Кафедра бойового застосування і експлуатації радіолокаційних, радіотехнічних та метрологічних засобів Повітряних Сил

Дисципліна: "ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТРОЛОГІЇ"

Тема № 4. Основи теорії похибок.

Заняття 3 : ВИПАДКОВІ ПОХИБКИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ.

НАВЧАЛЬНА МЕТА :

1.Ознайомити студентів з оцінкою результатів непрямих вимірювань .

2.Ознайомити студентів з методикою оцінки випадкової складової похибки непрямих вимірювань.

3.Ознайомити студентів з методикою оцінки систематичної складової похибки непрямих вимірювань.

Вид заняття – лекція

к.т.н.,доц. Лях М.А.

УЧБОВІ ПИТАННЯ :

1. Оцінка результатів непрямих вимірювань.
2. Оцінювання випадкової складової похибки непрямих вимірювань.
3. Оцінювання систематичної складової похибки непрямих вимірювань.

I. ОЦІНКА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ.

При непрямих вимірюваннях значення величини, яку знаходять одержують на основі відомої залежності. Вона пов‘язує цю величину з іншими величинами, які одержані прямими вимірюваннями.

Спочатку розглянемо той простіший випадок, коли шукана величина Qz визначається як сума двох величин Qx іQy :

QZ = QX + QY (1)

Так як результат прямих вимірювань величин Qx і Qy (після виключення систематичних похибок) включають в себе деякі випадкові похибки, то формулу непрямого вимірювання суми можна записати у вигляді:

$$\bar{Z} - \Delta_{zв} = (\bar{X} - \Delta_{xв}) + (\bar{Y} - \Delta_{yв}) \qquad (2)$$

де , $\bar{X}$ $\bar{Y}$ - середні арифметичні, одержані при обробці результатів прямих вимірювань величин Qx і Qy;

$\bar{Z} - \Delta_{zв}$ - оцінка істинного значення непрямої вимірюваної величини і його випадкова похибка.

Із рівняння (2) безпосередньо витікає справедливість двох наступних рівнянь:

$$\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y} \quad ; \qquad \Delta_{Z\text{в}} = \Delta_{X\text{в}} + \Delta_{Y\text{в}} \qquad (3)$$

або іншими словами оцінкою істинного значення непрямої вимірюваної величини повинна становити сума оцінок істинних значень вихідних величин, випадкові похибки яких складаються.

Математичне очікування оцінки Z дорівнює, очевидно, істинному значенню шуканої величини:

$$M(\bar{Z}) = M(\bar{X} + \bar{Y}) = M(\bar{X}) + M(\bar{Y}) = Q_X + Q_Y = Q_Z \qquad (4)$$

а її СКВ обчислюється:

$$\sigma^2_{\bar{Z}} = D(\bar{Z}) = D(\Delta_{Z\text{в}}) = D(\Delta_{X\text{в}} + \Delta_{Y\text{в}}) = M[(\Delta_{X\text{в}} + \Delta_{Y\text{в}})^2] = \qquad (5)$$

$$= M[\Delta^2_{X\text{в}} + \Delta^2_{Y\text{в}} + 2\Delta_{Xd} \cdot \Delta_Y] = M[\Delta^2_{X\text{в}}] + M[\Delta^2_{Y\text{в}}] + 2M[\Delta_{X\text{в}} \cdot \Delta_{Y\text{в}}] =$$

$$= \sigma^2_{\bar{X}} + \sigma^2_{\bar{Y}} + 2M[\Delta_{X\text{в}} \cdot \Delta_{Y\text{в}}]$$

Математичне очікування добутку випадкових похибок, яке входить в вираз (5) називається кореляційним моментом, і визначає ступінь “ тісноти” лінійної залежності між похибками. Замість кореляційного моменту часто використовують безрозмірну величину, яка називається коефіцієнтом кореляції

$$r_{\bar{X}\bar{Y}} = \frac{M[\Delta_{X\text{в}} \cdot \Delta_{Y\text{в}}]}{\sigma_{\bar{X}} \cdot \sigma_{\bar{Y}}} \qquad (6)$$

Звідси можна зробити висновок, що коефіцієнт кореляції між похибками середніх арифметичних дорівнює коефіцієнту кореляції між похибками δX і δY результатів окремих вимірювань величин QX і QY :

$$r_{\bar{X}\bar{Y}} = r_{XY} \qquad (7)$$

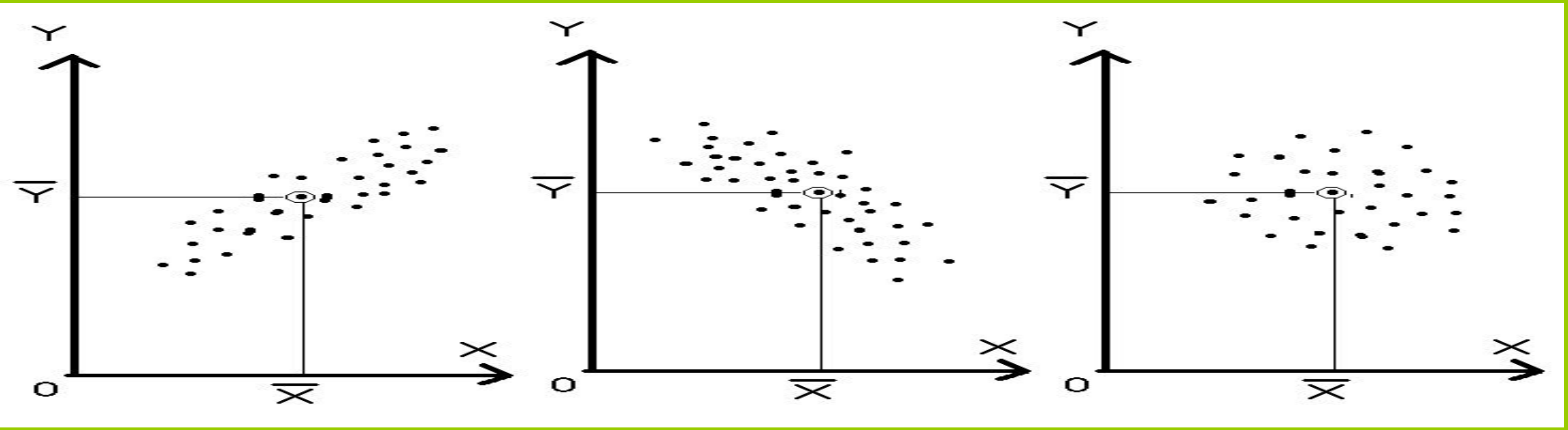
З урахуванням коефіцієнта кореляції дисперсія результату непрямих вимірювань

При позитивній кореляції, тобто коли r > 0 , одна з похибок має тенденцію зростати при зростанні другої. Якщо кореляція негативна, то r < 0 і похибка однієї величин зменшується при збільшенні похибки XY вимірювання іншої величини.

При наявності кореляції зручно робити висновок за допомогою графіка, на якому в координата X,Y зображені пари послідовно одержаних результатів вимірювання величин Q і Q .

При позитивній кореляції, тобто коли r > 0 , одна з похибок має тенденцію зростати при зростанні другої. Якщо кореляція негативна, то r < 0 і похибка однієї величин зменшується при збільшенні похибки XY вимірювання іншої величини.

При наявності кореляції зручно робити висновок за допомогою графіка, на якому в координата X,Y зображені пари послідовно одержаних результатів вимірювання величин Q і Q .



а) б) в)

рис.1

На рис.1 зображені випадки сумісного розподілу результатів вимірювання при позитивній (рис.1а) і негативній (рис.1б) кореляції. Результати вимірювань на рис.1в не корельовані.

Частіше всього наявності кореляції слід очікувати в тих випадках, коли обидві величини вимірюються одночасно однотипними вимірювальними приладами. При цьому невловимі зміни зовнішніх дій (електричних, магнітних, температурних та інших полів, умов живлення та інше) водночас помітно впливають на формування випадкових похибок їх вимірювання. Наприклад, смугу пропускання контуру находять, як різність двох частот П = f1 - f2, резонансну частоту контуру визначають методом “вилки“ і т.д. Відліки при таких вимірюваннях роблять один за другим через невеликі проміжки часу. Тому очікувати, що вплив ряду факторів на результати вимірювання будуть майже однаковими. При визначені різниці результату прямих вимірювань частина похибок, яка визначається цими факторами, компенсуються. Залишаються похибки, які визначаються тими факторами, які між спостереженнями встигли трохи зміниться

В деяких випадках причиною кореляції між результатами вимірювань може стати сам оператор. Така як при деяких дослідженнях, які пов’язані з ручним зрівноваженням приладів порівняння (наприклад, порівняння мір на точних вагах, в фотометрії) досвід спостерігача має значний вплив на результати вимірювань.

В тих випадках, коли початкові величини вимірюють за допомогою різних засобів вимірювання в різний час, можна з повною впевненістю очікувати, що результат вимірювань будуть корельовано мало. В цьому випадку коефіцієнтом кореляції можна нехтувати.

2. ОЦІНЮВАННЯ ВИПАДКОВОЇ СКЛАДОВОЇ ПОХИБКИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

В загальному виді при непрямих вимірюваннях на основі відомої залежності

$$Y = \varphi\left(A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_m\right) \quad \textbf{(8)}$$

між вимірювальною величиною Y та величинами (аргументами) A1, A2,..,A*m*, які знаходяться прямими вимірюваннями, знаходять шукане значення величини Y.

Результати прямих вимірювань A1, A2,..,A*m* мають випадкові похибки.

Тому і величина Y розглядається як функція *m* - випадкових аргументів.

Розглянемо методику оцінювання випадкової похибки результату непрямого вимірювання.

Проведемо n спостережень усіх аргументів функції (8) і одержимо m - груп спостережень:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots & A_{i1}\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots & A_{2i}\cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2}\cdots & A_{ki}\cdots & A_{kn} \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots & A_{mk}\cdots & A_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

Вираз (9) називають матрицею спостережень.

Нехай (9) одержані в умовах, коли їх можна вважати рівноточними; систематичні та грубі похибки відсутні (тобто мають місце тільки випадкові аргументи); результати спостережень кожного із аргументів - незалежні.

В результаті обробки n спостережень кожного аргументу функції (8) обчислюють середнє арифметичне значення аргументів

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_k, \ldots \overline{A}_m$ **де** $$\overline{A}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_{ki}) \qquad (10)$$

середнє квадратичне відхилення результату спостереження кожного аргументу

$\tilde{\sigma}_{A1}, \tilde{\sigma}_{A2}, \ldots \tilde{\sigma}_{Ak}, \ldots \tilde{\sigma}_{Am}$ **де** $$\tilde{\sigma}_{Ak} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(A_{ki} - \overline{A}_k\right)^2} \qquad (11)$$

середнє квадратичне відхилення результатів прямих вимірювань аргументів $\tilde{\sigma}_{\overline{A}1}, \tilde{\sigma}_{\overline{A}2}, \ldots \tilde{\sigma}_{\overline{A}k}, \ldots \tilde{\sigma}_{\overline{A}m}$ **де:**

$$\tilde{\sigma}_{\overline{A}k} = \frac{\tilde{\sigma}_{Ak}}{\sqrt{n}}$$

В якості оцінки результату непрямого вимірювання приймають значення, яке одержане підстановкою в (8) середніх арифметичних значень аргументів

$$\overline{Y} = \varphi\left(\overline{A}_1,..\overline{A}_k,...\overline{A}_m\right) \quad (13)$$

Оцінимо випадкову похибку результату непрямого вимірювання.

При цьому розглянемо два характерних випадки:

1) *Для випадку залежних випадкових похибок аргументів*

оцінка СКВ результату непрямого вимірювання визначається формулою

$$\tilde{\sigma}_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial A_k}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}^2_{\overline{A}k} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial A_k} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial A_l} \cdot \tilde{\sigma}_{\overline{A}k} \cdot \tilde{\sigma}_{\overline{A}l} \cdot \tilde{r}_{kl}} \quad (14)$$

де $\frac{\partial\varphi}{\partial A_k}$ - особиста похідна від функції (8) по аргументу Ak ;

k,l **= 1;** $k \neq l$ означає, що додавання проводиться по всіх парних значення ***k*** **і** ***l*****, окрім** ***k*** **=** ***l*****;**

$\tilde{r}_{kl}$ - оцінка коефіцієнта кореляції між випадковими похибками аргументів A*k* і A*l*

Якщо формула результату непрямого вимірювання представляє собою багаточлен

$$Y = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot A_k \qquad (15)$$

де b - постійний коефіцієнт

вираз (14) для оцінки середнього квадратичного відхилення результату непрямого вимірювання приймає вигляд

$$\tilde{\sigma}_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b^2{}_{k} \cdot \tilde{\sigma}^2{}_{\overline{A}k} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m} b_k \cdot b_l \cdot \tilde{\sigma}_{\overline{A}k} \cdot \tilde{\sigma}_{\overline{A}l} \cdot \tilde{r}_{kl}} \qquad (16)$$

Оцінка коефіцієнта кореляції *r* у виразах (14-16) обчислюється на основі матриці спостережень аргументів (9) згідно формули

$$\tilde{r}_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(A_{ki} - \overline{A}_k\right) \cdot \left(A_{li} - \overline{A}_l\right)}{(n-1) \cdot \tilde{\sigma}_{Ak} \cdot \tilde{\sigma}_{Al}} \qquad (17)$$

спостережень n по табл 3.1 знаходять квантиль розподілу Ст‘юдента. Довірчі границі похибки результату непрямого вимірювання визначаються згідно методики, яка розглянута на попередньому занятті, а підсумковий результат непрямого вимірювання записується у вигляді

$$Y = \overline{Y} \pm \Delta_{\overline{Y}} = \overline{Y} \pm K \cdot \widetilde{\sigma}_{\overline{Y}}\,;\;\; P = \ldots \qquad (18)$$

де К - квантиль, яка визначається законом розподілу результату непрямого вимірювання Y , прийнятою довірчою ймовірністю та числом n.

Закон розподілу можна вважати нормальним, якщо результати спостереження належать нормальному закону розподілу, а також, якщо число спостережень, які виконуються під час вимірювання усіх аргументів, перевищує 30. В цьому випадку квантиль К визначають за табл. 3.3. (квантилі нормованого нормального розподілу).

При меншому n (n<30) по заданій довірчій ймовірності та по ефективному числі

Приклад: Оцінити випадкову похибку непрямого вимірювання резонансної частоти підсилювача **f0** методом “вилки”, якщо виміряне значення частоти визначають за формулою

f0 = (f1+f2)/2 = φ(f1, f2) (19)

де **f1** та **f2** - частоти, які відповідні встановленому рівню вихідної напруги контуру.

Так як під час проведення прямих вимірювань частот **f1** та **f2** будуть мати місце випадкові похибки, то для уточнення результату вимірювання проводять багаторазове спостереження частот **f1** та **f2**.

Оцінку середнього квадратичного відхилення результату непрямого вимірювання резонансної частоти **f0** згідно (18) визначають по формулі

$$\tilde{\sigma}_{\bar{f}_o} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}^2_{\bar{f}1} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\right)^2 \cdot \tilde{\sigma}^2_{\bar{f}2} + 2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\cdot\tilde{\sigma}_{\bar{f}_1}\cdot\tilde{\sigma}_{\bar{f}_2}\cdot\tilde{r}_{1,2}} \quad \textbf{(20)}$$

Так як особиста похідна

$$\frac{\partial\varphi(f_1, f_2)}{\partial f_1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial\varphi(f_1, f_2)}{\partial f_2} = \frac{1}{2}$$

формула приймає вигляд

$$\tilde{\sigma}_{\bar{f}_o} = 0,5 \cdot \sqrt{\cdot \tilde{\sigma}^2 \bar{f}1 + \tilde{\sigma}^2 \bar{f}2 + 2 \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{f}_1} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{f}_2} \cdot \tilde{r}_{1,2}} \quad \textbf{(21)}$$

Тут $\tilde{\sigma}_{\bar{f}1} = \frac{\tilde{\sigma}_{f1}}{\sqrt{n}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{f}2} = \frac{\tilde{\sigma}_{f2}}{\sqrt{n}}$ - оцінки середніх квадратичних відхилень результатів спостережень частот **f1** та **f2**;

$$\tilde{r}_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_{1i} - \bar{f}_1)\cdot(f_{2i} - \bar{f}_2)}{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_{f1}\cdot\tilde{\sigma}_{f2}}$$ - оцінка коефіцієнта кореляції;

$\tilde{\sigma}_{f1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{n} \left(f_{1i} - \bar{f}_1\right)^2}$, $\tilde{\sigma}_{f2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{n} \left(f_{2i} - \bar{f}_2\right)^2}$ - оцінки середніх квадратичних відхилень результатів спостережень частот **f1** та **f2**;

$\bar{f}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{1i}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{2i}$ середнє арифметичне значення оцінки результатів прямих вимірювань частот **f1** та **f2**;

Довірча похибка результату непрямого вимірювання частоти **f0** визначається згідно формули $\overset{o}{\Delta}_{\bar{f}o} = t_s \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{f}o}$

де **ts** - коефіцієнт, який визначається визначеною імовірністю Р та числом спостережень **n** по табл 3.1

Результат непрямого вимірювання резонансної частоти запишемо у вигляді

$$f_o = \bar{f}_o \pm \Delta_{\bar{f}o}; \; P = \qquad (22)$$

2)Для випадку незалежних випадкових похибок аргументів функції, коли, наприклад, вимірювання аргументів проводяться за допомогою різних засобів вимірювання, через порівняня великі проміжки часу, коефіцієнт кореляції дорівнює нулю (r=0).

Тоді оцінка середнього квадратичного відхилення результату непрямого вимірювання буде визначатись за допомогою більш простішого виразу.

ПРИКЛАД: Визначити абсолютну похибку вимірювання електричної енергії на основі даних:

I = (10,320 ± 0,015)A;

R = (11,68 ± 0,01)Ом ;

t = (405,2 ± 0,1)с.

Енергію розраховуємо згідно формули

$$W = I^2 \cdot R \cdot t = \varphi(I, R, t) \qquad \textbf{(21)}$$

$$W = I^2 \cdot R \cdot t = (10{,}32)^2 \cdot 11{,}68 \cdot 405{,}2 = 495{,}3 \ кДж$$

Відносна похибка непрямого вимірювання енергії у відповідності з (16) визначається формулою

$$\delta_W = \sqrt{\alpha_I{}^2 \cdot \delta_I{}^2 + \alpha_R{}^2 \cdot \delta_R{}^2 + \alpha_t{}^2 \cdot \delta_t{}^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha_I{}^2 \cdot \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \alpha_R{}^2 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \alpha_t{}^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot \left(\frac{0{,}015}{10{,}32}\right)^2 + \left(\frac{0{,}01}{11{,}68}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{405{,}2}\right)^2} = \pm 0{,}004$$

а абсолютна похибка

$$\Delta W = \delta_W \cdot W = 0{,}004 \cdot 495{,}3 \cdot 10^3 \approx \pm 2{,}0 \quad кДж$$

Питання 3. ОЦІНЮВАННЯ СИСТЕМАТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПОХИБКИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ.

Нехай вимірювальна величина Y визначаєтся виразом

$$Y = \varphi\left(A_1, A_2, ...A_k, ...A_m,\right) \quad \textbf{(23)}$$

В результаті прямих вимірювань знайдені числові значення аргументів $A_1, A_2, ...A_k, ...A_m$ **та їх систематичні похибки**

$$\Delta_{c1}, \Delta_{c2}, ...\Delta_{ck}, ...\Delta_{cm}$$

- **Вважаємо, що випадкові похибки при прямих вимірюванняхх аргументів відсутні або дуже малі.**
- Якщо аргументи $A_1, A_2, ...A_k, ...A_m$ одержують кінцеві порівняльно малі прирости $\Delta_{c1}, \Delta_{c2}, ...\Delta_{ck}, ...\Delta_{cm}$, тоді і
- вимірювальна величина Y одержить приріст Δ_{cY}, тобто

$$Y + \Delta_{cY} = \varphi\left(A_1 + \Delta_{cA_1}, A_2 + \Delta_{cA_2}, ...A_m + \Delta_{cA_m}\right) \quad \textbf{•24)}$$

Розклавши праву частину виразу (5) в ряд Тейлора та виключивши похідні першого порядку, одержимо

$$Y + \Delta_{cY} = \varphi\left(A_1, A_2, \ldots A_m\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial A_1} \cdot \Delta_{cA_1} + \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial A_m} \cdot \Delta_{cA_m} \qquad \textbf{(25)}$$

Тоді систематичну похибку результату непрямого вимірювання обчислюють згідно формули

$$\Delta_{cY} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \cdot \Delta_{cA_k} \qquad \textbf{(26)}$$

Вираз (26) застосовують на практиці, коли відомі числові значення та знаки систематичних похибок аргументів. У випадку, коли поправки невідомі, а відомі граничні значення невиключених систематичних похибок, то границя невиключеної систематичної похибки результату непрямого вимірювання в залежності від числа аргументів обчислюється згідно формул:

$$\Delta_{cY} = \pm \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \cdot \Delta_A$$ при m<3 **(27)**

$$\Delta_{cY} = \pm \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \cdot \Delta^2{}_{cA_k}}$$ при m>4 **(28)**

Таким чином,при оцінюванні результатів непрямих вимірювань за розглянутою методикою оцінюють систематичну складову похибки вимірювання.