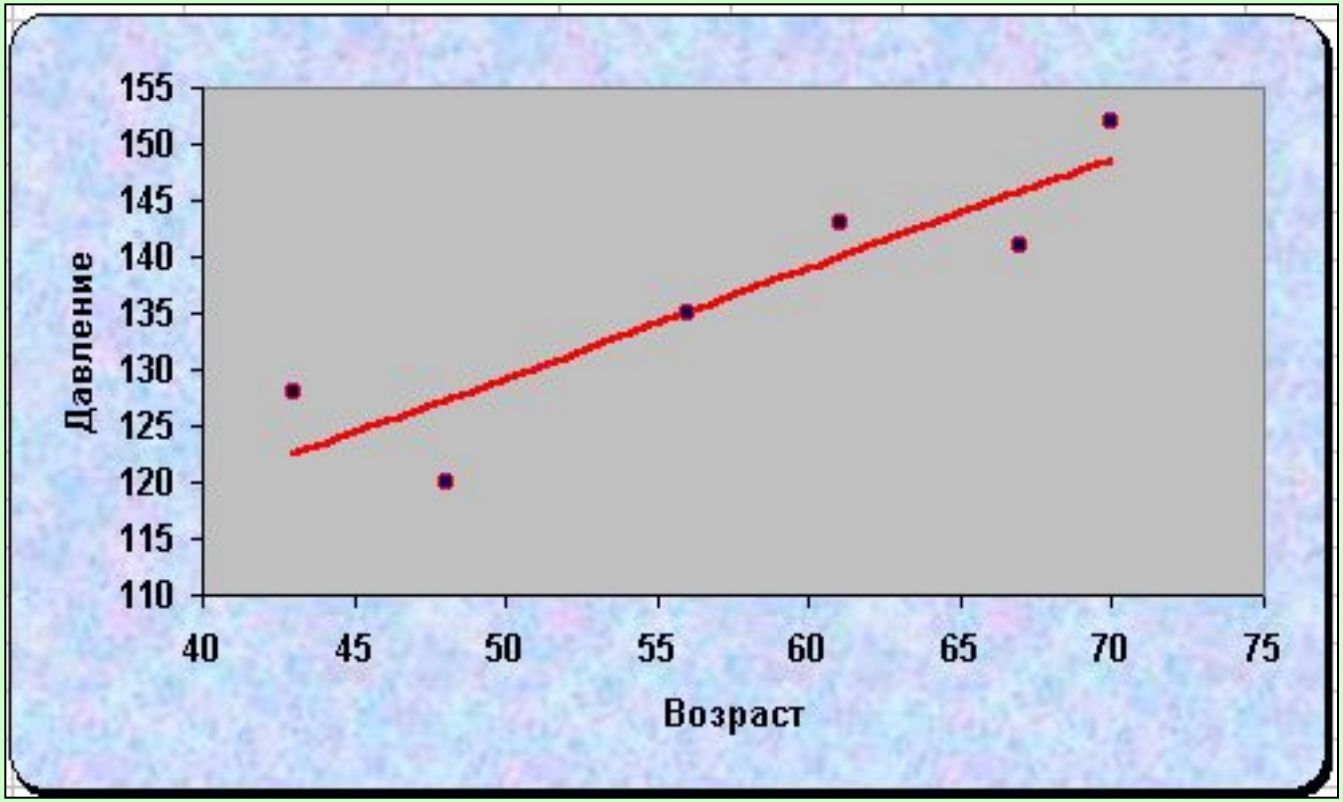
Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия



$$\sum_{i=1}^{n} |d_i| = \min$$

Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия

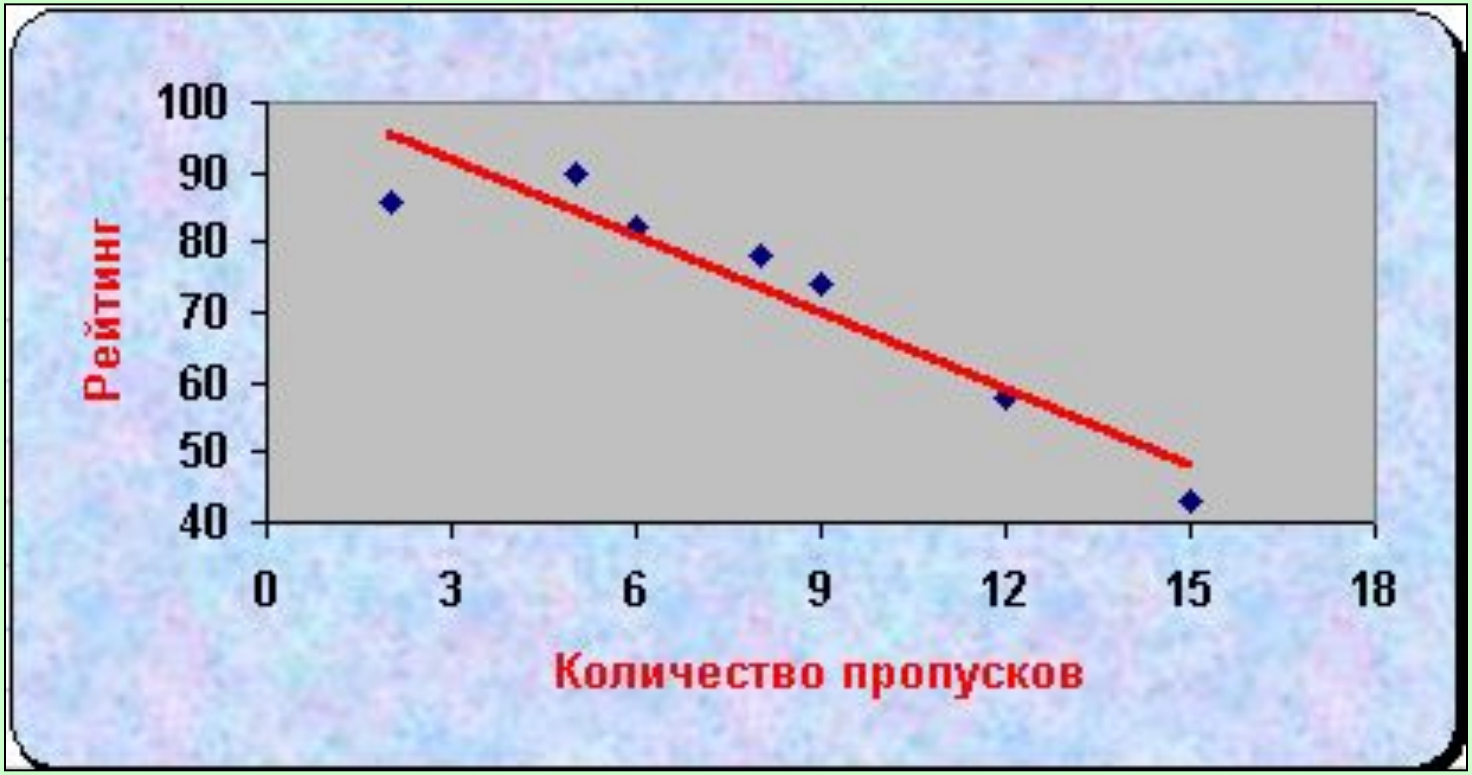
Пример 6. Построить уравнение линейной регрессии для зависимости величин возраста и давления, приведенных в примере 1.



$$\hat{y} = 81{,}048 + 0{,}964x$$

Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия

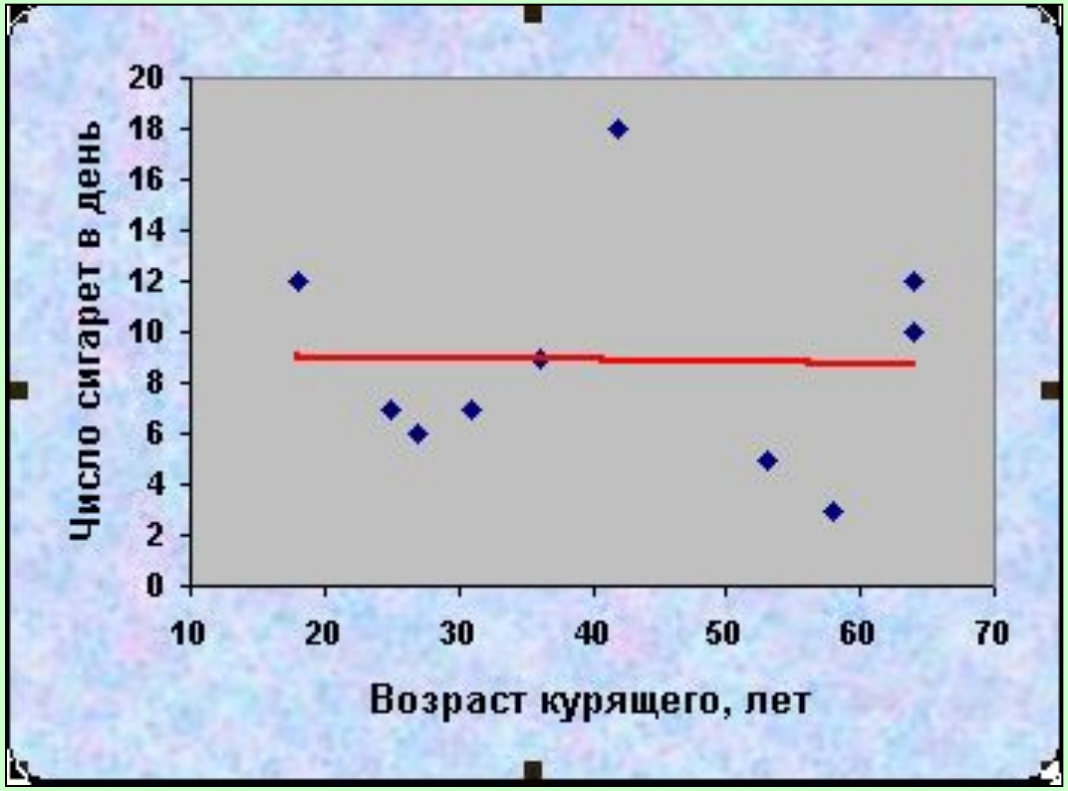
Пример 7. Построить уравнение линейной регрессии для зависимости количества пропущенных занятий и рейтинга, приведенных в примере 3.



$$\hat{y} = 102{,}49 - 3{,}62x$$

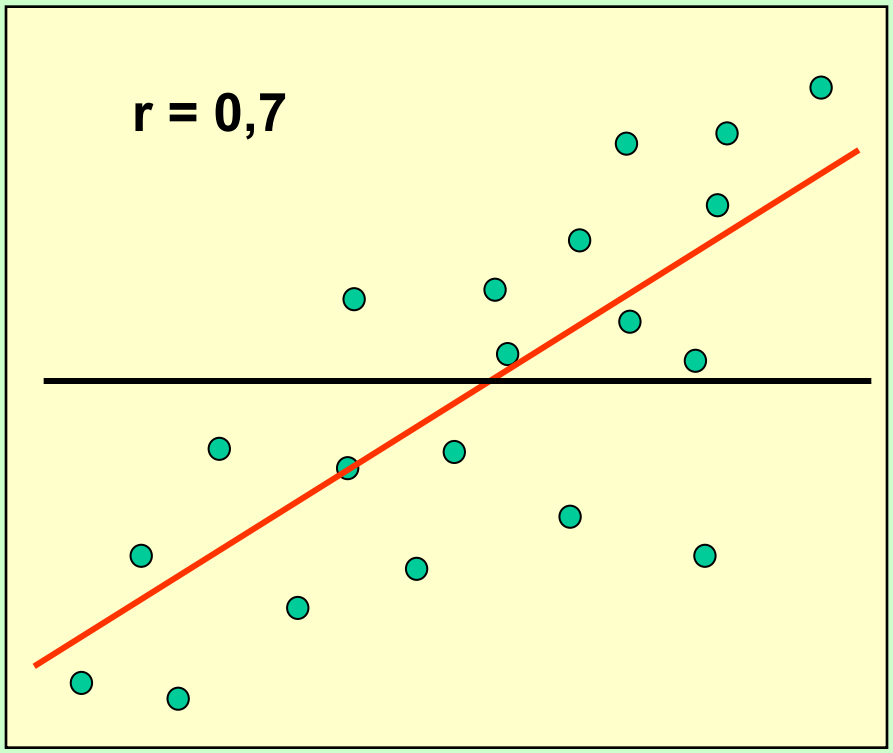
Регрессионный анализ
Парная линейная регрессия

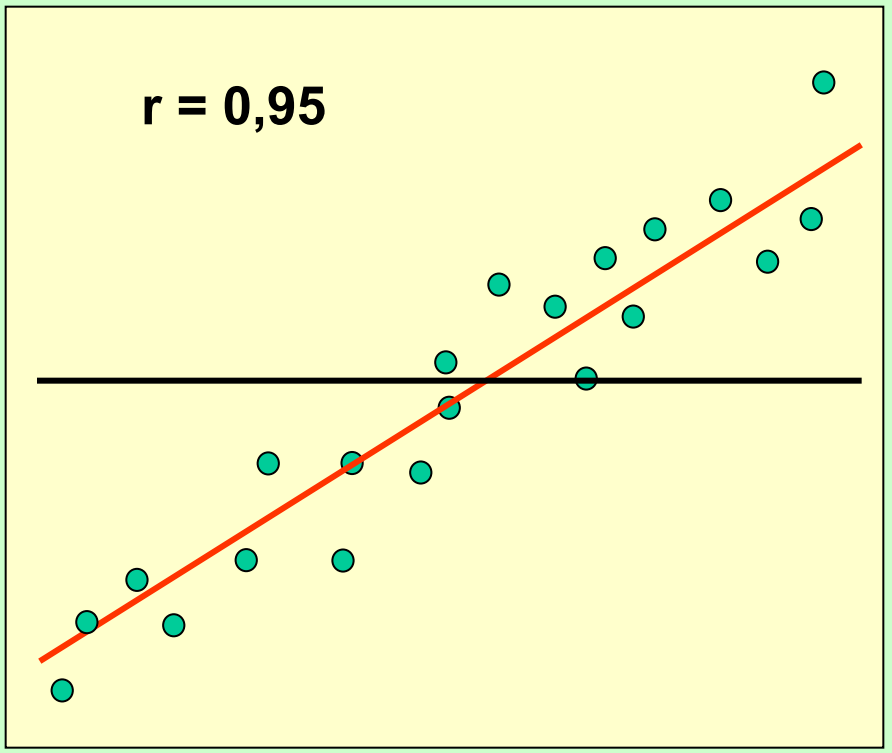
Пример 8. Построить уравнение линейной регрессии для данных, приведенных в примере 4.



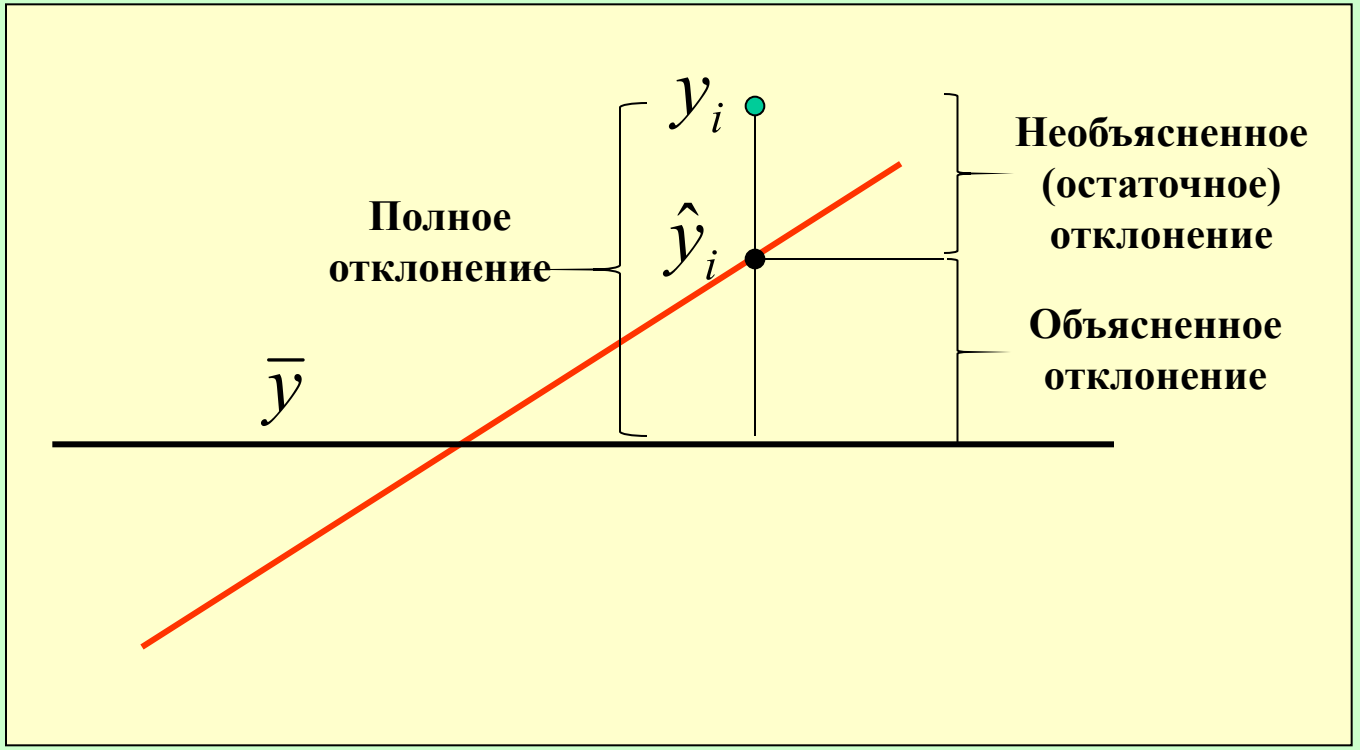
$$\hat{y} = 9{,}27 - 0{,}009x$$

Регрессионный анализ
Анализ точности модели.





Регрессионный анализ
Анализ точности модели.



Для i-ой точки:

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

Регрессионный анализ
Анализ точности модели.

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

$$\frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \frac{1}{n}\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 + \sigma_{ост}^2$$

Регрессионный анализ
Анализ точности модели.

Коэффициент детерминации:

$$r^2 = \frac{S^2_{\hat{y}}}{S^2_y}$$

Коэффициент детерминации является основной характеристикой регрессионной модели и показывает, какую долю вариации (изменчивости) результативного признака можно объяснить изменением факторного признака.

Одним из практических применений коэффициента детерминации является оценка качества и сравнение между собой различных моделей (линейной и нелинейных) парной регрессии.

Регрессионный анализ
Стандартные ошибки.

Помимо коэффициента детерминации, качество регрессионной модели характеризуют *стандартные ошибки коэффициентов:*

$$S_{ост}(a_0) = \frac{S_{ост}}{\sqrt{n-2}}$$

$$S_{ост}(a_1) = \frac{S_{ост}}{\sqrt{n-2}\cdot S_x}$$

и *стандартная ошибка модели:*

$$S_{ост}(\hat{y}) = \sqrt{\left(1+\frac{2}{n-2}\right)}\cdot S_{ост}$$

где:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

дисперсия независимой величины x

Регрессионный анализ
Схема проверки гипотез о значимости коэффициентов.

<u>Пример 9.</u> На основании данных наблюдений в США за 25 – летний период (1959 – 1983 годы) построена зависимость суммарных расходов на питание (y) от располагаемых доходов (x):

$$\hat{y} = 55{,}3 + 0{,}093x$$

$$S_{ост}(a_0) = 2{,}4;\ \ S_{ост}(a_1) = 0{,}003$$

При уровне значимости 5% проверить гипотезы о значимости коэффициентов.

Регрессионный анализ
Схема проверки гипотез о значимости коэффициентов.

1) Гипотезы для обоих коэффициентов формулируются одинаково:

$H_0: a_0=0$; $H_1: a_0\neq 0$.

$H_0: a_1=0$; $H_1: a_1\neq 0$.

2) Находим критическое значение критерия Стьюдента:

при p=0,05 и k=25-2=23, $\mathbf{t_{кр}=2,069}$

3) Находим расчетные значения критерия Стьюдента:

$$\mathbf{t_p(a_0)= a_0/S_{ост}(a_0)=55,3/2,4=23,04}$$

$$\mathbf{t_p(a_1)= a_1/S_{ост}(a_1)=0,093/0,003=31}$$

4) Принятие решения. Основные гипотезы отклоняются, коэффициенты значимы.

$$\mathbf{a_0-S_{ост}(a_0)*t_{kp}<a_0<a_0+S_{ост}(a_0)*\ t_{kp}}$$

$$\mathbf{a_1-S_{ост}(a_1)*t_{kp}<a_1<a_1+S_{ост}(a_1)*\ t_{kp}}$$

Регрессионный анализ
Проверка гипотезы о значимости модели.

Для решения вопроса действительно ли полученное при оценке регрессии значение r^2 отражает истинную зависимость или оно получено случайно, применяется процедура проверки гипотез, основанная на анализе ***F-критерия*** (критерия Фишера):

$$F_p = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2} \text{ или } F_p = \frac{S_{ост}^2}{S_y^2} \Rightarrow \frac{S_{большая}^2}{S_{меньшая}^2}$$

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-m}; \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y - y_i)^2}{n-1}$$

где m – число параметров уравнения регрессии (включая свободный):

Регрессионный анализ
Проверка гипотезы о значимости модели.

Способы нахождения критерия Фишера.

1) С помощью таблиц распределения (k_1 – число степеней свободы числителя, k_2 – число степеней свободы знаменателя):

Уровень значимости p=0,05							
k_2	k_1						
	1	2	…	6	…	24	…
1	161	200	…	234	…	249	…
2	18,51	19,00	…	19,33	…	19,45	…
…	…	…	…	…	…	…	…
23	4,28	3,42	…	2,53	…	2,00	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Регрессионный анализ
Проверка гипотезы о значимости модели

2) С помощью стандартной функции Excel ***FРАСПОБР.***

FРАСПОБР(p;k_1;k_2)

	A	B	C
1	Число степеней свободы числителя	24	
2	Число степеней свободы знаменателя	23	
3	Уровень значимости (p)	0,050	
4	Критическое значение F	2,005	=FРАСПОБР(B3;B1;B2)

Регрессионный анализ
Нелинейная парная регрессия

<u>Пример 10.</u> В таблице приведены данные количества покупаемых бананов в месяц (кг) от годового дохода (в тыс. условных единиц) для десяти семей.

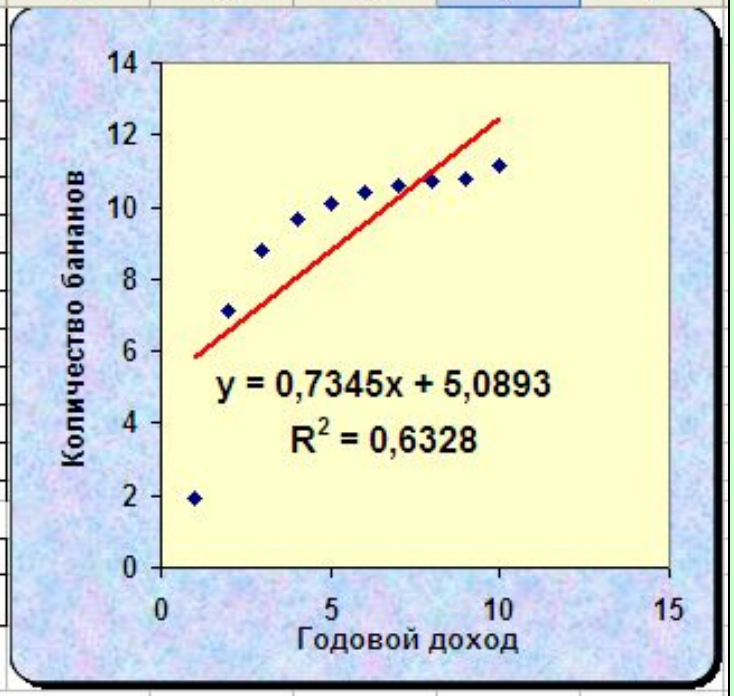
Годовой доход, x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество бананов, y_i	1,93	7,13	8,78	9,69	10,09	10,42	10,62	10,71	10,79	11,13

Построить уравнения линейной и нелинейной регрессии и оценить качество полученных моделей.

Регрессионный анализ
Нелинейная парная регрессия

1. Уравнение линейной регрессии: $\hat{y} = 5{,}0893 + 0{,}7345x$

	A	B	C	D	E
1	Годовой доход	Количество	Линейная регрессия		
2	x_i (в 1000 у.е.)	бананов y_i (в кг)	$y_{расч}$	$(y_i-y_{iрасч})^2$	$(y_{сред}-y_i)^2$
3	1	1,93	5,82	15,16	51,83
4	2	7,13	6,56	0,33	4,00
5	3	8,78	7,29	2,21	0,12
6	4	9,69	8,03	2,76	0,31
7	5	10,09	8,76	1,76	0,92
8	6	10,42	9,50	0,85	1,67
9	7	10,62	10,23	0,15	2,22
10	8	10,71	10,97	0,07	2,50
11	9	10,79	11,70	0,83	2,76
12	10	11,13	12,43	1,70	4,00
13					
14	Среднее значение y		9,13		
15	Дисперсия воспроизводимости		7,81	n-1=	9
16	Остаточная дисперсия		3,2285	n-m=	8
17	Расчетное значение критерия Фишера		2,4206	=C15/C16	
18	Критическое значение критерия Фишера		3,3881	=FРАСПОБР(0,05;E15;E16)	
19					



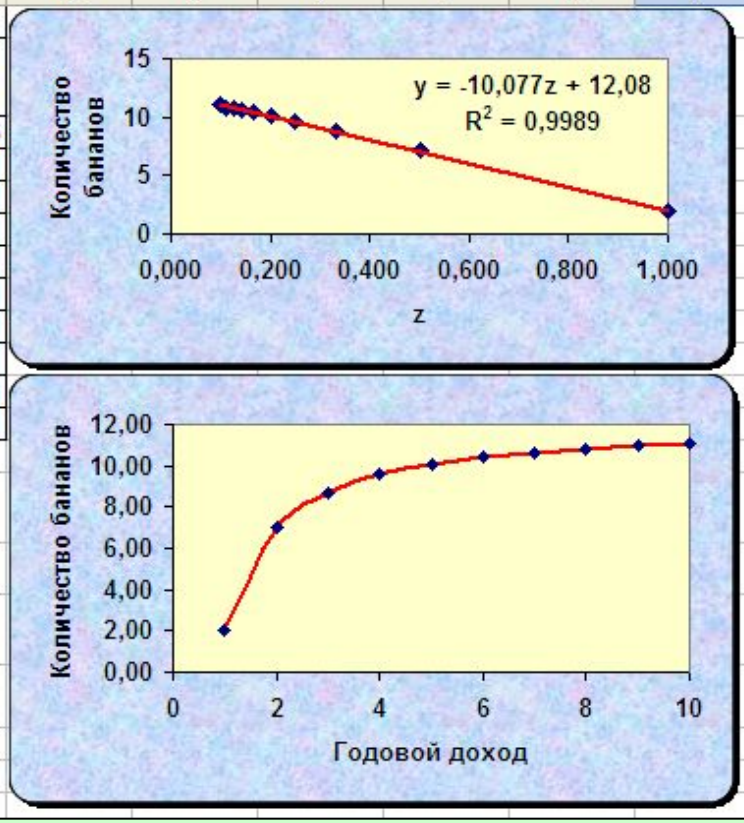
$F_р < F_{кр}$ - модель неадекватна

Регрессионный анализ
Нелинейная парная регрессия

2. Уравнение нелинейной регрессии:

$$\hat{y} = 12{,}08 - 10{,}077 \cdot \frac{1}{x}$$

	A	B	C	D	E	F
1	Годовой доход x_i (в 1000 у.е.)	Количество бананов y_i (в кг)	Нелинейная регрессия			
2			$z=1/x$	$y_{расч}$	$(y_i-y_{iрасч})^2$	$(y_{сред}-y_i)^2$
3	1	1,93	1,000	2,00	0,0053	51,8256
4	2	7,13	0,500	7,04	0,0078	3,996001
5	3	8,78	0,333	8,72	0,0035	0,121801
6	4	9,69	0,250	9,56	0,0167	0,314721
7	5	10,09	0,200	10,06	0,0006	0,923521
8	6	10,42	0,167	10,40	0,0004	1,666681
9	7	10,62	0,143	10,64	0,0004	2,223081
10	8	10,71	0,125	10,82	0,0122	2,499561
11	9	10,79	0,111	10,96	0,0290	2,758921
12	10	11,13	0,100	11,07	0,0033	4,004001
13	Среднее значение y		9,13			
14	Дисперсия воспроизводимости		7,81	n-1=	9	
15	Остаточная дисперсия		0,0099	n-m=	8	
16	Расчетное значение критерия Фишера		788,2278	=C14/C15		
17	Критическое значение критерия Фишера		3,3881	=FРАСПОБР(0,05;E14;E15)		
18						
19						
20						



$F_р > F_{кр}$ - модель адекватна

Регрессионный анализ
Нелинейная парная регрессия

Нелинейные модели парной регрессии и преобразование переменных.

Тип модели	Связь	Преобразования	Линейное уравнение
Экспоненциальная	$y=\exp(a_0+a_1x)$	$\ln(y)=u$	$u=a_0+a_1x$
Обратная по y	$y=1/(a_0+a_1x)$	$1/y=u$	$u=a_0+a_1x$
Обратная по x	$y=a_0+a_1/x$	$1/x=z$	$y=a_0+a_1z$
Дважды обратная	$y=1/(a_0+a_1/x)$	$1/x=z$; $1/y=u$	$u=a_0+a_1z$
Логарифм по x	$y=a_0+a_1\ln(x)$	$\ln(x)=z$	$y=a_0+a_1z$
Мультипликативная	$y=a_0x^{a_1}$	$\ln(x)=z$; $\ln(y)=u$; $\ln(a_0)=b$	$u=b+a_1x$
Квадратный корень по x	$y=a_0+a_1x^{1/2}$	$x^{1/2}=z$	$y=a_0+a_1z$
Квадратный корень по y	$y=(a_0+a_1x)^{1/2}$	$y^2=u$	$u=a_0+a_1x$
S-кривая	$y=\exp(a_0+a_1/x)$	$\ln(y)=u$; $1/x=z$	$u=a_0+a_1z$