Потоки событий Марковские случайные процессы

Потоки событий

Это последовательность событий происходящих одно за другим в определенные интервалы времени.

T - средняя величина **времени между соседними событиями**

Если T=const, то события в потоке распределены равномерно.

λ - **интенсивность** потока, т. е. среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Потоки событий

- **Стационарный**

  Количество событий, попадающих на любой произвольный интервал времени т не зависит от положения т на числовой оси, а зависит только от его ширины
- **Без последействия**

  Для любых двух непересекающихся временных интервалов количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий произошло на другом интервале
- **Регулярный**

  Противоположный потоку без последействия (с последействием)

Потоки событий

- **Ординарный**

В любой момент времени происходит одно и только одно событие, т. е. вероятность появления на бесконечно малом временном интервале двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события

- **Пуассоновский**

Нестационарный, ординарный поток без последействия

- **Простейший**

Стационарный , ординарный поток без последействия, для которого число событий, появляющихся за промежуток времени т, распределено по закону Пуассона, а интервалы времени между двумя последовательными событиями характеризуются показательным распределением. Это стационарный пуассоновский поток.

Экономическое применение

Современные финансово – банковские операции предполагают погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций. Такого рода последовательность, или ряд платежей, можно назвать **потоком платежей**.

Поток платежей все члены которого – положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют **финансовой рентой**. Рентой является последовательность получения процентов по облигациям, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий.

Характеристики потока платежей: интервал между двумя соседними платежами, вероятности выплаты платежа, широко применяются в различных финансовых расчетах. Без них невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов.

Задача

Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда банка, занимающегося выдачей долгосрочных ссуд, важно обладать информацией о процессе поступления в банк выплат по займам.

Наблюдение за банком в предшествующем периоде показало, что число поступающих в банк выплат за любой промежуток времени т не зависит от момента времени с которого начался отсчет промежутка времени , а зависит только от его продолжительности.

Ожидаемое число выплат в банк за неделю равно 2. Исследуем, какова вероятность поступления в банк за месяц 7 выплат и найдем вероятность того, что интервал времени между двумя соседними выплатами меньше 2 дней.

Решение

По условию задачи **поток** выплат можно считать **простейшим** с интенсивностью **λ=2** (за неделю).

Следовательно, число выплат, поступивших за промежуток времени **τ=4** недели (1 месяц), распределено по **закону Пуассона**.

Интервалы времени между двумя последовательными выплатами в простейшем потоке имеют **показательный закон** распределения.

Решение

Пусть X(т) - дискретная случайная величина , представляющая собой число выплат, поступивших за промежуток времени т . Она распределена по **закону Пуассона.** M(X)=D(X)=λ·т

Тогда $p_m(\tau)$ - вероятность того, что за промежуток времени т в потоке наступят точно m событий равна

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda\tau}$$

Следовательно, при интенсивности потока выплат **λ=2** вероятность поступления в банк за месяц (**т=4**) 7 выплат (**m=7**) равна

$$p_7(4) = \frac{(2\cdot 4)^7}{7!} \cdot e^{-2\cdot 4} \approx 0{,}1396 \approx 14\%$$

Решение

Пусть непрерывная случайная величина T - промежуток времени между двумя любыми соседними выплатами (событиями простейшего потока). Она имеет **показательный закон** распределения. $M(T)=1/\lambda$, $D(T)=1/\lambda^2$

Тогда вероятность $P(T<t)$ события $T<t$, состоящего в том, что промежуток времени T между двумя любыми соседними событиями будет меньше t, равна $P(T<t)=F(t)=1-e^{-\lambda t}$.

Следовательно, вероятность того, что интервал времени между двумя соседними выплатами меньше 2 дней ($t=2/7$ в неделях) равна

$$P(T<2/7)=F(2/7)=1-e^{-2\cdot 2/7}=1-e^{-4/7}\approx 0.435\approx 44\%$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Обычно студент приходит на остановку ровно в 8 часов утра и, сев в первый пришедший автобус, идущий в направлении университета, вовремя прибывает на занятия, которые начинаются ровно в 9 утра. Интервалы движения автобуса составляют в среднем 10 минут, а время в пути автобуса равно 30 минутам. Пусть поток автобусов является простейшим. Найдите вероятность того, что студент все же опоздает на занятия.

Задачи для самостоятельного решения

2. Поток заявок, поступающих в некоторую систему массового обслуживания, достаточно точно моделируется простейшим. При изучении опытных данных рассматривалось 200 выбранных наудачу промежутков времени длиной в 2 мин. Оказалось, что число тех из них, в которых не было зарегистрировано ни одной заявки, равно 27. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа заявок за 1 час.

Марковские случайные процессы

Основные понятия

- Под **системой S** будем понимать всякое целостное множество взаимосвязанных элементов, которое нельзя расчленить на независимые подмножества.
- Если система S с течением времени t изменяет свои **состояния** S(t) случайным образом, то говорят, что в системе S протекает **случайный процесс**.
- В любой момент времени система пребывает только в одном из состояний, то есть для любого момента времени t найдется единственное состояние S_i такое, что $S(t) = S_i$.
- Множество состояний может быть **дискретно** (техническое состояние объекта : исправен - неисправен, загружен - находится в простое; численность персонала; количество объектов, ожидающих обслуживания в очереди) или **непрерывно** (доход, объем производства).

Основные понятия

- В случае дискретного множества состояний система меняет свои состояния **скачком** (мгновенно). В случае же непрерывного множества состояний переход системы происходит **непрерывно** (плавно).
- В зависимости от времени пребывания системы в каждом состоянии различают процессы с **дискретным временем** (искусственная числовая сетка времени) и с **непрерывным временем** (физическое время, переход системы из одного состояния в другое может осуществляться в любой момент времени).
- Случайный процесс, протекающий в системе S, называется **Марковским**, если он обладает свойством **отсутствия последствия**, состоящим в том, что для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния $S(t)$ системы S в будущем (при $t>t_0$) зависит только от ее состояния $S(t_0)$ в настоящем (при $t=t_0$) и не зависит от того, как и сколько времени развивался этот процесс в прошлом (при $t>t_0$).

А. А. Марков (1856 - 1922)

Андрей Андреевич Марков - старший - выдающийся русский математик, разработавший основы теории случайных процессов без последействия, которые в математике называют Марковскими процессами в его честь .

А. А. Марков - старший известен также как давший вероятностное обоснование метода наименьших квадратов (МНК), приведший одно из доказательств предельной теоремы теории вероятностей и многое другое.

Виды Марковских процессов

- Дискретные состояния и дискретное время (**цепь Маркова**)
- Непрерывные состояния и дискретное время (**Марковские последовательности**)
- Дискретные состояния и непрерывное время (**непрерывная Марковская цепь**)
- Непрерывные состояния и непрерывное время.

На практике большинство задач по Марковским процессам описываются с помощью Марковских цепей с дискретным или непрерывным временем.

Марковские цепи

Цепью Маркова называют такую последовательность случайных событий, в которой вероятность каждого события зависит только от состояния, в котором процесс находится в текущий момент и не зависит от более ранних состояний.

Задание Марковской цепи

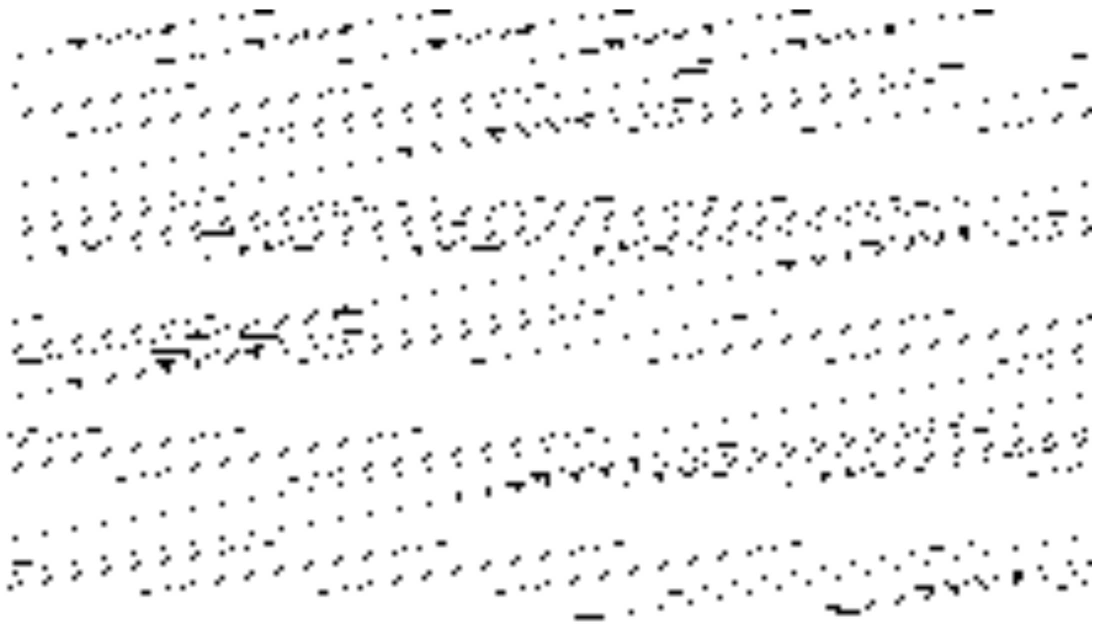
- **множеством состояний** $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, событием является переход из одного состояния в другое в результате случайного испытания
- **вектором начальных вероятностей** (начальным распределением) $p^{(0)} = \{p^{(0)}(1),\ldots, p^{(0)}(n)\}$, определяющим вероятности $p^{(0)}(i)$ того, что в начальный момент времени $t = 0$ процесс находился в состоянии s_i
- **матрицей переходных вероятностей** $P = \{p_{ij}\}$, характеризующей вероятность перехода процесса с текущим состоянием s_i в следующее состояние s_j, при этом сумма вероятностей переходов из одного состояния равна 1

$$\forall i = 1..n \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

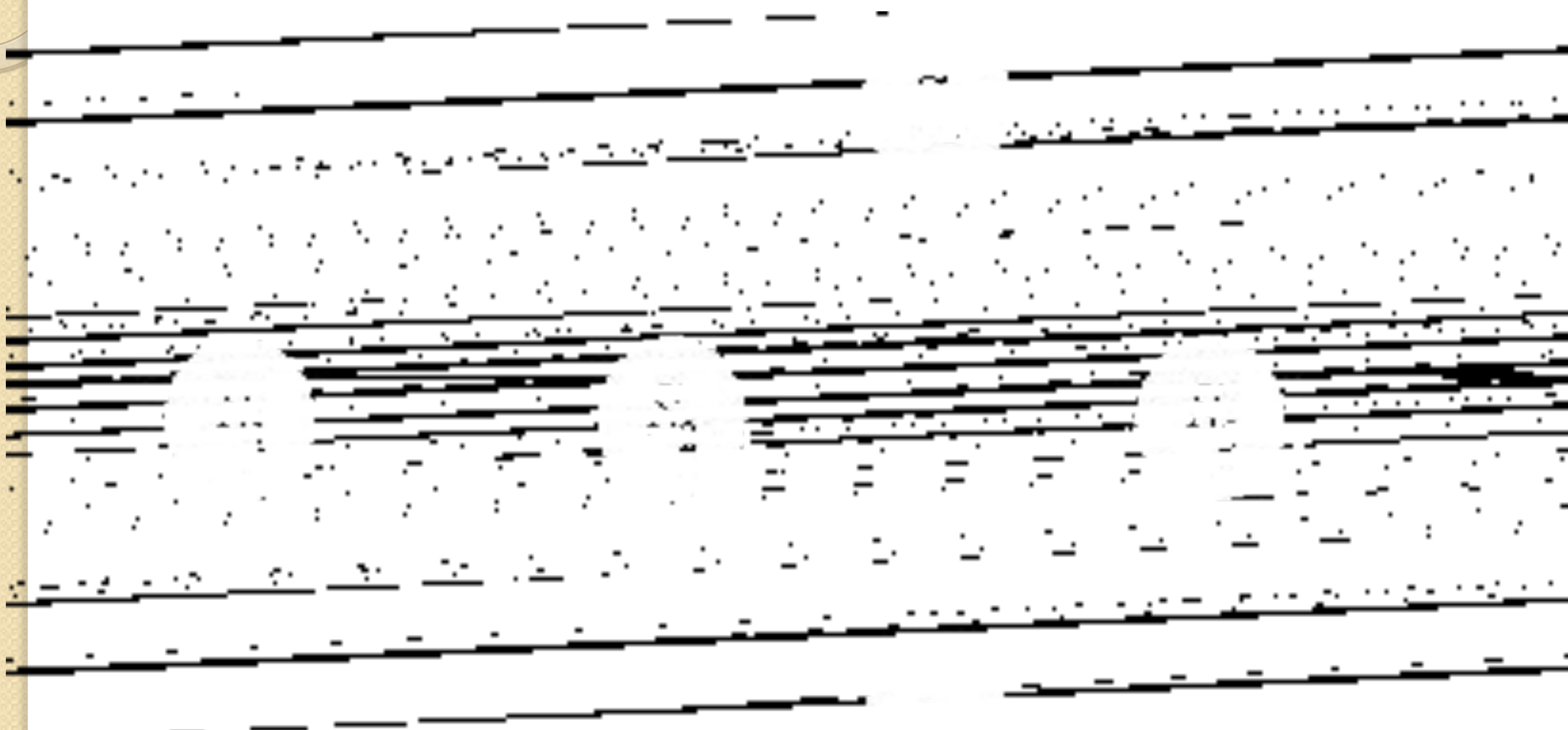
Пример

$S = \{S_1, \ldots, S_5\}$

$p^{(0)} = \{1, 0, 0, 0, 0\}$



Пример



Виды Марковских цепей

- Марковская цепь называется **однородной**, если переходные вероятности p_{ij} от времени не зависят, то есть от шага k к шагу (k+1) не меняются.
- **Разложимые** Марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга.
- **Эргодические** Марковские цепи описываются сильно связанным графом. В такой системе возможен переход из любого состояния в любое состояние за конечное число шагов.

Цель моделирования

- определить вероятность системы находится в j-ом состоянии после k-го шага. Обозначим эту вероятность

$$p_j(k), \quad где\ j = 1..n$$

- <u>однородная Марковская цепь</u>

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij}$$

- <u>неоднородная Марковская цепь</u>

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij}^{k}$$

Задача №1

Некоторая совокупность рабочих семей поделена на три группы: ε_1 – семьи, не имеющие автомашины и не намеревающиеся ее приобрести; ε_2 – семьи, не имеющие автомашины, но собирающиеся ее приобрести, и, наконец, ε_3 – семьи, имеющие автомашину. Статистические обследования дали возможность оценить вероятность перехода семей из одной группы на протяжении года в другую. При этом матрица перехода оказалась такой:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача №1

Найти:

а) вероятность того, что семья, не имевшая машины и не собиравшаяся ее приобрести, будет находиться в той же ситуации через 2 года;

б) вероятность того, что семья, не имевшая автомашины и намеревающаяся ее приобрести, будет иметь автомашину через 2 года. (выполнить решение пункта (б) данной задачи самостоятельно)

Решение задачи №1

а) Дано: $p_1(0)=1 \quad p_2(0)=0 \quad p_3(0)=0$

т.е. вектор начальных вероятностей p(0)=(1,0,0)

(сейчас система в состоянии 1)

Найти: $p_1(2)$ (через 2 года в состоянии 1)

Найдем вероятности системы оказаться в каждом из состояний через 1 год

$$p_1(1)=p_1(0)\cdot p_{11}+p_2(0)\cdot p_{21}+p_3(0)\cdot p_{31}$$

(умножение вектора начальных вероятностей на 1 столбец матрицы переходных вероятностей)

$$p_2(1)=p_1(0)\cdot p_{12}+p_2(0)\cdot p_{22}+p_3(0)\cdot p_{32}$$

(умножение вектора начальных вероятностей на 2 столбец матрицы переходных вероятностей)

$$p_3(1)=p_1(0)\cdot p_{13}+p_2(0)\cdot p_{23}+p_3(0)\cdot p_{33}$$

(умножение вектора начальных вероятностей на 3 столбец матрицы переходных вероятностей)

Решение задачи №1

Получим вектор вероятностей через 1 год

$$p(1) = (p_1(1); p_2(1); p_3(1))$$

В нашем случае это 1-ая строка матрицы переходных вероятностей

Найдем вероятности системы оказаться в 1 состоянии через 2 года

$$p_1(2) = p_1(1) \cdot p_{11} + p_2(1) \cdot p_{21} + p_3(1) \cdot p_{31}$$

(умножение вектора вероятностей через 1 год, т.е. 1-ой строки матрицы переходных вероятностей на 1-ый столбец матрицы переходных вероятностей)

Решение задачи №1

Вычисления:

$$p_1(1) = p_1(0)\cdot p_{11} + p_2(0)\cdot p_{21} + p_3(0)\cdot p_{31} =$$
$$= 1\cdot 0{,}8 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0{,}8$$

$$p_2(1) = p_1(0)\cdot p_{12} + p_2(0)\cdot p_{22} + p_3(0)\cdot p_{32} =$$
$$= 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}7 + 0\cdot 0 = 0{,}1$$

$$p_3(1) = p_1(0)\cdot p_{13} + p_2(0)\cdot p_{23} + p_3(0)\cdot p_{33} =$$
$$= 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}3 + 0\cdot 1 = 0{,}1$$

$$p_1(2) = p_1(1)\cdot p_{11} + p_2(1)\cdot p_{21} + p_3(1)\cdot p_{31} =$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}1\cdot 0 = 0{,}64$$

Ответ: вероятность того, что семья, не имевшая машины и не собиравшаяся ее приобрести, будет находиться в той же ситуации через 2 года равна 0,64

Задача №2

Предположим, что некая фирма осуществляет доставку оборудования по Москве: в северный округ (обозначим *A*), южный (*B*) и центральный (*C*). Фирма имеет группу курьеров, которая обслуживает эти районы. Понятно, что для осуществления следующей доставки курьер едет в тот район, который на данный момент ему ближе. Статистически было определено следующее:

- после осуществления доставки в *A* следующая доставка в *30* случаях осуществляется в *A*, в *30* случаях – в *B* и в *40* случаях – в *C*;
- после осуществления доставки в *B* следующая доставка в *40* случаях осуществляется в *A*, в *40* случаях – в *B* и в *20* случаях – в *C*;
- после осуществления доставки в *C* следующая доставка в *50* случаях осуществляется в *A*, в *30* случаях – в *B* и в *20* случаях – в *C*.

Задача №2

Если курьер стартует из центрального округа, какова вероятность того, что осуществив две доставки, он будет в южном округе?

Выполните решение задачи самостоятельно:

- Составьте матрицу переходных вероятностей
- Нарисуйте граф данного процесса
- Вычислите искомую вероятность

Предельные вероятности

Для эргодических цепей при достаточно большом времени функционирования (t стремится к бесконечности) наступает стационарный режим, при котором вероятности состояний системы не зависят от времени и не зависят от распределения вероятностей в начальный момент времени.

Такие вероятности называются **предельными** (или финальными, стационарными) вероятностями состояний, они показывает среднее относительное время пребывания системы в определенном состоянии.

Например, если предельная вероятность i-го состояния p_i=0.5, то это означает, что в среднем половину времени система находится в i-ом состоянии.

Предельные вероятности

Пусть x_i – **предельные вероятности** (i=1..n), где n – число состояний.

Тогда x_i являются единственным решением системы линейных уравнений.

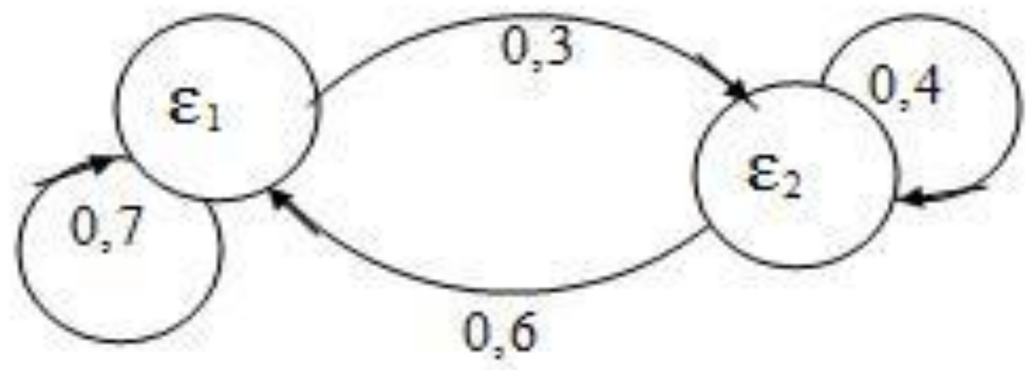
В данную систему входят уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_{ij} = x_j \quad (\forall j = 1..n)$$

Пример

Матрица переходных вероятностей (число состояний n=2) и графическое изображение Марковского процесса:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$



Предельные вероятности x_1 и x_2 можно найти, решив систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0.7 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 = x_1 \\ 0.3 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 = x_2 \end{cases}$$

Задача №3

Две машины A и B сдаются в аренду по одной и той же цене. Эти машины имеют следующие матрицы переходных вероятностей:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}; \quad P_B = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

где ε1 – состояние, когда машина работает хорошо;

ε2 – состояние, когда машина требует регулировки.

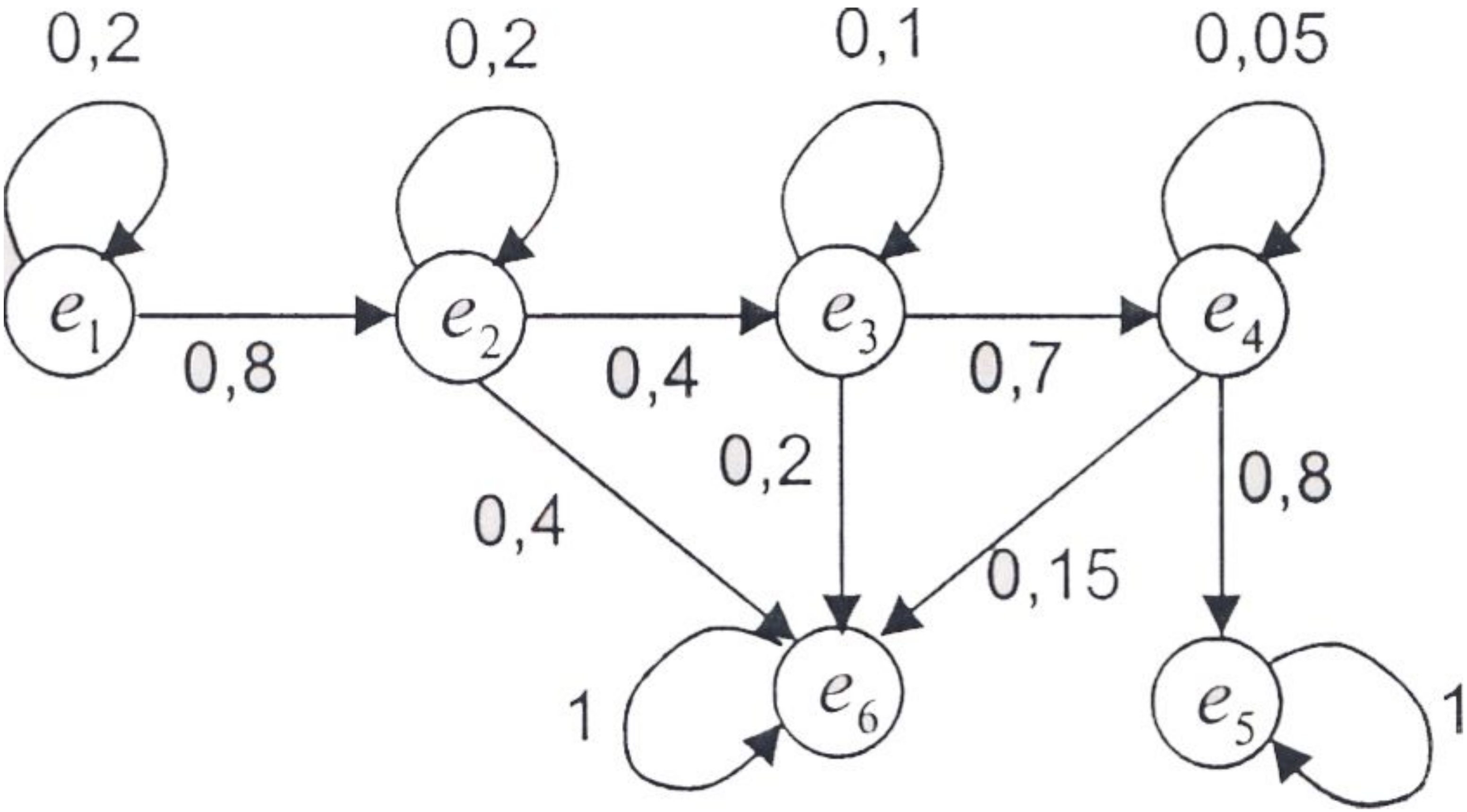
Определить вероятности для обеих машин. Какую машину стоит арендовать?

Задача №4

Посетитель банка с намерением получить кредит проходит ряд проверок (состояний): e_1 – оформление документов; e_2 – кредитная история; e_3 – возвратность; e_4 – платежеспособность. По результатам проверки возможны два исхода: отказ в выдаче кредита (e_6) и получение кредита (e_5).

Задача №4

Граф этой системы:



Задача №4

Требуется:

а) описать данный процесс как Марковскую цепь и построить переходную матрицу (выполнить самостоятельно);

б) найти среднее время получения положительного и отрицательного результата (решение в Excel).