

Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Угол между векторами

A

\vec{a}

B

\vec{b}

\vec{b}

$\vec{a} \ \vec{b} = \alpha$

α

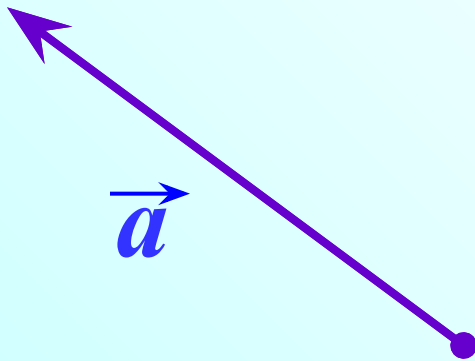
O

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

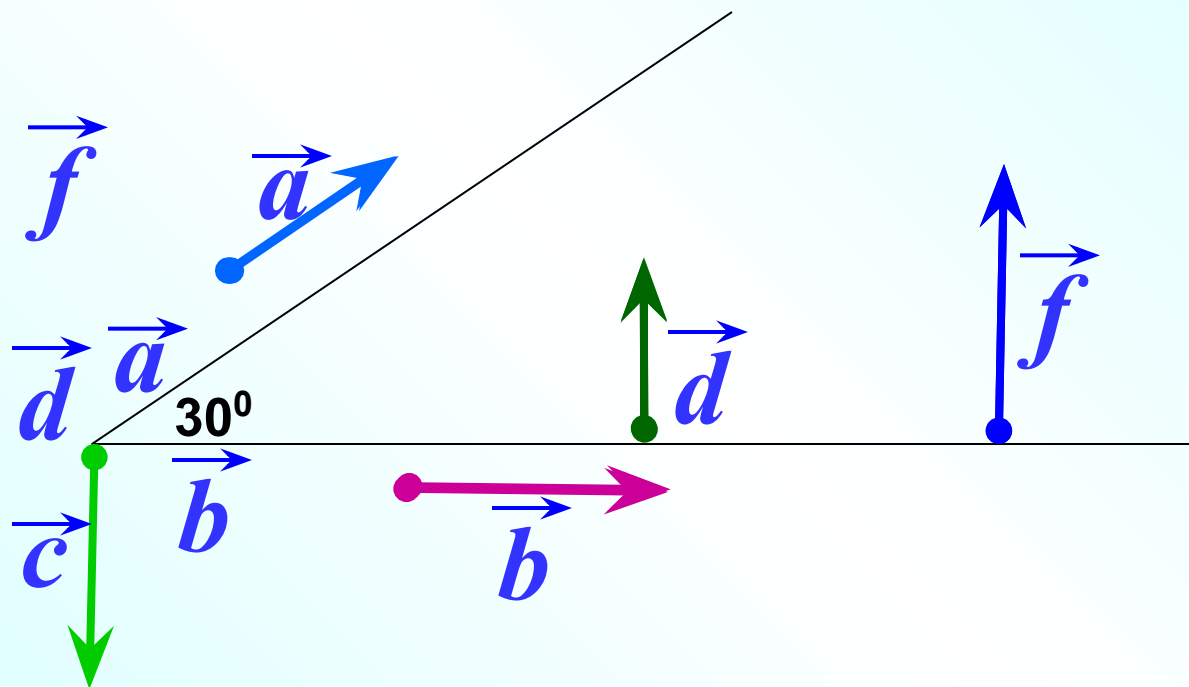
Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами равен α

\vec{a} и \vec{b}



Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

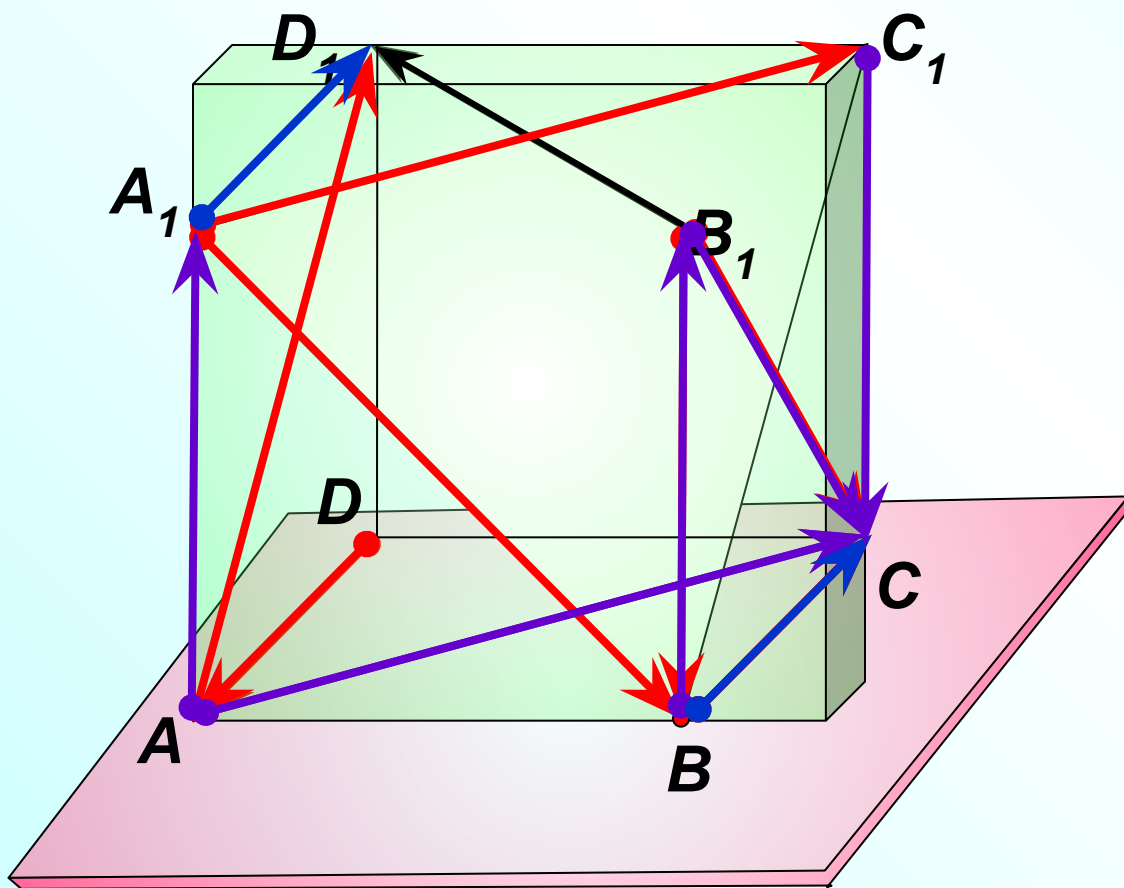
Два вектора называются
перпендикулярными,
если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

№ 441 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
 Найдите угол между векторами.



$$\overrightarrow{B_1 B}, \overrightarrow{B_1 C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{D A}, \overrightarrow{B_1 D_1} = 135^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 C_1}, \overrightarrow{A_1 B} = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{B C}, \overrightarrow{A C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{B_1 C}, \overrightarrow{A D_1} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{B B_1}, \overrightarrow{A C} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1}, \overrightarrow{B C} = 0^\circ$$

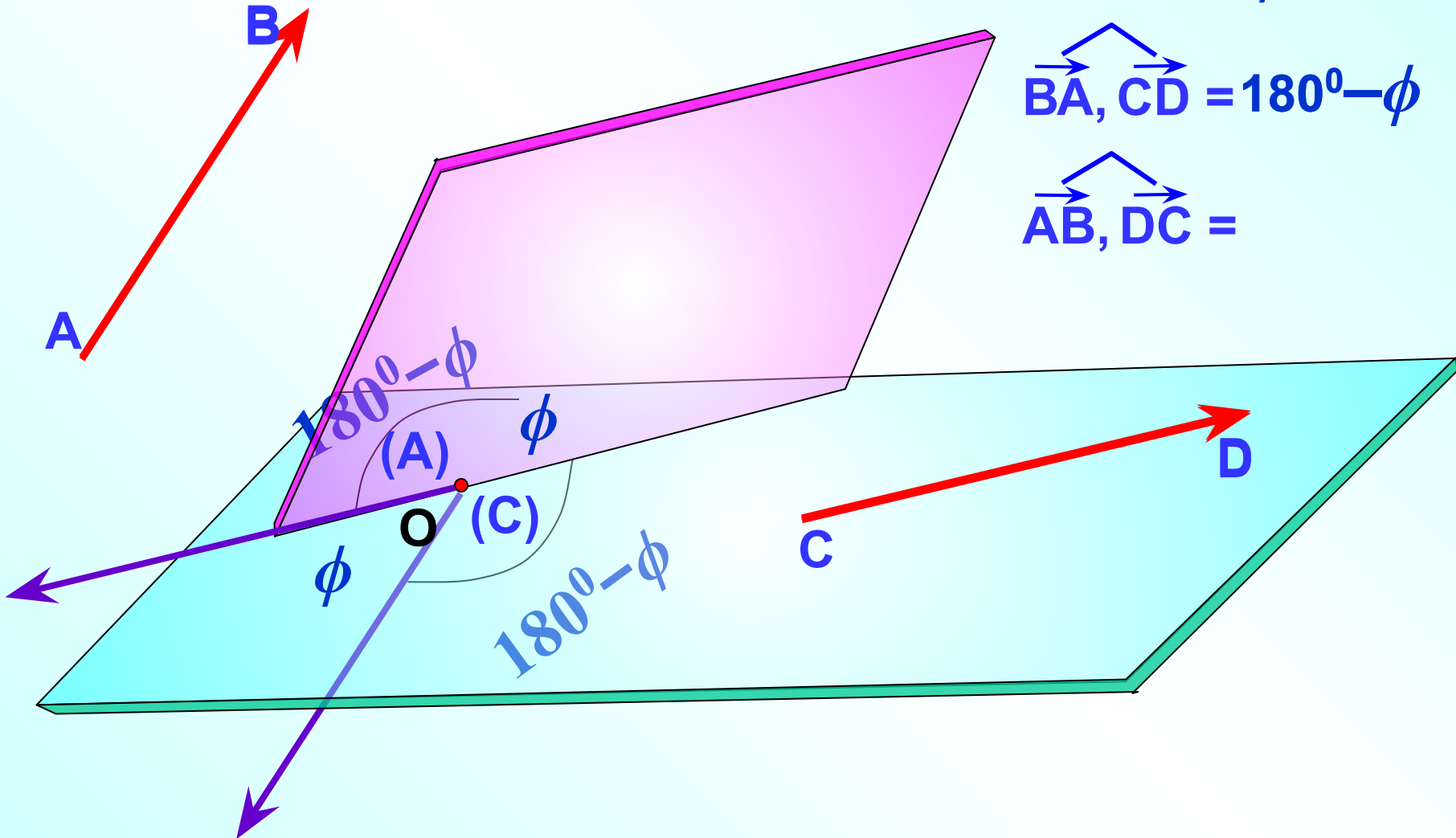
$$\overrightarrow{A A_1}, \overrightarrow{C_1 C} = 180^\circ$$

№ 442 Угол между векторами \vec{AB} и \vec{CD} равен ϕ .
 Найдите углы между векторами

$$\overbrace{\vec{BA}, \vec{DC}} = \phi$$

$$\overbrace{\vec{BA}, \vec{CD}} = 180^\circ - \phi$$

$$\overbrace{\vec{AB}, \vec{DC}} =$$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

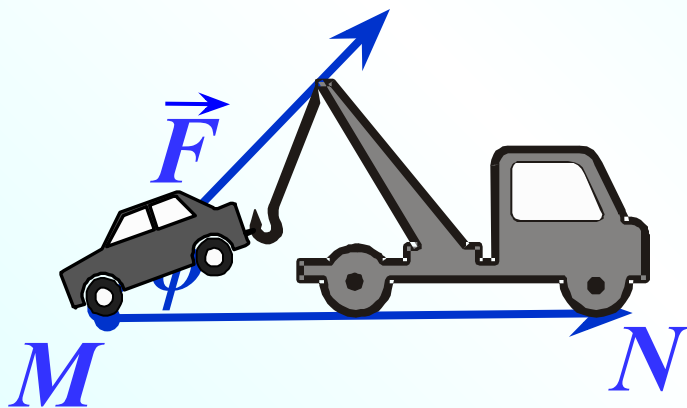
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, английский математик.

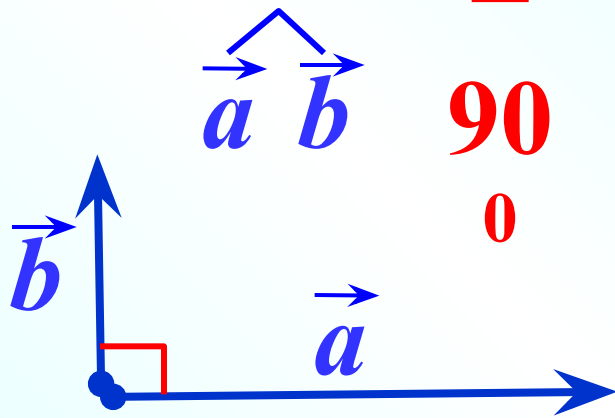
Скалярное произведение в физике



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы \vec{F} при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы \vec{F} и перемещения \vec{MN} на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



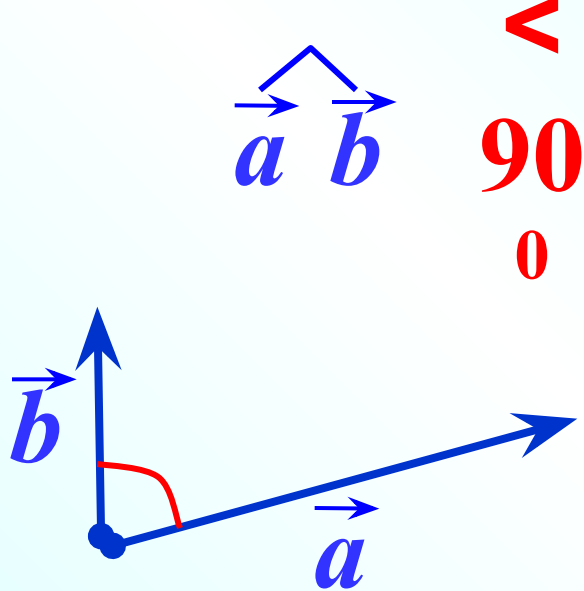
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^{\circ} = 0$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



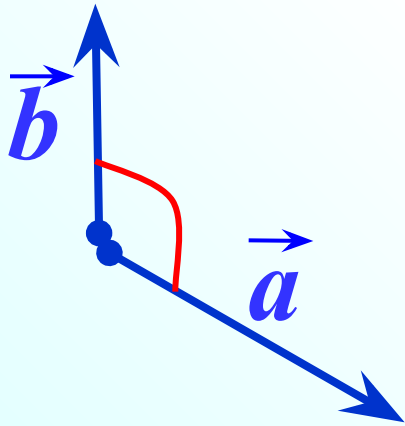
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

>
0
>
0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} \begin{matrix} < \\ 90 \\ 0 \end{matrix}$$

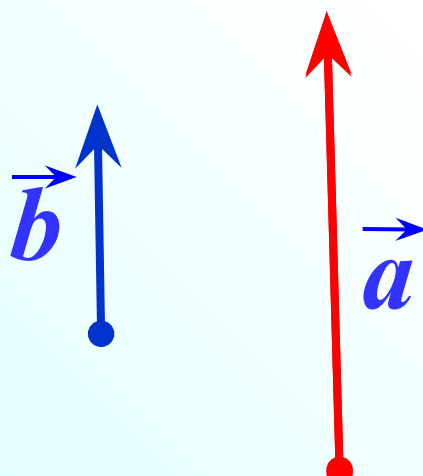
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \alpha > 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

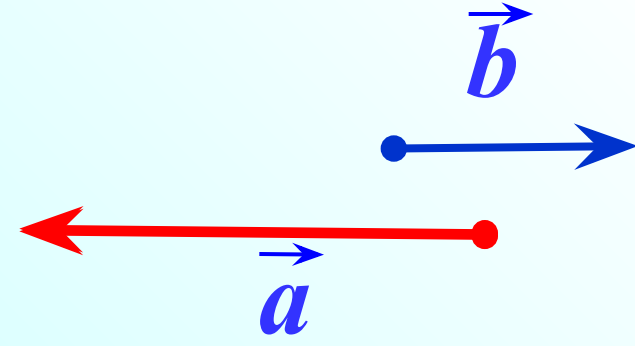
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \alpha > 90^\circ$$



Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора \vec{a} и обозначается \vec{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

№ 443 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$$\vec{AD} \cdot \vec{B_1 C_1}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{C_1 A_1}$$

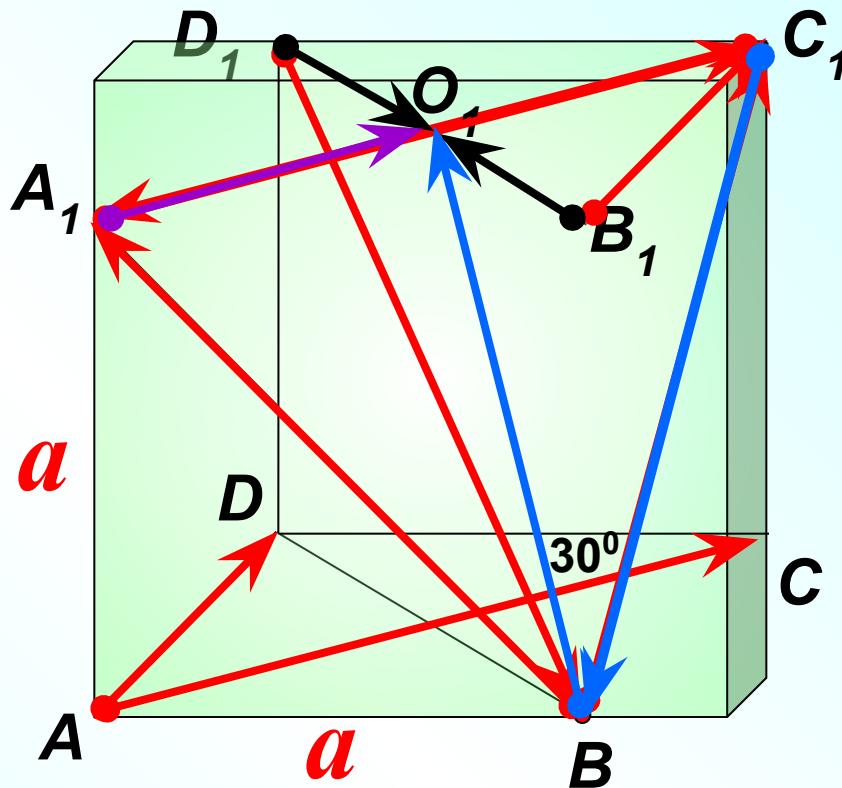
$$\vec{D_1 B} \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1}$$

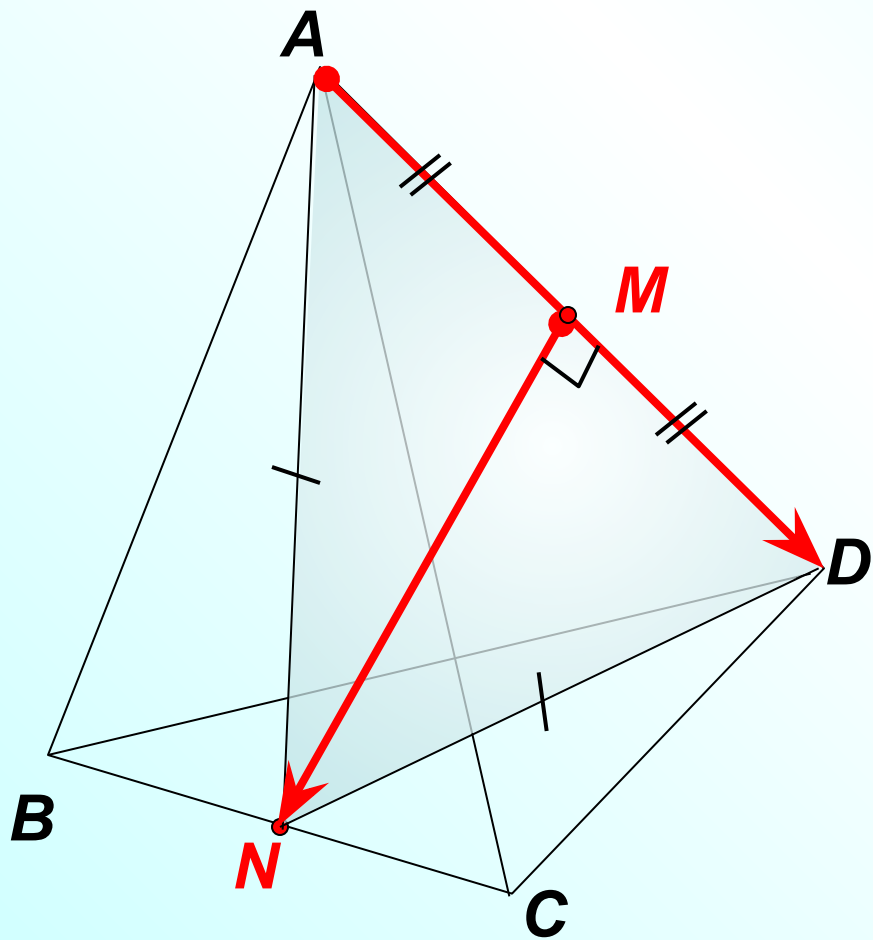
$$\vec{A_1 O_1} \cdot \vec{A_1 C_1}$$

$$\vec{D_1 O_1} \cdot \vec{B_1 O_1}$$

$$\vec{BO_1} \cdot \vec{C_1 B}$$



Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC . Докажите, что $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Маленький тест

На каком расстоянии от плоскости xOy находится точка $A(2; -3; 5)$

1

2

ПОДУМАЙ!

2

5

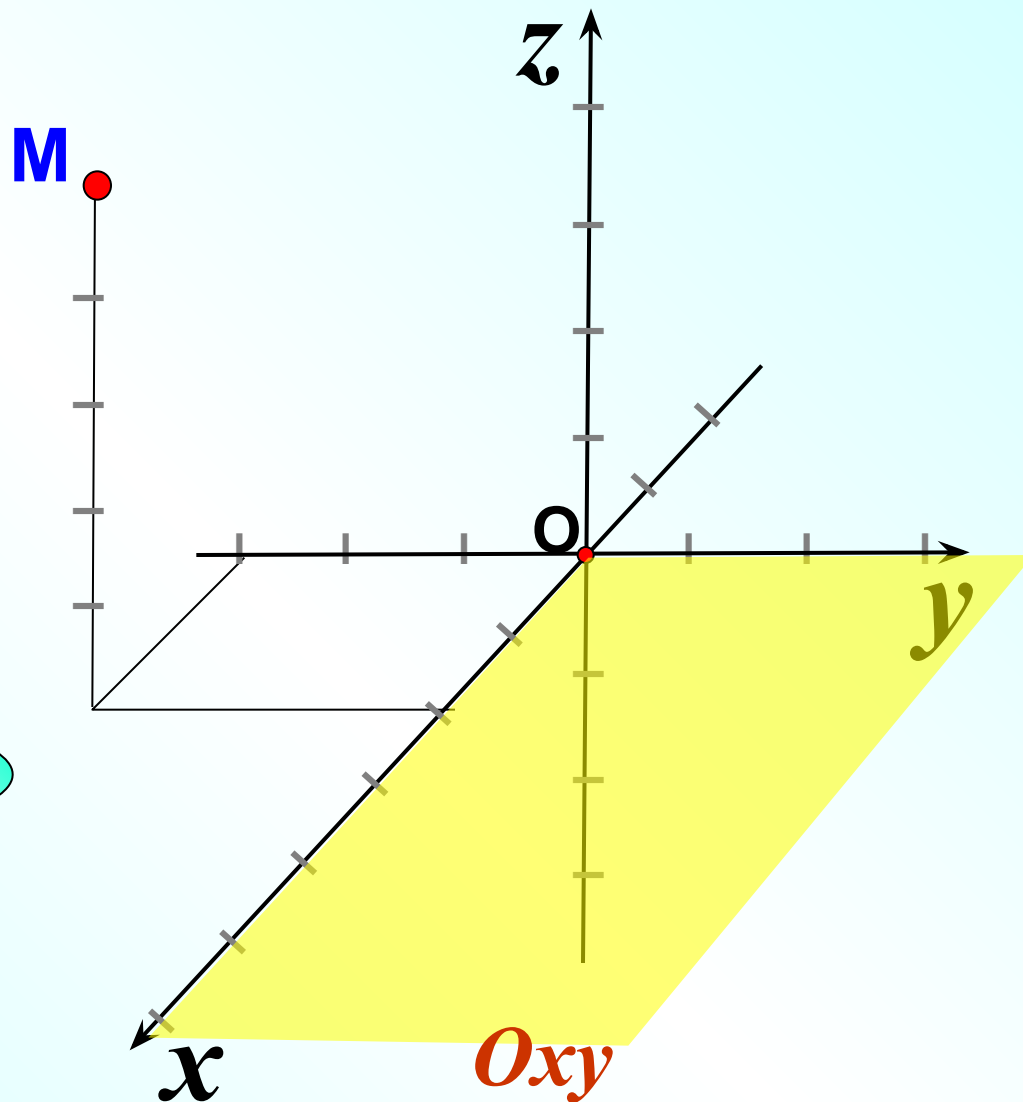
ВЕРНО!

3

3

ПОДУМАЙ!

Проверка



На каком расстоянии от начала координат находится точка $A(-3; 4; 0)$

1

5;

ВЕРНО!

2

4;

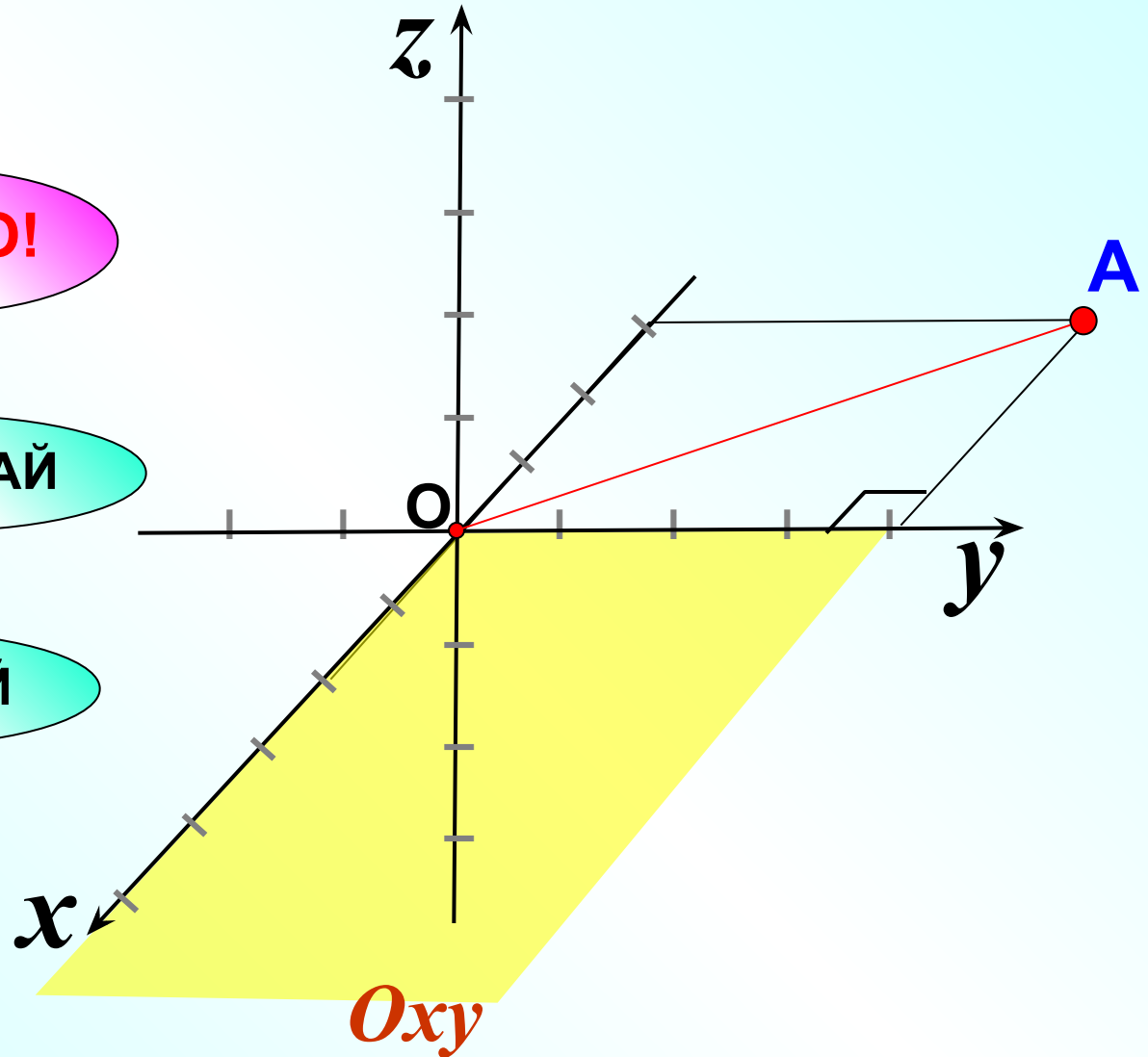
ПОДУМАЙ

3

3.

ПОДУМАЙ

Проверка



Найти координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(-3; 2; -4)$ и $B(1; -4; 2)$

$$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+(-4)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$$

ПОДУМАЙ

1 $C(-2; 1; -1)$

!

2 $C(-1; -1; -1)$

ВЕРНО!

3 $C(-2; -2; -2)$

ПОДУМАЙ

!

Проверка

Дан квадрат ABCD.

Найдите угол между векторами \vec{AC} и \vec{DA} .

1

135° ;

ВЕРНО!

2

45° ;

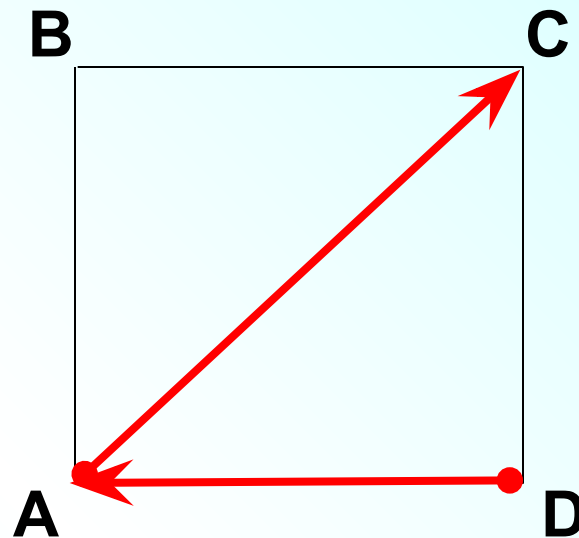
ПОДУМАЙ!

3

90° .

ПОДУМАЙ!

Проверка



Скалярное произведение координатных векторов

\vec{k} и \vec{j} :

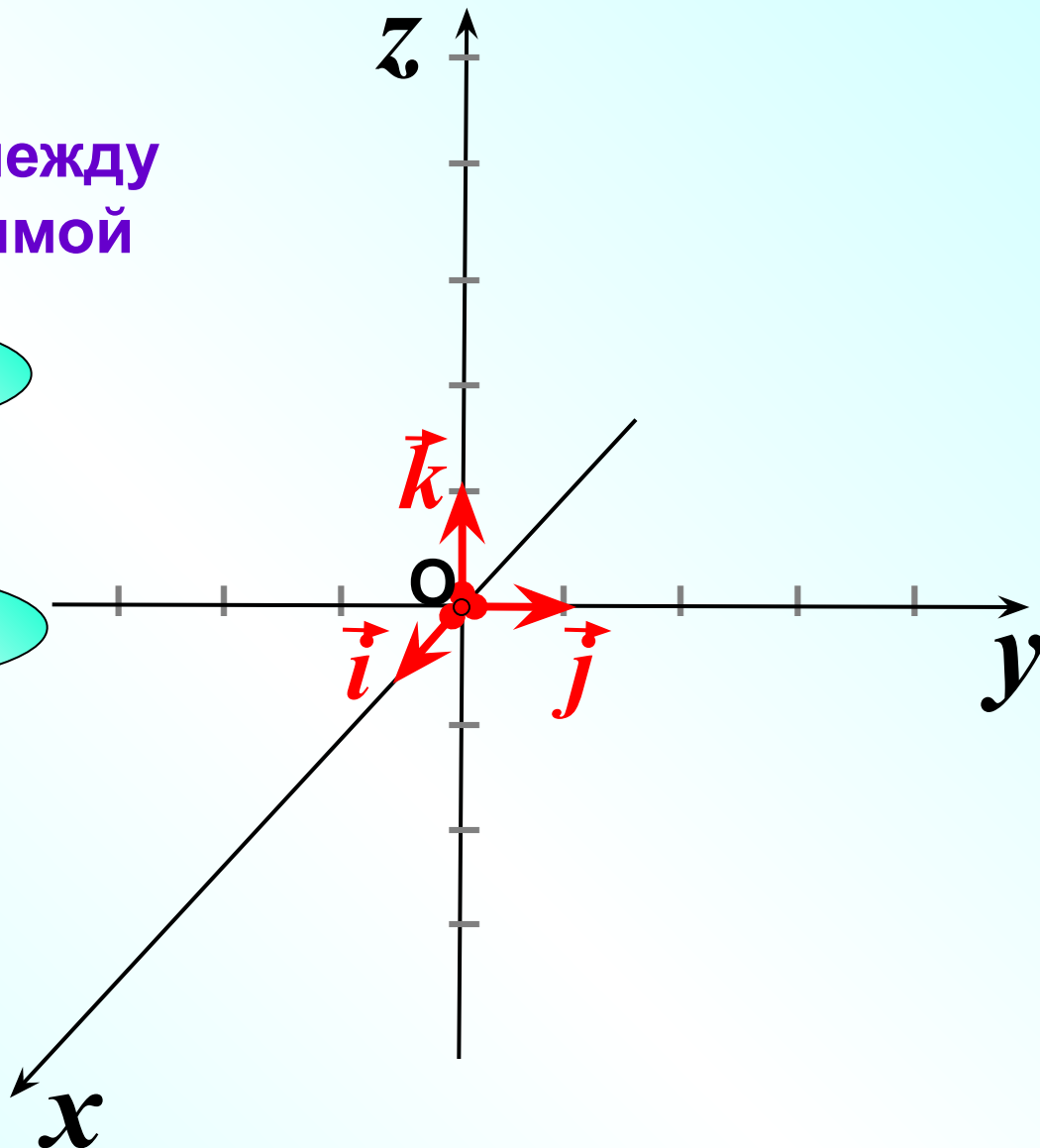
равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1 1 ПОДУМАЙ

2 -1 ПОДУМАЙ

3 0 ВЕРНО!

Проверка



Скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$ равен:

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1

49

ВЕРНО!

2

7

ПОДУМАЙ!

3

1

ПОДУМАЙ!

$$(7\vec{i})^2 = |7\vec{i}|^2 = 7^2 = 49$$

Проверка

Записать координаты вектора $\vec{n} = -8\vec{j} + \vec{i}$

1 $\vec{n} \{-8; 1; 0\}$

ПОДУМАЙ
!

2 $\vec{n} \{1; -8; 0\}$

ВЕРНО!

3 $\vec{n} \{1; 0; -8\}$

ПОДУМАЙ
!

Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

1

50°

ПОДУМАЙ

2

60°

ПОДУМАЙ

3

120°

ВЕРНО!

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, ребро которого равно 1.
 Найдите скалярное произведение векторов \vec{AD}_1 и \vec{BC} .

$$\vec{BC}_1 \cdot \vec{BC} = |\vec{BC}_1| \cdot |\vec{BC}| \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1

4;

ПОДУМАЙ!

2

2;

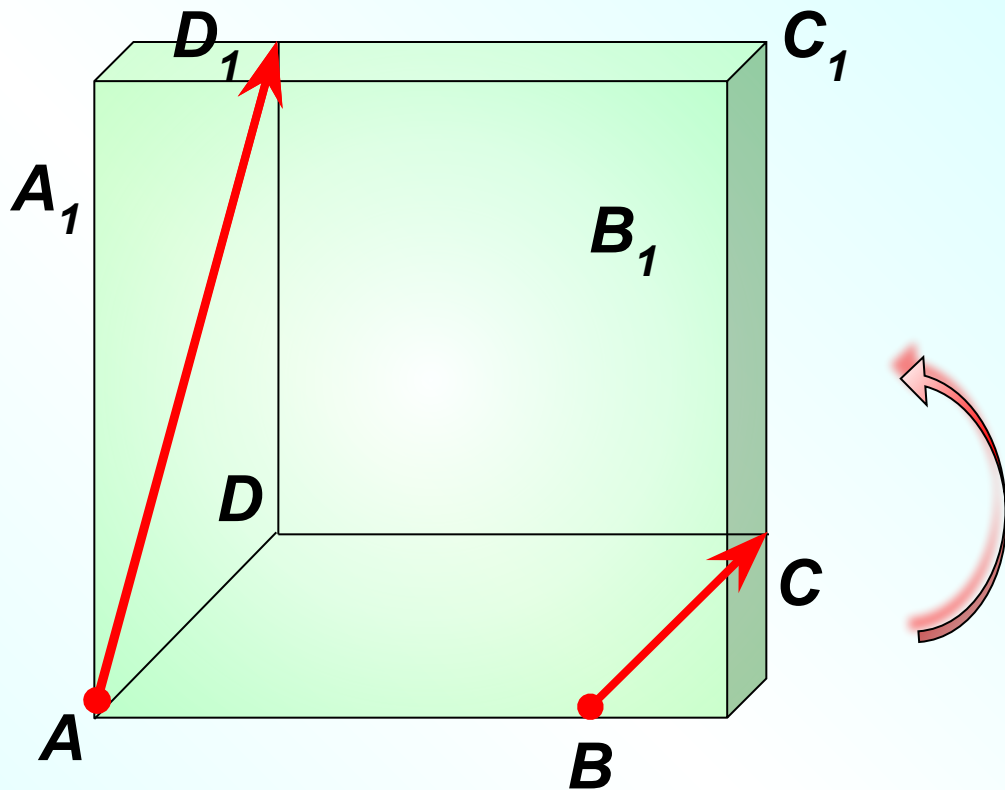
ПОДУМАЙ!

3

1.

ВЕРНО!

Проверка (3)



Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

выражается формулой

Пример

Найдите скалярное произведение векторов

$$\vec{b} \{-2; 1; -7\} \quad \vec{d} \{5; 4; -3\}$$

$$\cdot + \cdot + () \cdot () = 15$$

№ 444 Даны векторы
 $\vec{a} \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} \{-1; 1; 1\}$, $\vec{c} \{5; 6; 2\}$

Вычислить

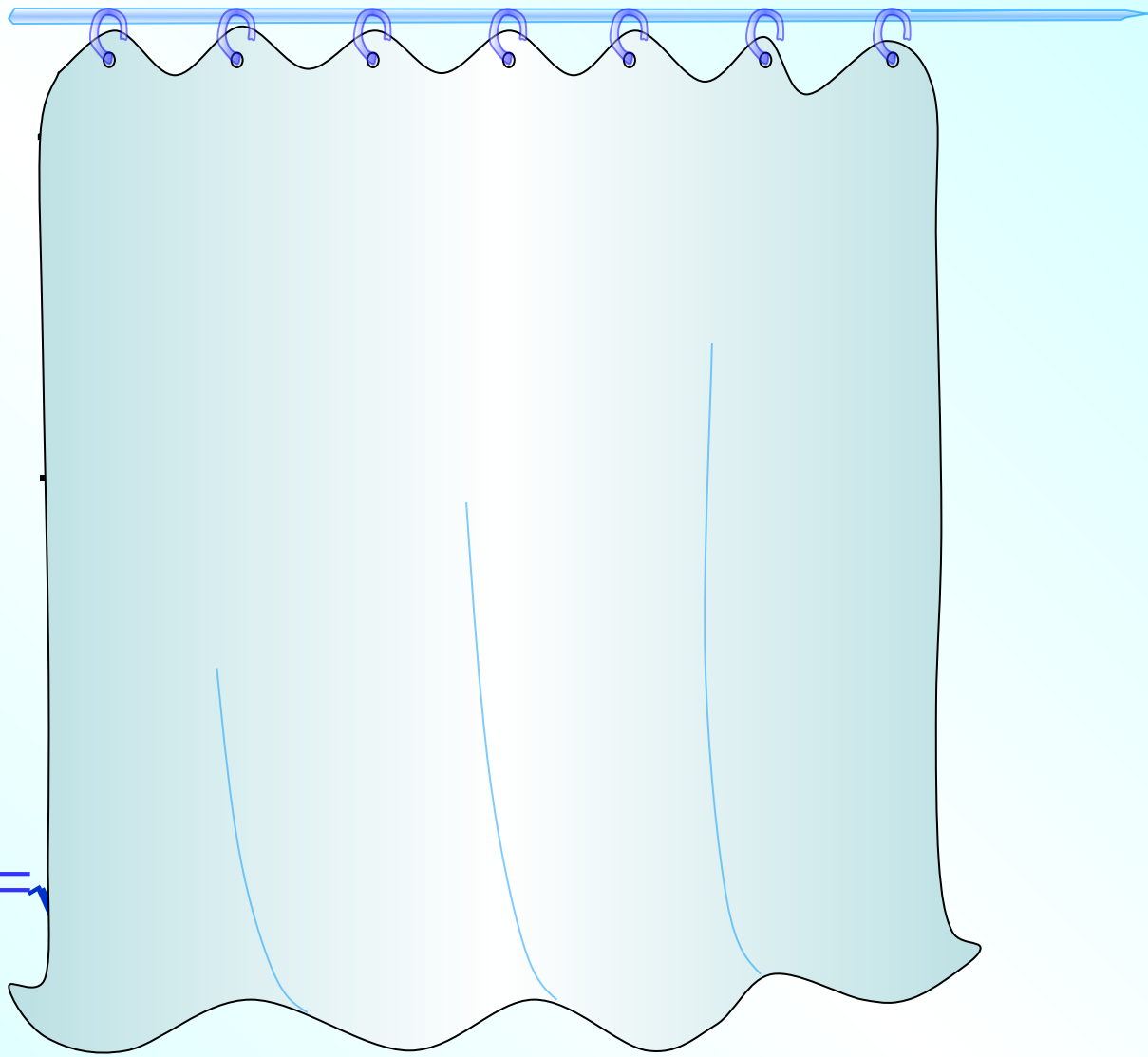
$$\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} =$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} =$$

$$\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} =$$



Скалярное произведение векторов

Через длины векторов
и угол между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

в координатах

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} < 90^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} > 90^\circ \\ \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \end{array}$$

$$\vec{a} \{3; -4; 2\}, \vec{b} \{-2; 1; 3\}, \vec{c} \{-2; -1,5; 0\}$$

Найдите

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -4 \quad \text{тупой}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1,5) + 3 \cdot 0 = 2,5 \quad \text{острый}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1,5) + 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{прямой}$$

Перпендикулярны ли векторы \vec{a} и \vec{b} , \vec{b} и \vec{c} , \vec{c} и \vec{a}

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между

векторами \vec{a} и \vec{b} , \vec{b} и \vec{c} , \vec{c} и \vec{a}

Косинус угла между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b}

выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Доказательство:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$



$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \underline{\hspace{15em}}$$

•

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и любого числа k справедливы равенства:

1 $\vec{a}^2 \geq 0$ причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *Переместительный закон*

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
Распределительный закон

4 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *Сочетательный закон*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Распределительный закон

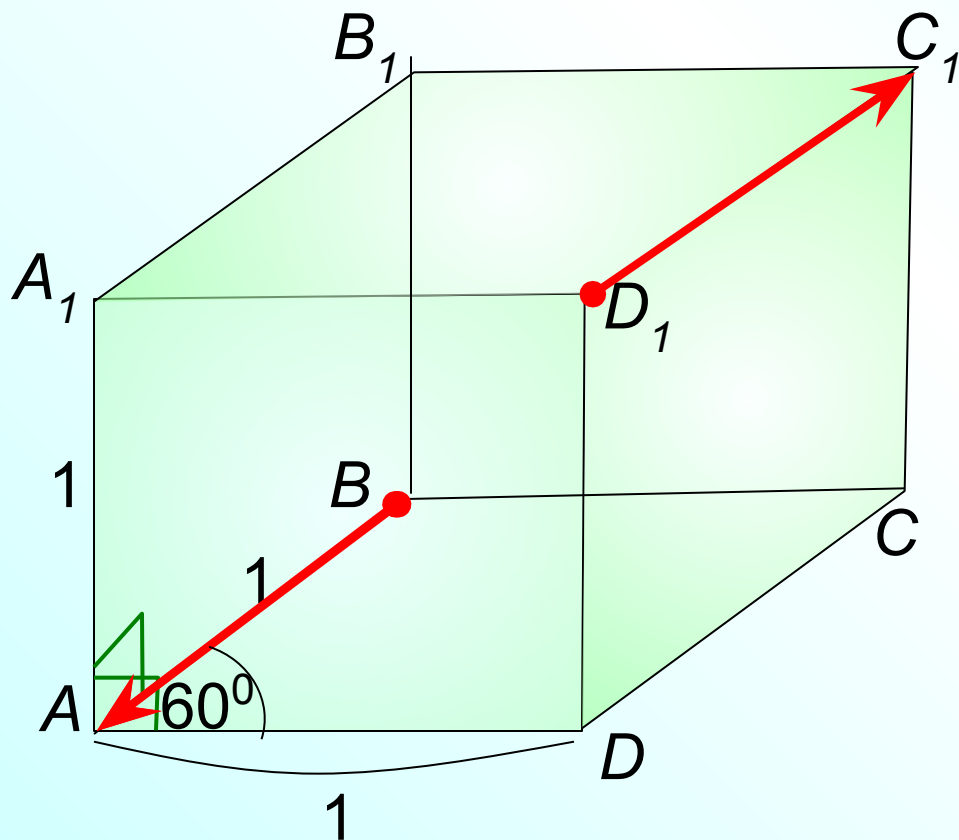
имеет место для любого числа слагаемых.

Например,

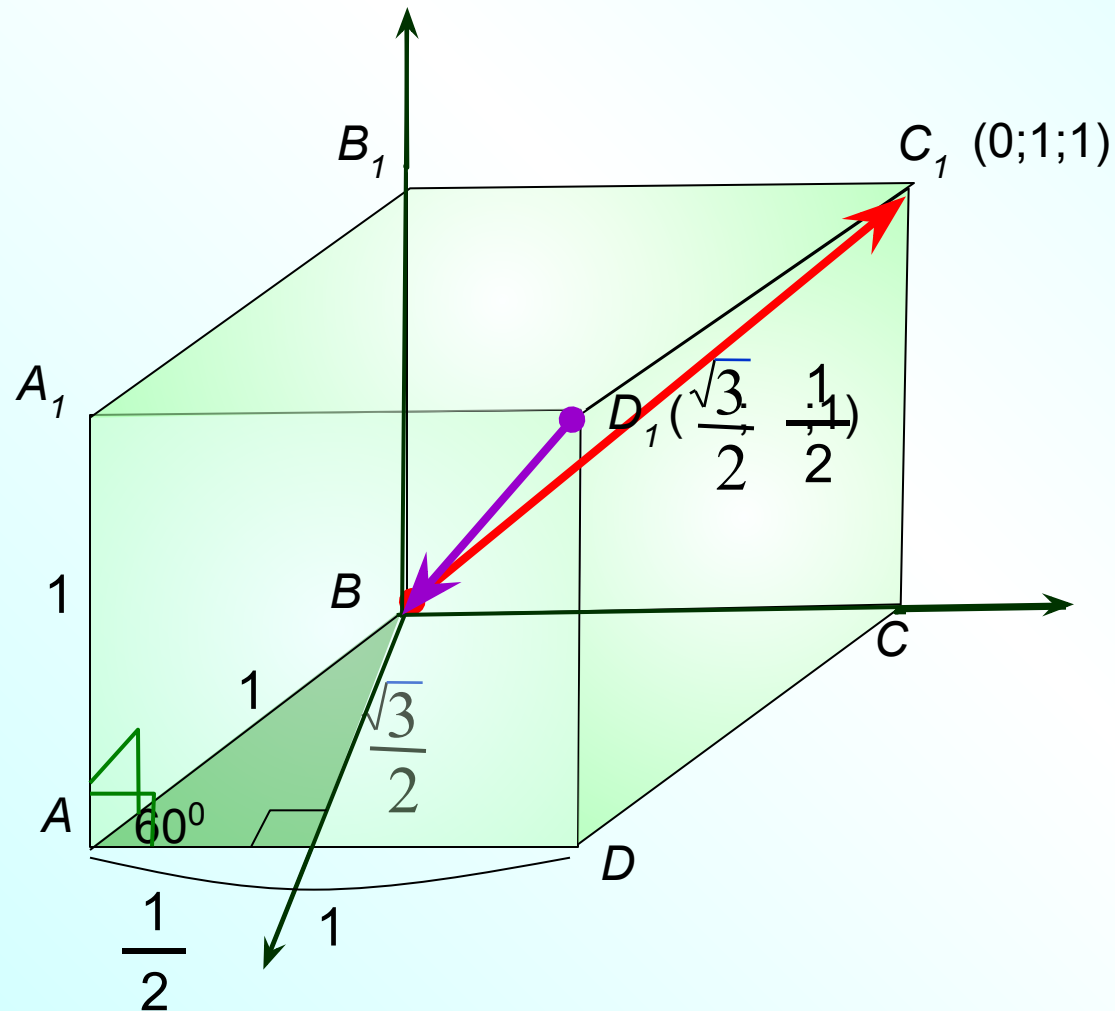
$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$$

№ 462. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед,
 $AA_1 = AB = AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB = 90^\circ$

a) $\vec{BA} \cdot \vec{D_1 C_1} = 1 \cdot 1 \cos 180^\circ$



№ 462. б) $\vec{BC}_1; \vec{D_1B}$

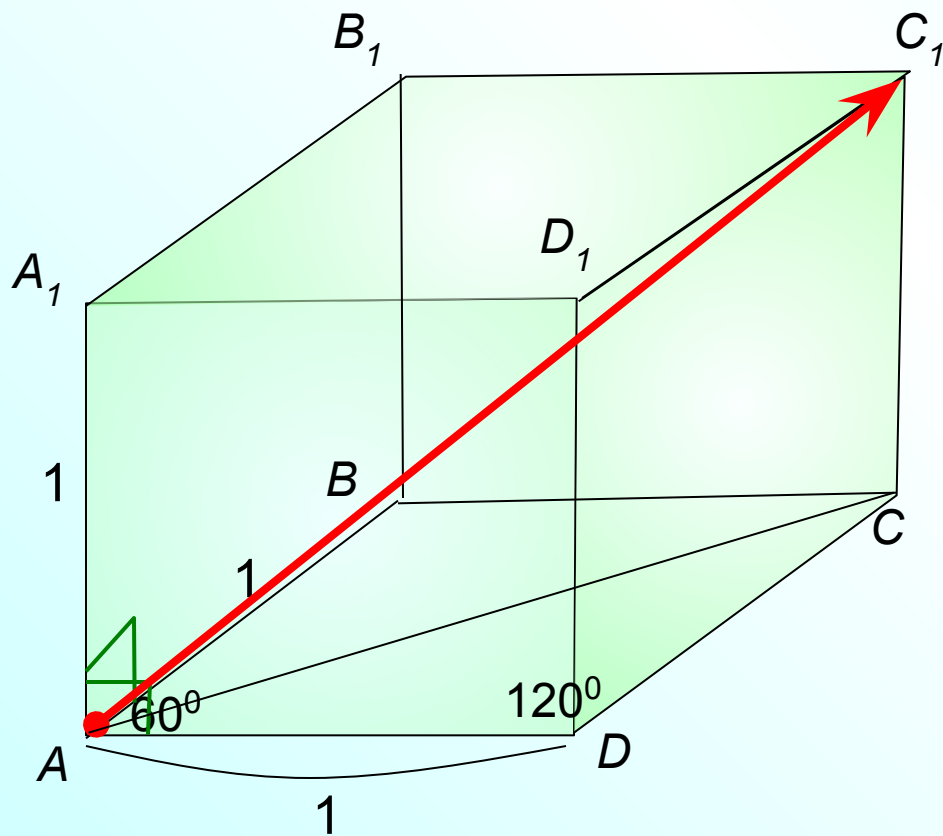


$$\vec{BC_1} \{0; 1; 1\}$$

$$\vec{D_1B} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

№ 462. в) $\vec{AC}_1 \cdot \vec{AC}_1 = 2 \cdot 2 \cos 0^\circ$

1 способ из $\triangle ACD$: $AC = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 120^\circ}$
 $AC = \sqrt{3}$



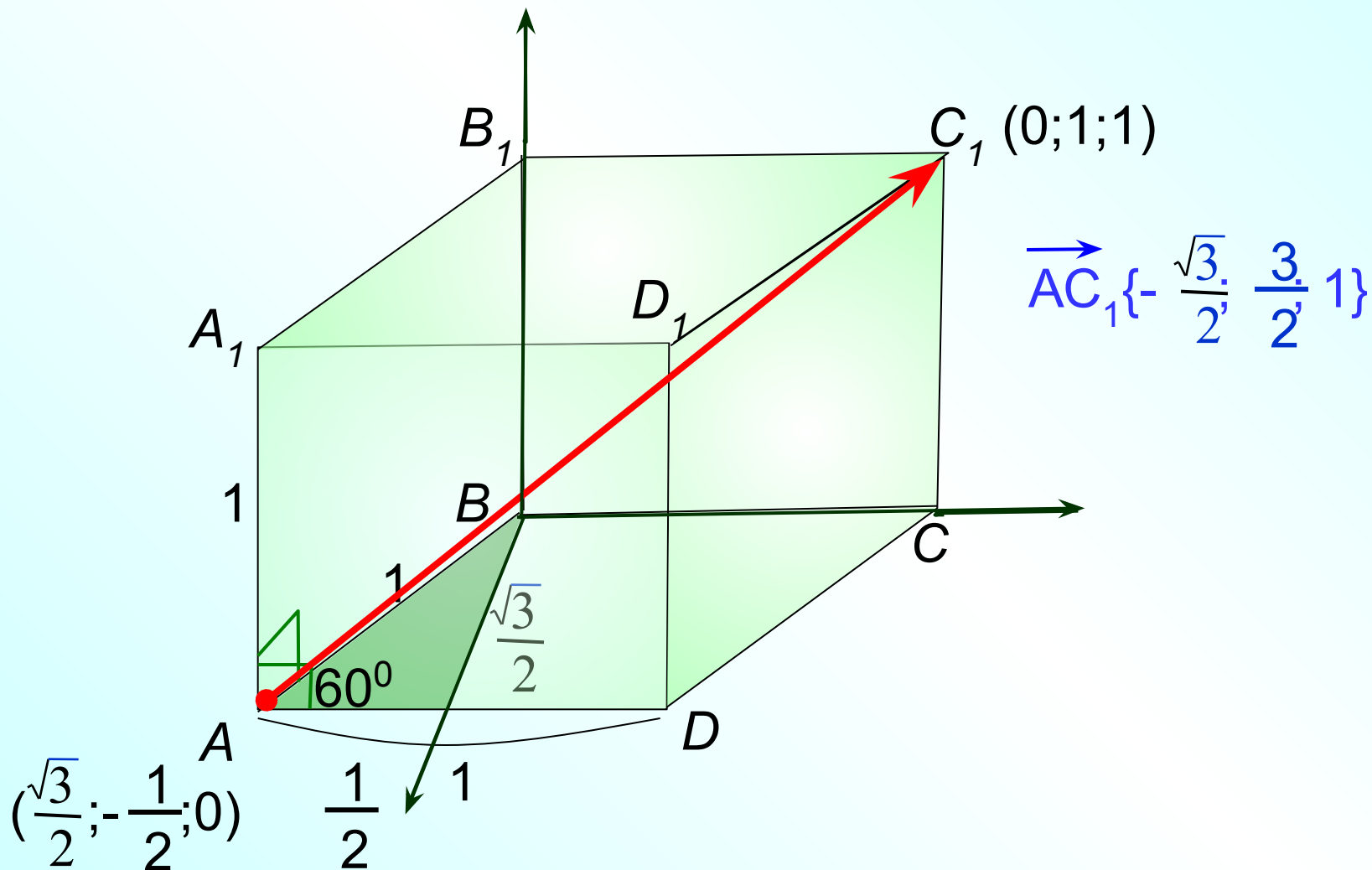
из $\triangle ACC_1$:

$$AC_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$AC_1 = 2$$

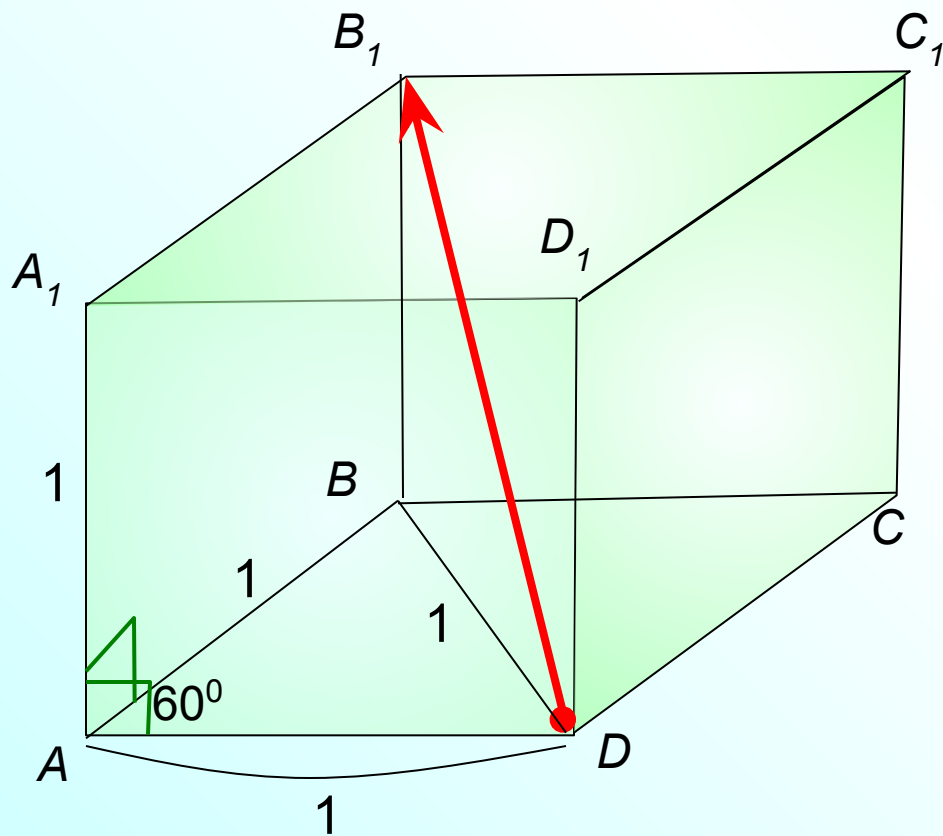
№ 462. в) $\vec{AC}_1 \cdot \vec{AC}_1$

2 способ



№ 462. г) $|\vec{DB}_1|$

вз $\triangle ABD$: $BD = 1$

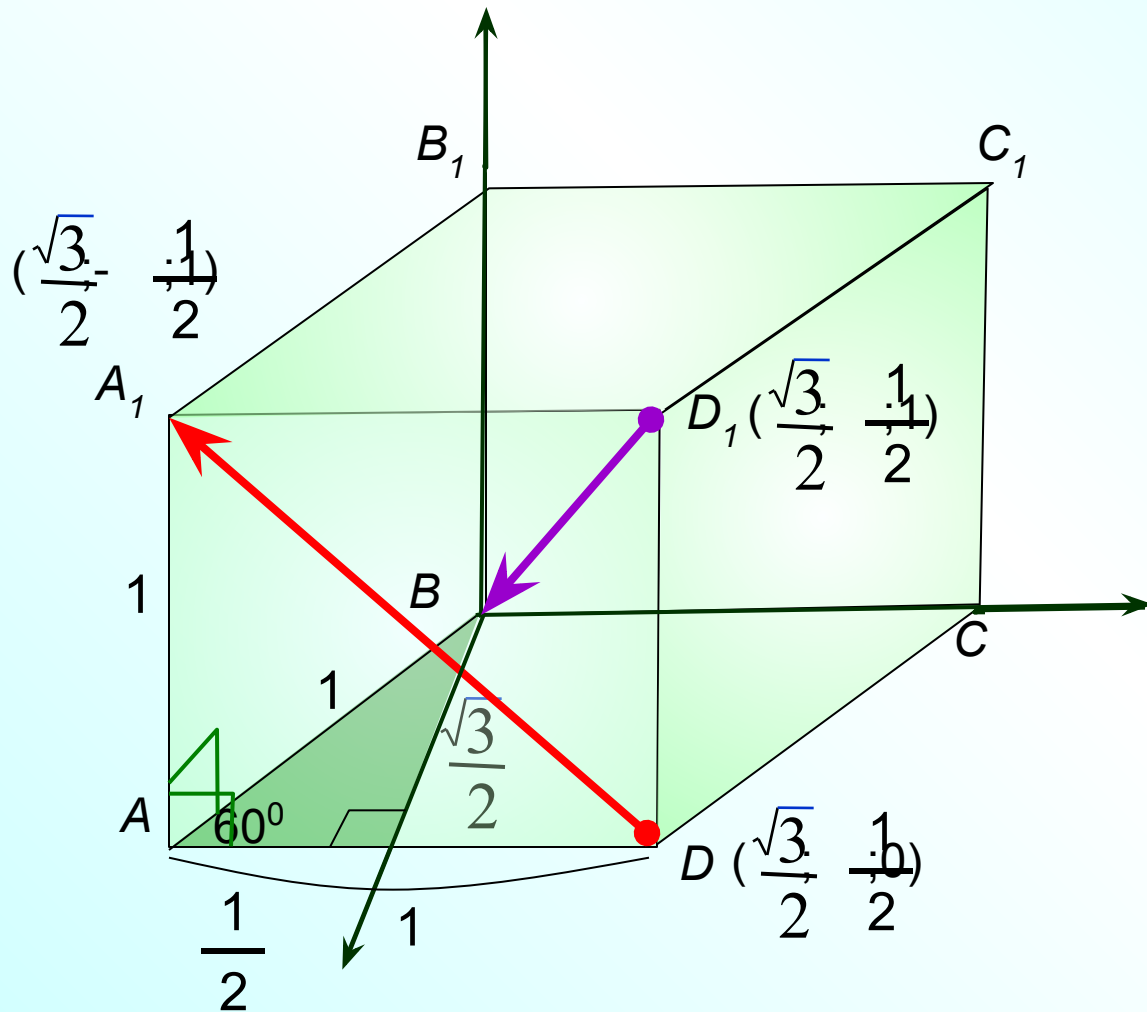


вз $\triangle DBB_1$:

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$DB_1 = \sqrt{2}$$

№ 462. e) $\cos(\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{D_1B})$

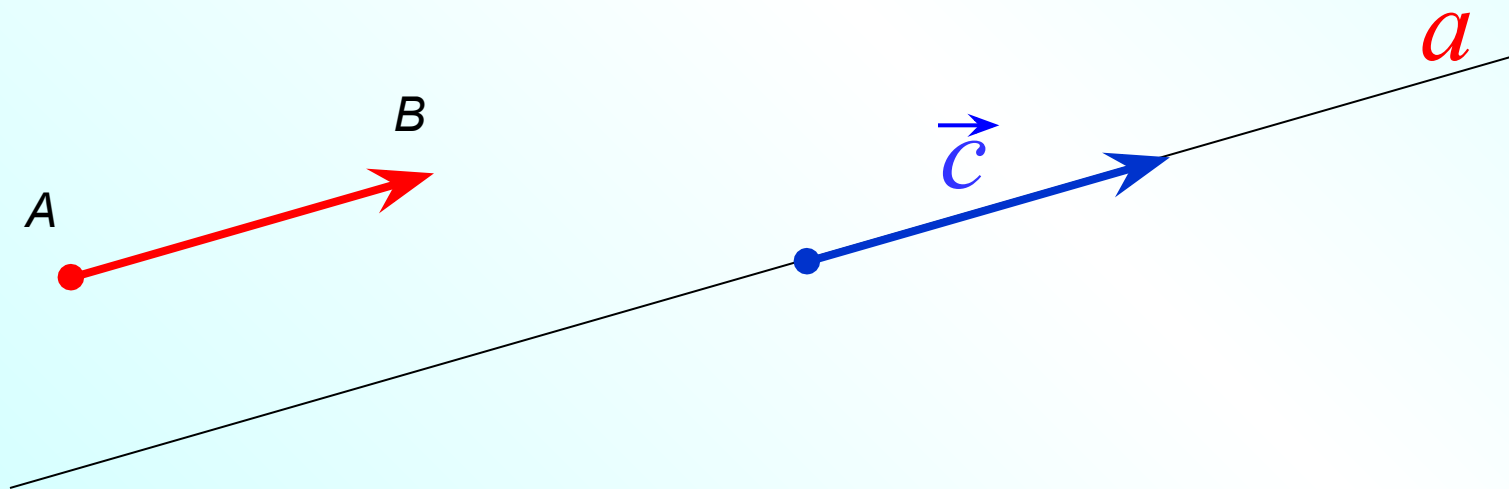


$$\overrightarrow{D_1B} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; \frac{1}{2} \right\}$$

$$\overrightarrow{DA_1} \{ 0; -1; 1 \}$$

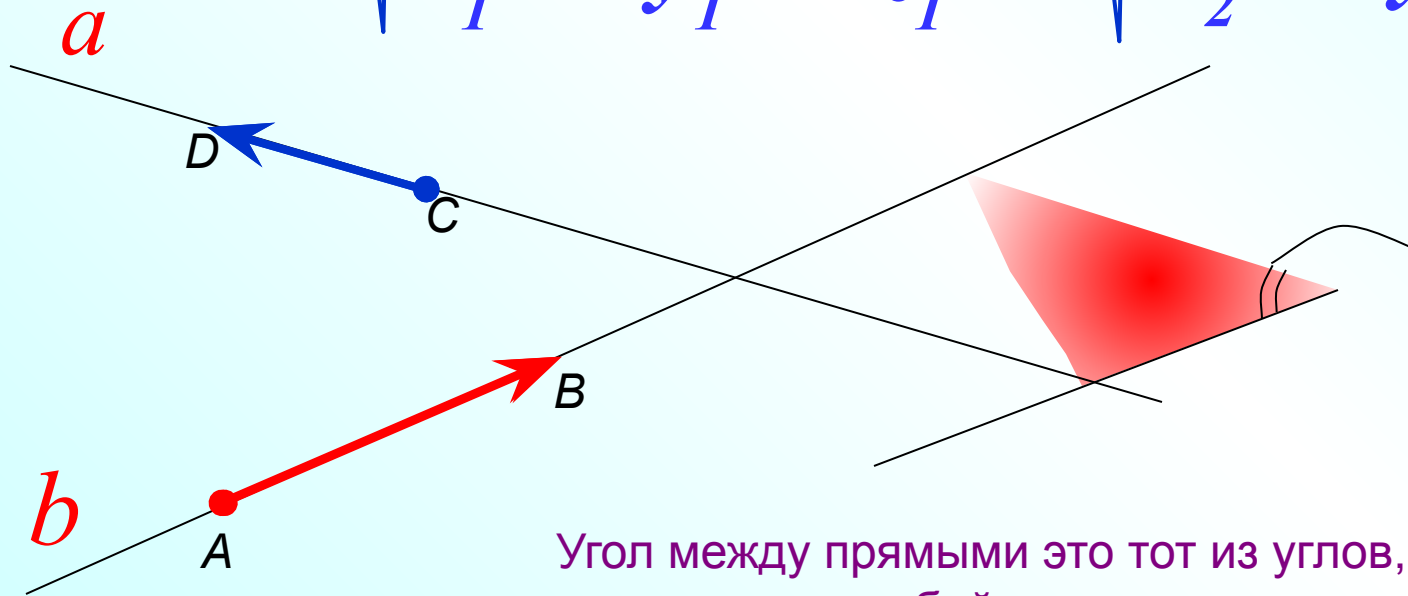
Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямыми/

Ненулевой вектор называется **направляющим вектором прямой a** , если он лежит либо на прямой a , либо на прямой, параллельной a .



1. Направляющий вектор для прямой a .
2. Направляющий вектор для прямой b .
3. Вычислить $\cos \phi$
4. ϕ

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Угол между прямыми это тот из углов, который не превосходит любой из трех остальных углов!

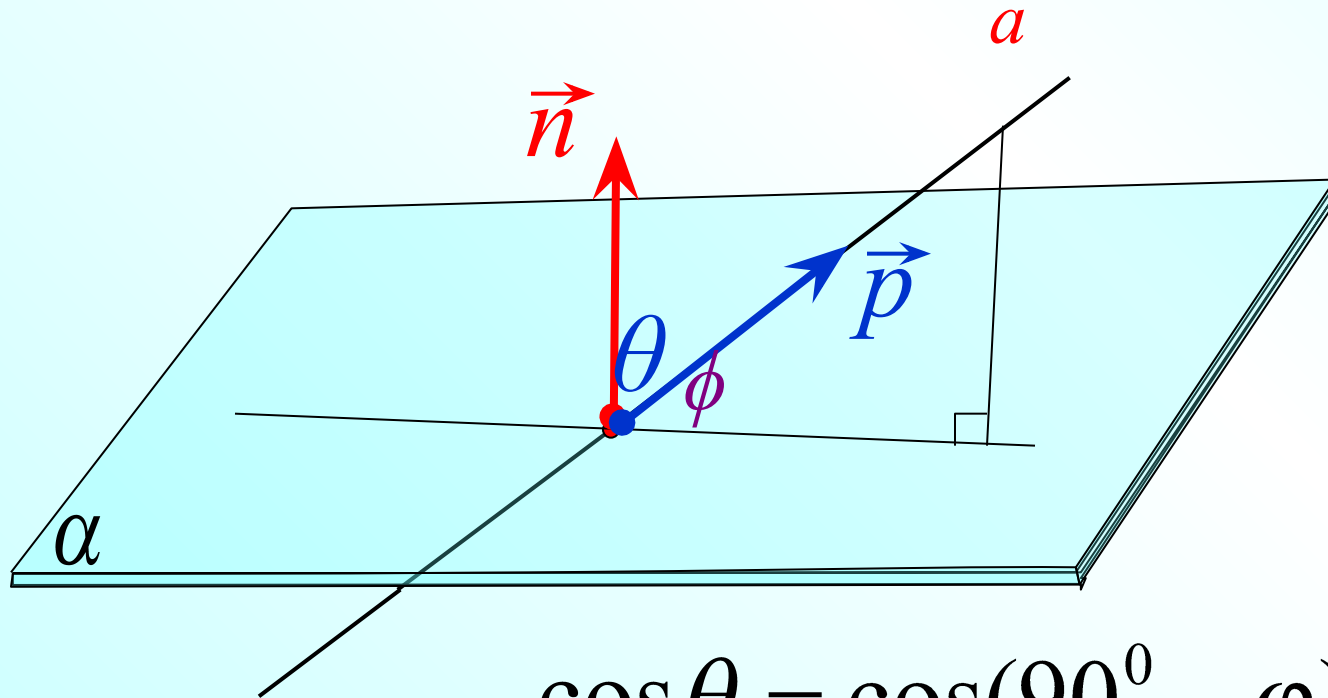
Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямой и плоскостью.

Направляющий вектор для прямой a .

Вектор, перпендикулярный к плоскости α .

ϕ - искомый угол между прямой и плоскостью

θ - угол между векторами \vec{p} и \vec{n}

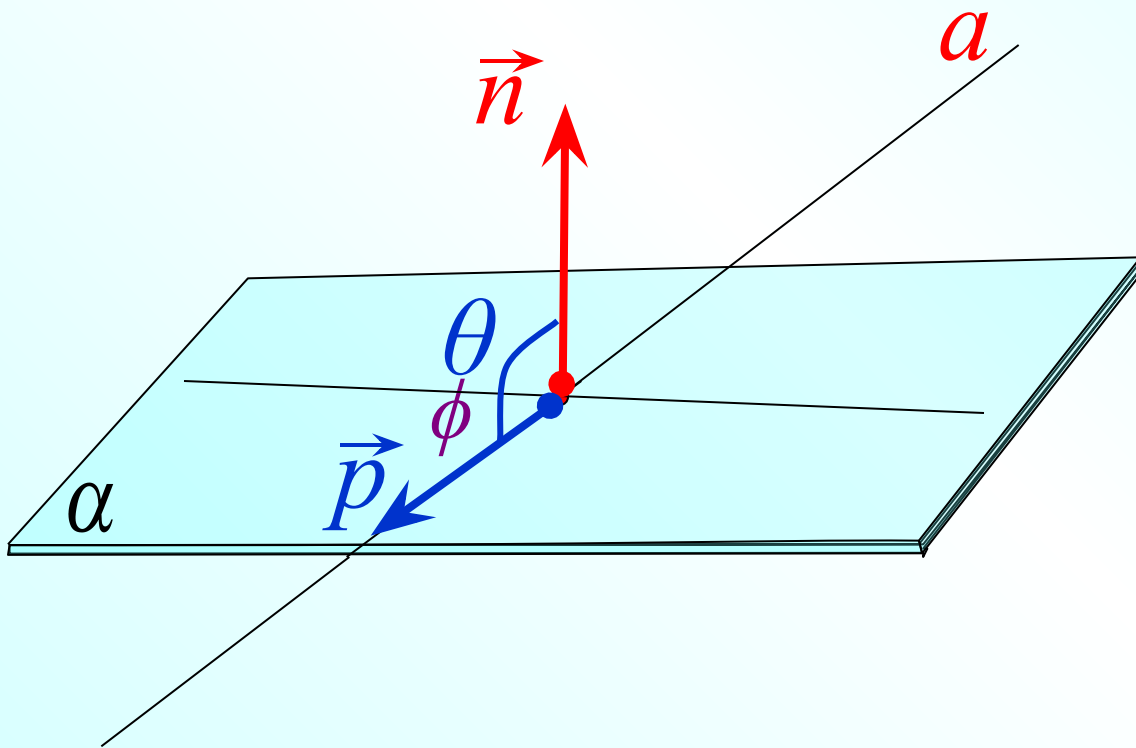


$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

$$\cos \theta = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$$

тупой

$$\sin \varphi = -\cos \varphi$$



$$\sin \varphi = |\cos \varphi|$$

$$\sin \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямой и плоскостью.

1. Направляющий вектор для прямой a .
2. Вектор, перпендикулярный к плоскости α .
3. Вычислить $\sin \phi$
4. ϕ

$$\sin \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$