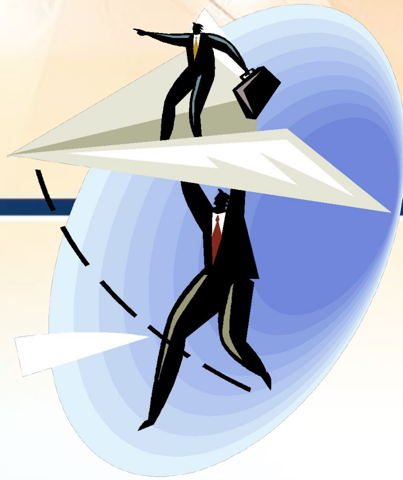


Анализ данных в Mathcad

Математические вычисления

Аппроксимация (приближение)

- Математический метод, состоящий в замене одних математических объектов другими, близкими к исходным, но более простыми.
- Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются, или свойства которых уже известны).

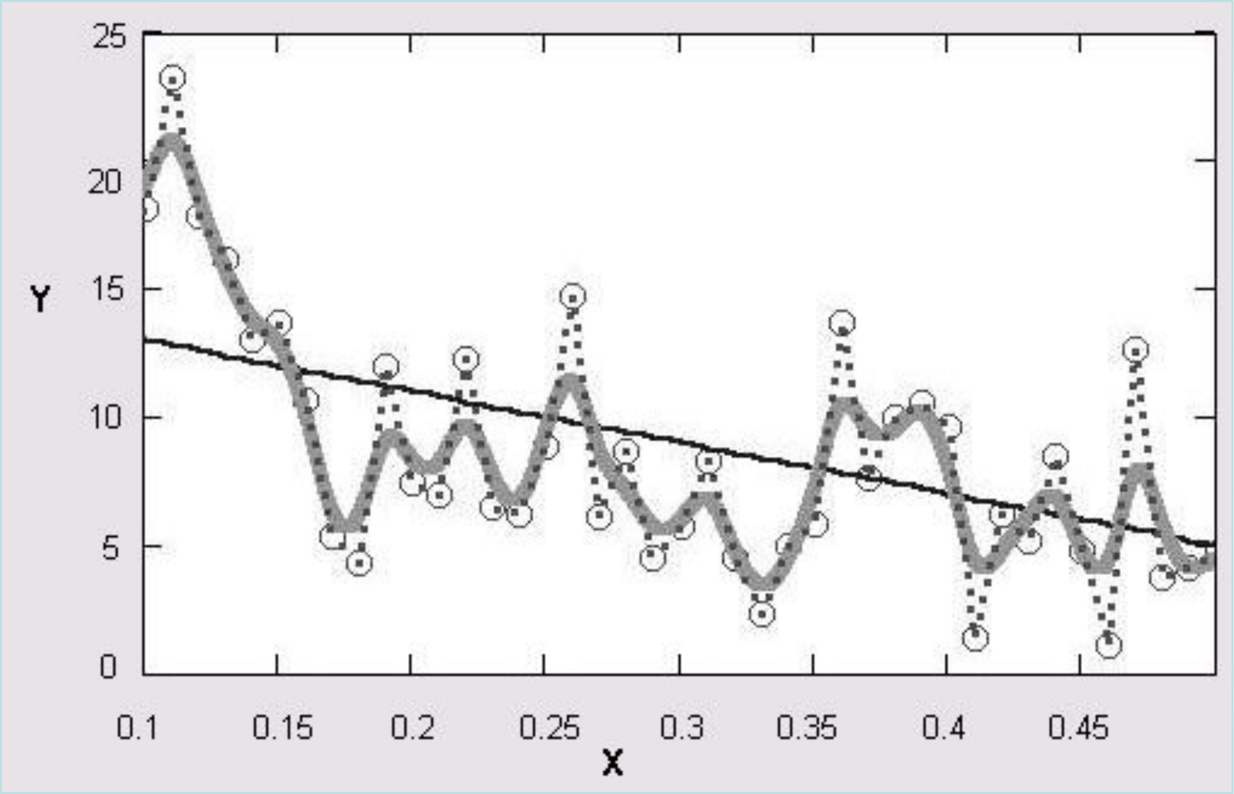
Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции *f*(*x*) некоторой функцией □(*x*) так, чтобы отклонение функции □(*x*) от *f*(*x*) в заданной области было наименьшим.

- Когда имеется выборка экспериментальных данных, то она, чаще всего, представляются в виде массива, состоящего из пар чисел (xi,yi).
- Поэтому возникает задача аппроксимации дискретной зависимости $y(xi)$ непрерывной функцией $f(x)$. Функция $f(x)$, в зависимости от специфики задачи, может отвечать различным требованиям.

Требования

1. Функция $f(x)$ должна проходить через точки (xi,yi), т. е. $f(xi)=yi$, $i=1\ldots n$. В этом случае говорят об <u>интерполяции</u> данных функцией $f(x)$ во внутренних точках между xi, или <u>экстраполяции</u> за пределами интервала, содержащего все xi.
2. Функция $f(x)$ должна некоторым образом приближать $y(xi)$, не обязательно проходя через точки (xi,yi). Такова постановка задачи <u>регрессии</u>.
3. Функция $f(x)$ должна приближать экспериментальную зависимость $y(xi)$, учитывая, к тому же, что данные (xi,yi) получены с некоторой погрешностью. При этом функция $f(x)$, с помощью того или иного алгоритма уменьшает погрешность, присутствующую в данных (xi,yi). Такого типа задачи называют <u>задачами фильтрации</u>. Сглаживание - частный случай фильтрации.

Различные виды построения аппроксимирующей зависимости *f* (*x*)



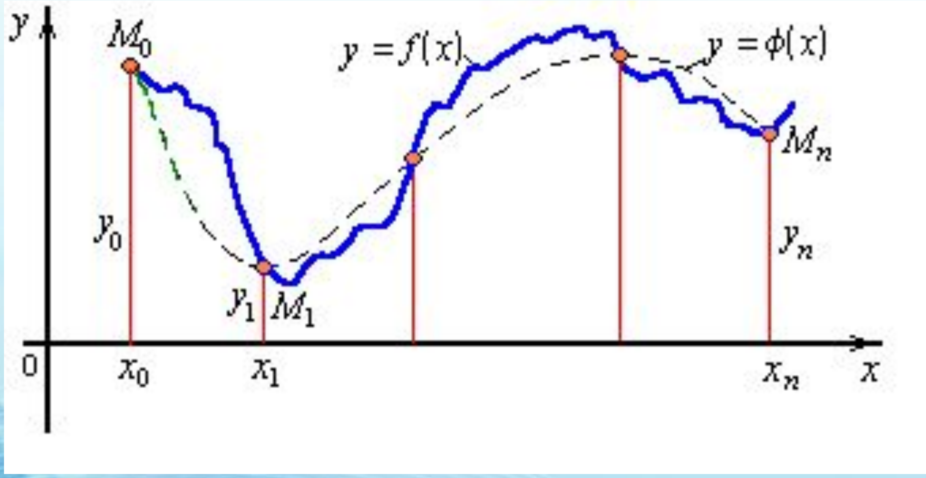
исходные данные, интерполяция, линейная регрессия, сглаживание.

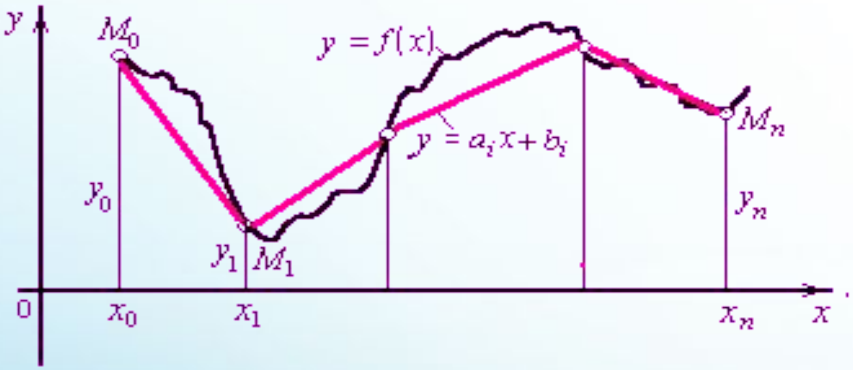
Интерполяция

- Задача интерполяции функции одной переменной состоит в замене дискретной зависимости $y(x_i)$, т. е. N пар чисел (x_i, y_i), или, по-другому, узлов, некоторой непрерывной функцией $y(x)$.
- При этом основным условием является то, что функция $y(x)$ должна проходить через точки (x_i, y_i), т. е. $y(x_i)=y_i$, $i=1 \ldots N$, а также возможность вычислить значение $y(x)$ в любой точке, находящейся между узлов.

Виды интерполяции

- Глобальная
- Локальная





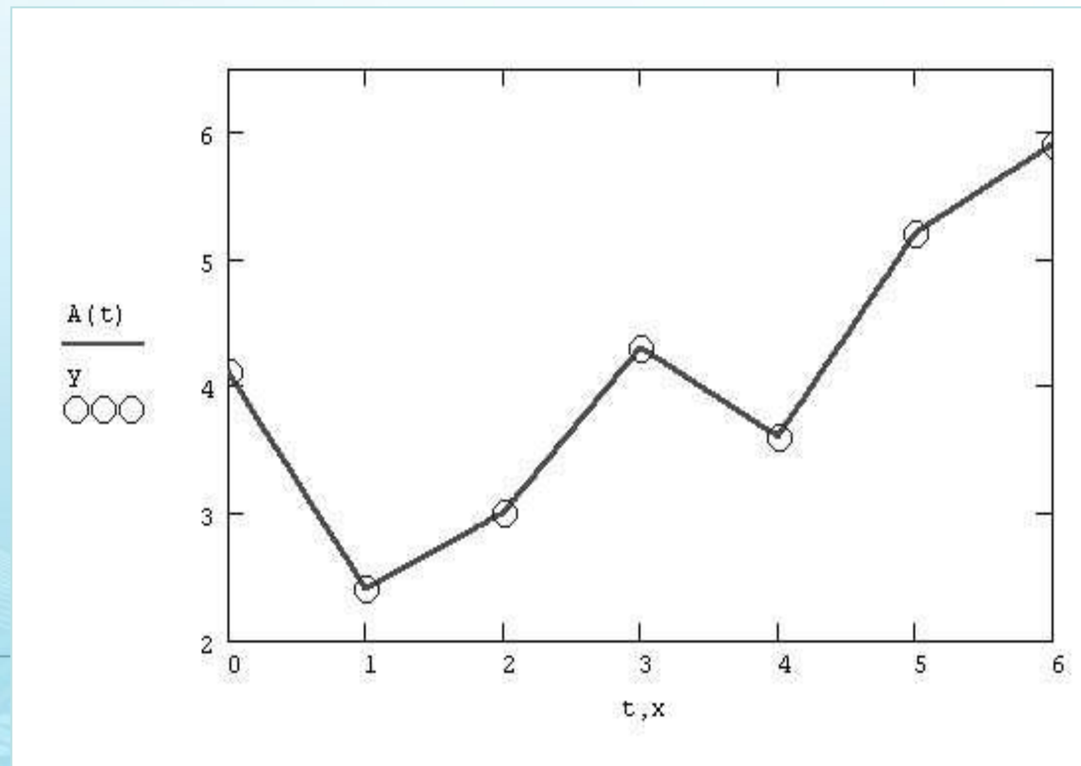
Локальная интерполяция

- При локальной интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени.
- В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства линейной интерполяции (функция linterp) и интерполяции сплайном – линейным (lspline), параболическим (pspline) и кубическим (cspline).

Линейная интерполяция (кусочно-линейная)

- Самый простой вид интерполяции, которая представляет искомую зависимость $y(x)$ в виде ломаной линии. Интерполирующая функция *y*(*x*) состоит из отрезков прямых, соединяющих точки (x_i,y_i)

- Для правки структуры щелкните мышью



Сплайн-интерполяция

Сплайн – это математическая модель гибкого, тонкого стержня из упругого материала. Стержень закрепляется в двух соседних узлах с заданными углами наклона. Стержень длиннее, чем расстояние между двумя точками. Линия, которую описывает сплайн-функция, напоминает по форме гибкую линейку, закреплённую в узловых точках (откуда и название: spline – гибкая линейка).

- В большинстве практических приложений лучше соединить экспериментальные точки (xi,yi) не ломаной линией, а гладкой кривой.
- Лучше всего для этих целей подходит интерполяция $y(x)$ квадратичными или кубическими сплайнами, т. е. отрезками квадратичных или кубических парабол.
- Сплайн-интерполяция обеспечивает равенство в узлах не только самих соседних параболических интерполирующих функций (сплайнов), но и их производных. Благодаря этому сплайн-интерполяция выглядит как очень гладкая функция.

Локальная интерполяция

Линейная интерполяция

linterp(vx, vy, x)	Использует векторы данных vx и vy, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение y, соответствующее третьему аргументу x.

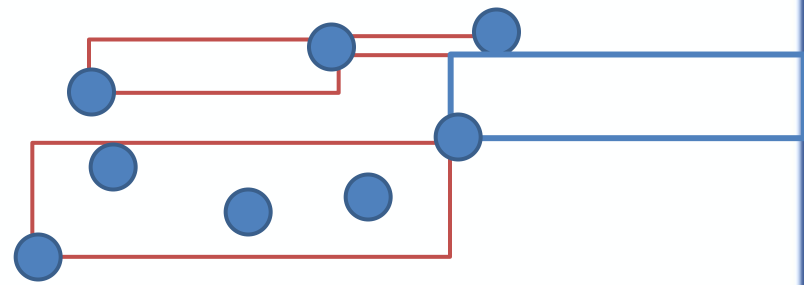
Сплайновая интерполяция *(проходит в два этапа)*

lspline(vx, vy) pspline(vx, vy)	Все эти функции возвращают вектор коэффициентов вторых

Линейное предсказание

определение значений вне набора данных

Экстраполяция



- Интерполяция дает возможность по значениям табличной функции находить значения в промежуточных точках. Однако бывают случаи, когда необходимо оценить табличную функцию за пределами ее области данных.
- Такие предсказания позволяют осуществлять отдельные численные методы. Принцип их работы основывается на анализе поведения зависимости в нескольких ее точках.
- В Mathcad функцией, реализующей один из алгоритмов предсказания (метод линейного предсказания Берга), является встроенная функция **predict**.

Формат функции: predict(vy,m,n)

- **vy** – вектор табличных значений функции (элементы вектора должны быть взяты через равные интервалы);
- **m** – число последних исходных значений табличной функции, по которым выполняется прогноз;
- **n** – число предсказанных значений.

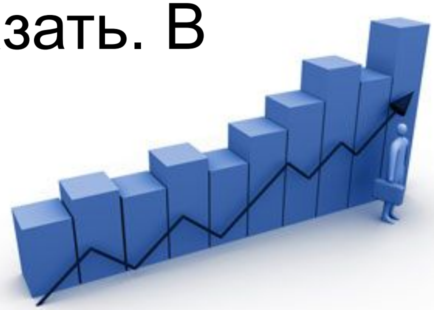
Пример

- Пусть получен вектор данных из таблицы

$$Y := \begin{pmatrix} 0.86 \\ 0.77 \\ 0.7 \\ 0.63 \\ 0.58 \\ 0.52 \\ 0.47 \\ 0.39 \end{pmatrix}$$

Определение m, число известных значений Y по которым будет построена экстраполяция, в нашем случае m = 8 (функция length);

Определение n, число значений Y, по которым строится экстраполяция + количество точек которое необходимо предсказать. В нашем случае n = 13.



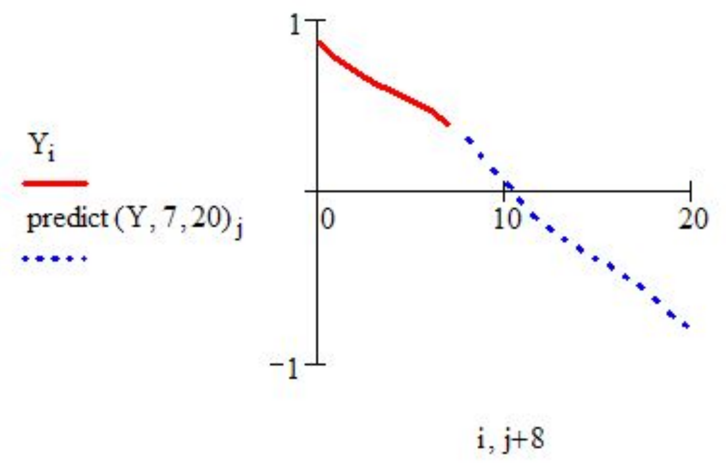
Построим график функции предсказания

- Для наглядности построим на одном графике исходную функцию (по точкам) и функцию предсказания, причем таким образом, чтобы последняя являлась продолжением первой функции.
- Для этого необходимо:
  - Так как мы имеем 8 значений исходных данных, то будем строить исходную функцию в 8 точках:

i:=0..7

Построим график функции предсказания

- Так как мы собираемся строить экстраполяцию для 13-ти точек, то **j:=0..13**
- Построим график функций. Причем необходимо обратить внимание, что мы сдвинули начало координат для функции предсказания на 8 точек вправо
(потому что исходная функция кончается на 8-й точке) с помощью выражения **j+8**.



Применение

- Функция предсказания обеспечивает достаточно высокую точность для аналитических зависимостей, при монотонных исходных функциях или исходных функциях, представляемых полиномом невысокой степени при достаточно большом числе исходных точек.
- Для хорошего прогноза необходимо тщательно подбирать число m, иначе качество прогноза может сильно ухудшиться.

Глобальная интерполяция

- Кубические сплайны - это мощное и удобное средство, но необходимо учитывать влияние направления и величины касательных векторов, указывать все точки кривой до ее изображения, невозможна локальная коррекция кривой. Расчет кубического сплайна требует обращения большой матрицы, зависящей от всех элементов сплайна; т. е. изменение любого сегмента затрагивает все остальные сегменты. Воздействие уменьшается при удалении от точки возмущения, но полностью пренебречь им нельзя.
- Параболическая интерполяция разрешает большинство этих проблем за счет того, что она только непрерывна, т. е. в точках соединения сегментов сохраняется непрерывность лишь первой производной, причем параболическая интерполяция не требует больших расчетов.

$x1$, ..., xn совпадают со значениями $y0$, $y1$, ..., yn функции f в этих точках. Многочлен $Pn(x)$ определяется единственным образом, но в зависимости от задачи его удобно записывать различными по виду формулами.

- Интерполяционная формула Лагранжа
- Интерполяционная формула Ньютона
- Интерполяционная формула Стирлинга
- Интерполяционная формула Бесселя

- **Интерполяционные формулы,** формулы, дающие приближённое выражение функции $y = f(x)$ при помощи *интерполяции*, т. е. через интерполяционный многочлен $Pn(x)$ степени n, значения которого в заданных точках $x0$, $x1$, ..., xn совпадают со значениями $y0$, $y1$, ..., yn функции f в этих точках. Многочлен $Pn(x)$ определяется единственным образом, но в зависимости от задачи его удобно записывать различными по виду формулами.
  - Интерполяционная формула Лагранжа
  - Интерполяционная формула Ньютона
  - Интерполяционная формула Стирлинга
  - Интерполяционная формула Бесселя

Интерполяция функций по Лагранжу

- Приблизить таблично заданную функцию можно не привязываясь к конкретной точке (локальная интерполяция), а использовать все узловые точки (глобальная).
  - Пусть некоторая функция $f(x)$ определена рядом своих узловых точек (xi,yi) на некотором отрезке $[a, b]$.
    Под *интерполяцией* подразумевается вычисление значений $f(x)$ в любом промежутке $[xi, xi+1]$ в пределах отрезка $[a,b]$. Соответственно, любое вычисление $f(x)$ вне отрезка $[a,b]$ является *экстраполяцией*.
  - Значения $f(x)$ вычисляются с помощью аппроксимирующего полинома: $f_a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_i a^i + \cdots + a_2 x^2 + a_i x + a_0 = \sum_{i=0} a_i x^i$
- Реализация полиномиальной аппроксимации сводится к вычислению коэффициентов полинома an, $an–1$, … , $a1$, $a0$ так, чтобы точки $fa(xi)$ точно совпадали с узловыми точками.

Решение задачи

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПО ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖА

$$xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad yi := \begin{pmatrix} 10 \\ 42 \\ 35 \\ 4 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Векторы xi и yi задают таблицу интерполируемой функции для последующей интерполяции методом Лагранжа с применением общей формулы интерполяции

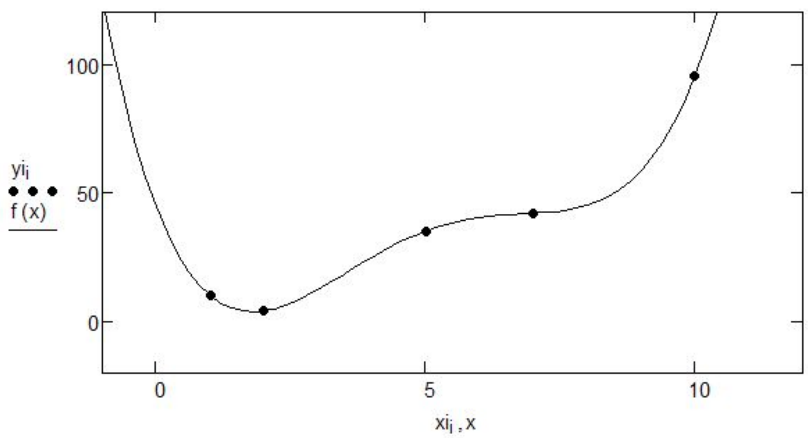
$n := \mathrm{length}(xi) - 1 \qquad i := 0..n \qquad j := 0..n$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} \left(yi_i \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}(i = j, 1, x - xi_j)}{\prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}(i = j, 1, xi_i - xi_j)} \right)$$

Общая формула интерполяции Лагранжа

Примеры интерполяции и экстраполяции: $f(-1) = 125.067 \quad f(2) = 4 \quad f(6) = 40.315 \qquad f(10.5) = 126.874$

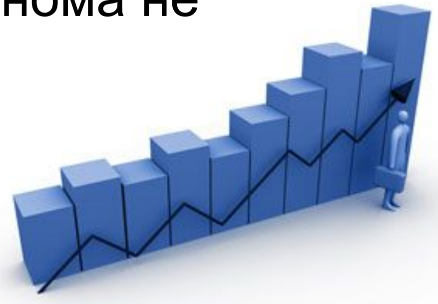
$i := 0..n \qquad x := -1, -0.8..12$



Построение по данным интерполяции графика функции с нанесенными на него узловыми точками - темными кружками. График проходит точно через узловые точки, которые расположены неравномерно.

Параболическая интерполяция

- Кривая полинома точно должна пройти через все узловые точки.
- Особенностью глобальной полиномиальной интерполяции (параболической интерполяции) является однозначное соответствие между числом узловых точек *N* аппроксимируемой функции и степенью полинома $n=N-1$.
  - На практике можно нередко задать функцию множеством точек , но тогда степень полинома станет очень большой, его вычисления займут много времени, а точность вычислений резко ухудшается. Максимальная степень полинома не должна превышать 8-10.



Пример

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 52 \\ 23 \\ 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Векторы x и y задают узловые точки (x,y)

$n := \mathrm{length}(x) - 1 \qquad n = 5$ Вычисление степени полинома

$i := 0..n \quad j := 0..n \qquad D_{i,j} := (x_i)^j$ Формирование матрицы D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 & 0.00032 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 & 0.01024 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 & 0.07776 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 & 0.4096 & 0.32768 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель Вандермонда

Вычисление коэффициентов а полинома из решения системы линейных уравнений (можно использовать любой способ для решения СЛАУ, например a:=D^-1*y):

$$a := \mathrm{lsolve}(D, y)$$

$$P(x) := \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cdot x^i\right)$$ Определение полинома P(x)

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 745.333 \\ -3.41 \times 10^3 \\ 5.698 \times 10^3 \\ -4.115 \times 10^3 \\ 1.094 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

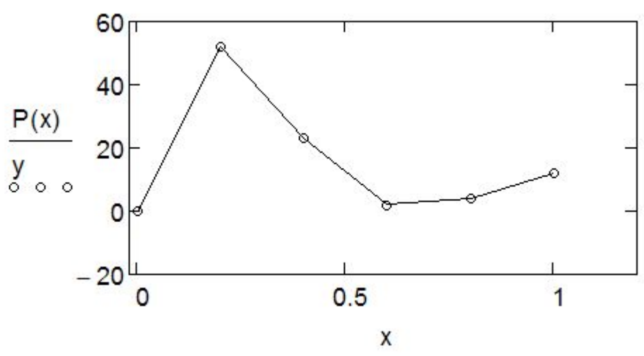


График полинома P(x) и нанесенные на него узловые точки.Для этого вида интерполяции характерно, что график точно проходит через узловые точки.