

Инварианты

Работу выполнили:

Бартенев Данил

Мавлюкеев Артем

Рымарь Никита

АКТУАЛЬНОСТЬ

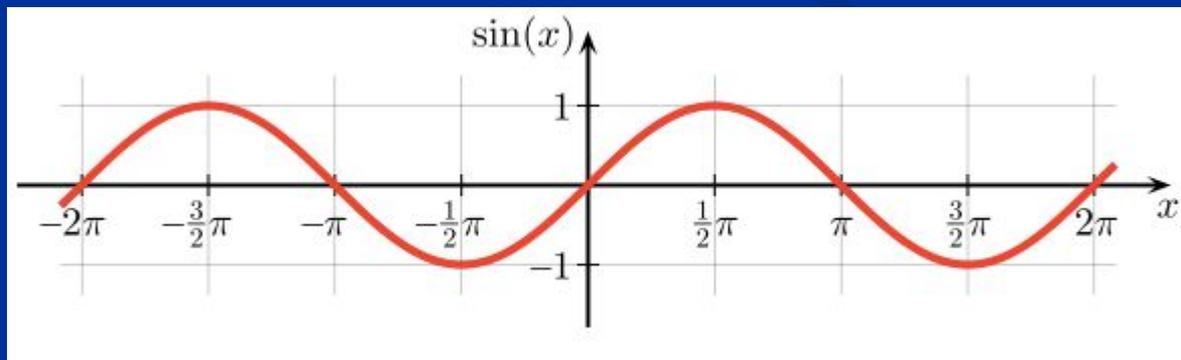
- Этот проект является продолжением работы, начатой в прошлом году. Мы познакомились с понятием инварианта, изучили историю задач, связанных с инвариантами. Так же мы выяснили, что при решении таких задач возникает много трудностей и решили попробовать классифицировать их так, чтобы по возможности упростить решение.

Цель и Задачи

- **Цель:** Систематизировать задачи на инварианты по типам и исследовать решение каждого типа
- **Задачи:** 1. Решить ряд задач и подробно исследовать способы решения
- 2. Разделить задачи на инварианты по типам
- 3. Для каждого типа составить определенный метод решения

Определение

- **Инвариант** — это свойство некоторого класса, остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа. Синонимы: независимость, неизменность, симметричность, симметрия



ОСНОВОПОЛОЖНИК

- Давид Гильберт (23 января 1862 — 14 февраля 1943) - немецкий математик-универсал, который внёс значительный вклад в развитие многих областей математики (включая теорию инвариантов).



- В ходе работы мы выяснили, что для решения некоторых задач на инварианты нужно знать материал темы «Чет и нечет», поэтому считаем нужным, занести информацию из этой темы в наш проект:

- Формула записи :

Четность – x

Нечетность – $x+1/x-1$

- Арифметика Чета и Нечета:

$$\text{Чет} + \text{Чет} = x + x = 2x$$

$$\text{Чет} + \text{Нечет} = x + x + 1 = 2x + 1$$

$$\text{Нечет} + \text{Нечет} = x + 1 + x + 1 = 2x + 2 = 3x$$

Инвариантные задачи можно разделить на группы по виду начальных данных:

- 1) В задаче требуется доказать, что существует некий инвариант, причем он явно задан в условии.
- 2) В задаче ничего не говорится и не намекается на инварианты - их надо увидеть самостоятельно.

Социологический опрос

- Мы провели социологический опрос среди участников 6А класса. В опросе принимало участие 25 человек.
- На вопрос «Знаете ли вы, что такое инвариант?» ответили :
 - «да»- 64% (16чел.)
 - «нет» – 36% (9чел.)



Социологический опрос

- На вопрос «Встречались ли вам инварианты в жизни?»
ответили :
 - «нет» - 40% (10чел.)
 - «да» - 60% (15чел.)



Виды задач на инварианты:

- 1) Задачи на четность
- 2) Задачи на делимость
- 3) Задачи с полуинвариантами
- 4) «Шахматные» задачи
- 5) Задачи, неподходящие к первым четырем типам

Задача на четность

- На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?



Решение:

- 1) После первого подхода платков останется нечетное количество (19 или 21)
- 2) После следующего шага четность меняется (18,20,22)
- 3) Соответственно после 17 шагов останется нечетное количество платков, поскольку 17 – нечетное число.

Задача на делимость

- Из цифр 2, 3, 4, ... 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

$$\frac{(a+b)^2}{3\sqrt{a-3b}} + 2a^2b^3$$

Решение:

- 1) Представим полученные числа в виде a и $2a$.
- 2) Соответственно по признаку делимости на три, мы можем сказать, что сумма этих чисел будет делиться на три ($a + 2a = 3a : 3 = a$), то есть сумма всех чисел должна делиться на 3, чтобы на поставленный вопрос ответить «Да».
- 3) $2+3+4+5+6+7+8+9=44$ не делится на 44, а значит составить такие числа нельзя.

Задача с полуинвариантами:

- **Полуинвариант** – это величина, которая изменяется монотонно, то есть только увеличивается или только уменьшается (что и есть главным при решении подобных задач)

Задача с полуинвариантом:

- В десяти сосудах содержится 1, 2, 3, ..., 10 литров воды. Разрешается перелить из сосуда А в сосуд В столько воды, сколько имеется в В. Можно ли добиться, чтобы после нескольких переливаний в 5 сосудах оказалось 3 литра, а в остальных 6, 7, 8, 9, 10?



Решение:

- **1) Первый вариант переливания:**
- В сосуде А чётное число литров ($2x$). В сосуде В чётное число литров ($2y$). После переливания в сосуде А $2x-2y=2(x-y)$ литров (чётное число). В сосуде В $2y+2y=4y$ литров (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.
- **2) Второй вариант переливания:**
- В сосуде А нечётное число литров $2x+1$. В сосуде В чётное число литров $2y$. После переливания в сосуде А $2x+1-2y=2(x-y)+1$ литров (нечётное число). В сосуде В $2y+2y=4y$ литров. (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.

Решение:

- 3) Третий вариант переливания:
- В сосуде А чётное число литров $2x$. В сосуде В нечётное число литров $2y+1$. После переливания в сосуде А $2x-(2y+1)=2x-2y-1=2(x-y)-1$ литров (нечётное число). В сосуде В $2y+1+2y+1=4y+2=2(2y+1)$ литров (чётное число). Количество чётных и нечётных чисел не изменилось.
- 4) Четвертый вариант переливания:
- В сосуде А нечётное число литров $2x+1$. В сосуде В нечётное число литров $2y+1$. После переливания в сосуде А $2x+1-(2y+1)=2x+1-2y-1=2(x-y)$ литров (чётное число). В сосуде В $2y+1+2y+1=4y+2=2(2y+1)$ литров (чётное число). Число чётных литров увеличилось на 2, а нечётных уменьшилось на 2.

«Шахматная» задача

- На шахматной доске стоит черный слон и белая ладья. Белые, как и положено, ходят первыми. Могут ли черные выиграть, и если да, при какой тактике (оба игрока стараются выиграть)?



Решение:

- Слон может ходить только по клеткам одного цвета, и если ладья все время будет ходить на клетки противоположного цвета, то у слона не будет шанса победить. (Это и есть инвариант этой задачи)

Задачи, неподходящие к первым четырем типам:

- Так же существуют задачи на инварианты, которые не подходят к вышеперечисленным типам. Это происходит, поскольку существует огромное множество типов ЭТИХ задач, но они редко используются в математике.

Вывод:

- 1) Мы увидели множество разных типов задач на инварианты. Самые распространенные типы мы представили в этом проекте
- 2) Для каждого типа задач на инварианты мы представили определенный метод решения

Спасибо за внимание!