

«Перпендикулярность прямых и плоскостей»





План:

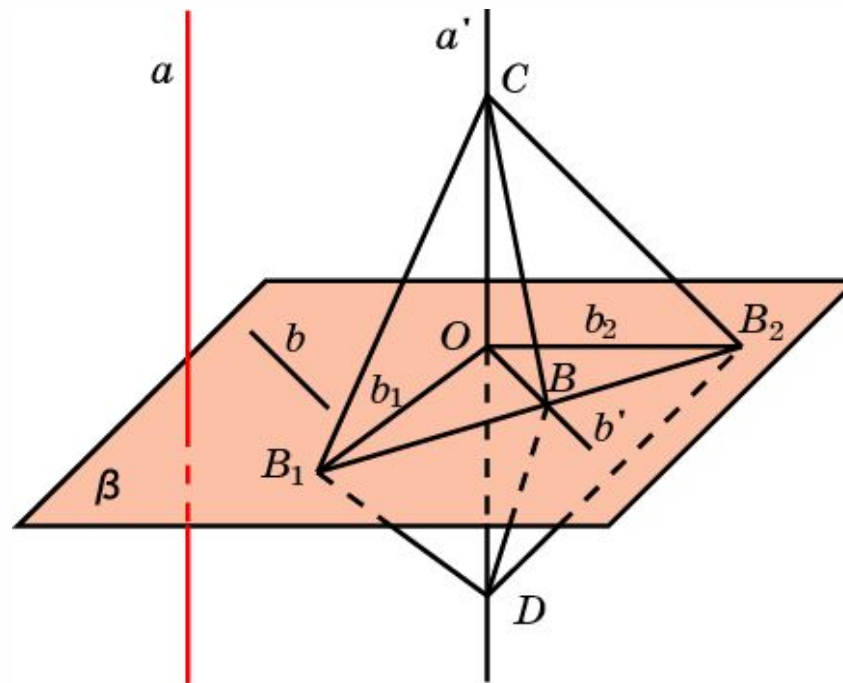
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ
- ❖ ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ
- ❖ ДВУГРАННЫЙ УГОЛ
- ❖ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

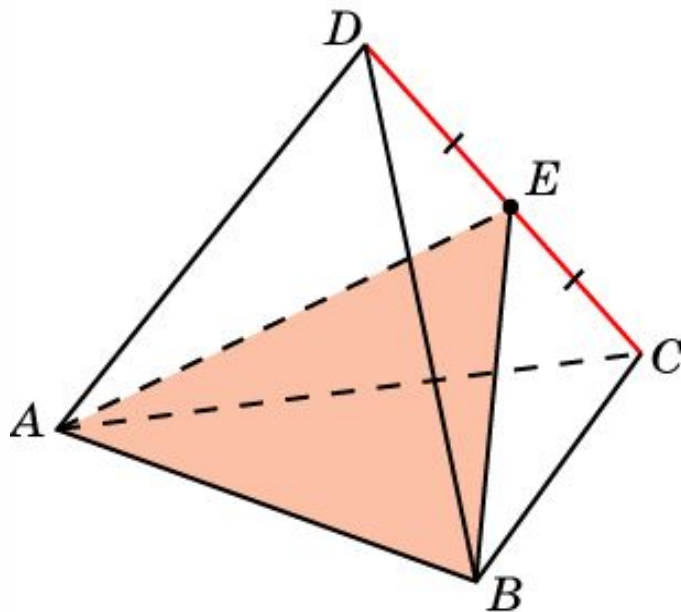
Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.





Упражнение 1

Докажите, что плоскость, проходящая через ребро AB правильного тетраэдра $ABCD$ и точку E – середину ребра CD , перпендикулярна ребру CD .

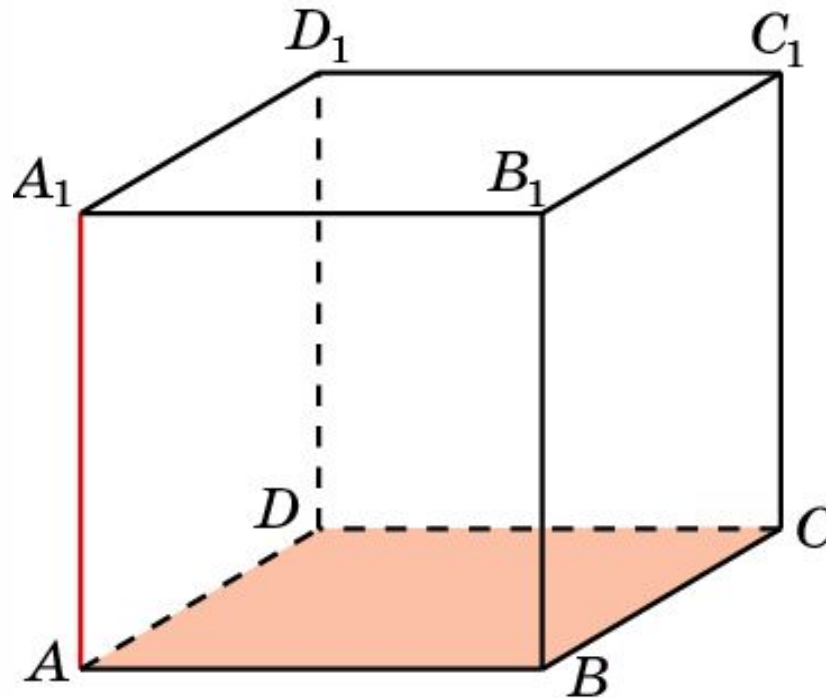


Доказательство: Прямая CD перпендикулярна прямым AE и BE . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABE .



Упражнение 2

Докажите, что прямая AA_1 , проходящая через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости ABC .



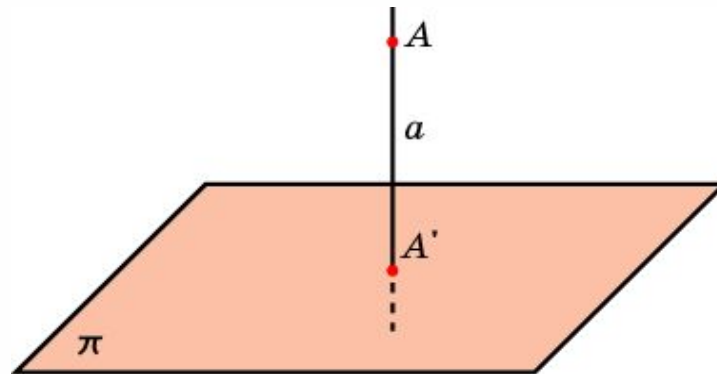
Доказательство. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC .



ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть дана плоскость π и точка A пространства. Через точку A проведем прямую a , перпендикулярную плоскости π . Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим A' . Она называется **ортогональной проекцией** точки A на плоскость π .

Отрезок AA' называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость π .

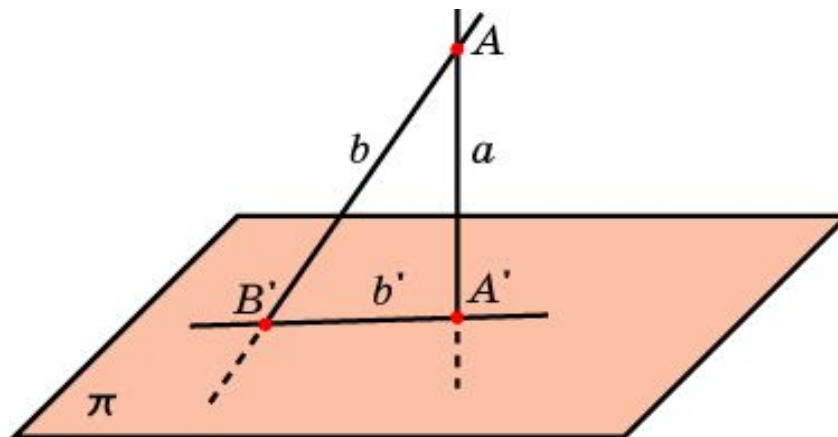




ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

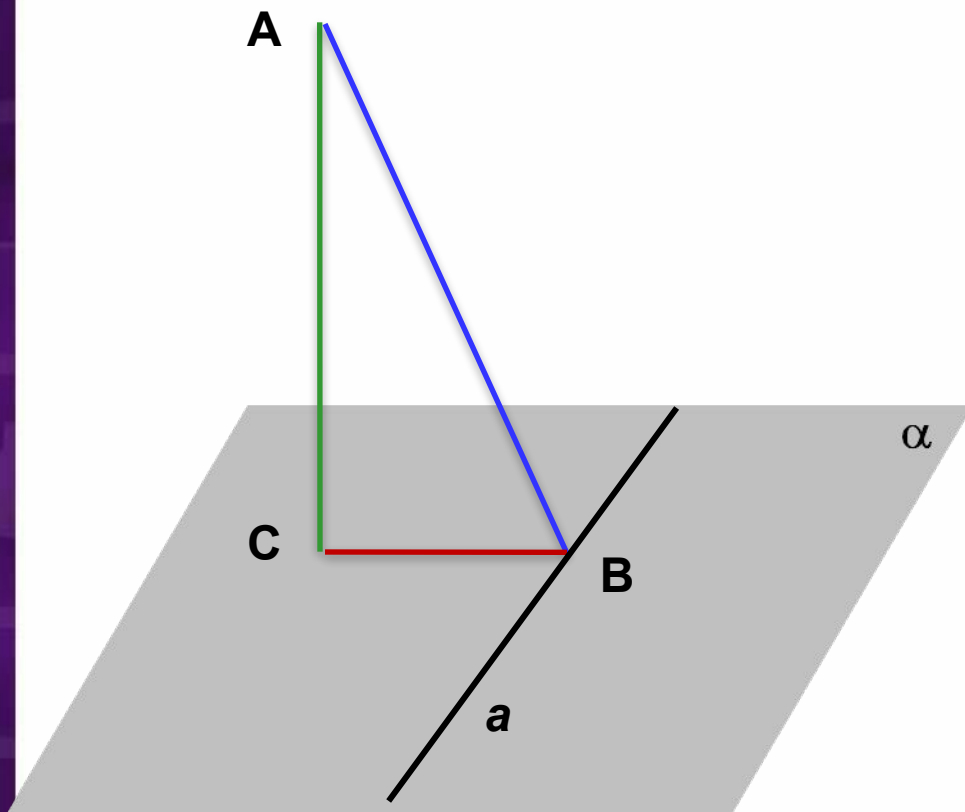
Соответствие, при котором точке A пространства сопоставляется ортогональная проекция A' , называется **ортогональным проектированием** на плоскость π .





ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и к самой наклонной



Дано:

α
 $AC \perp \alpha; C \in \alpha$

AB - наклонная

BC - проекция

$a \subset \alpha$

$a \perp$

BC

Доказать:

$a \perp$

AB

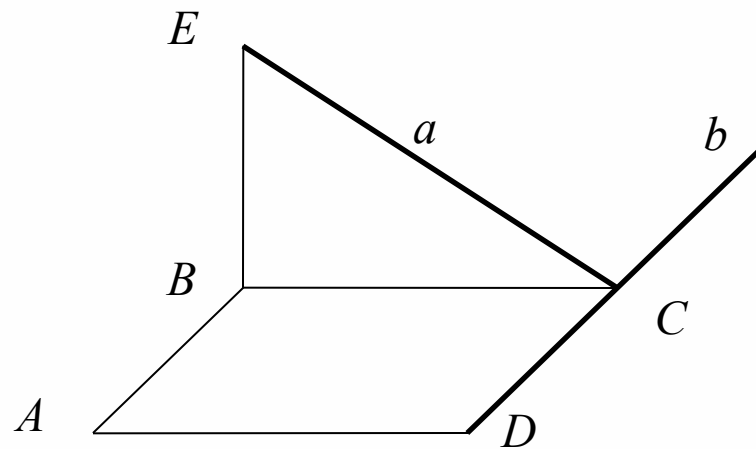


Упражнение 3

Установить взаимное положение прямых a и b по готовым чертежам

Задача 1. ABCD – квадрат

$BE \perp ABCD$

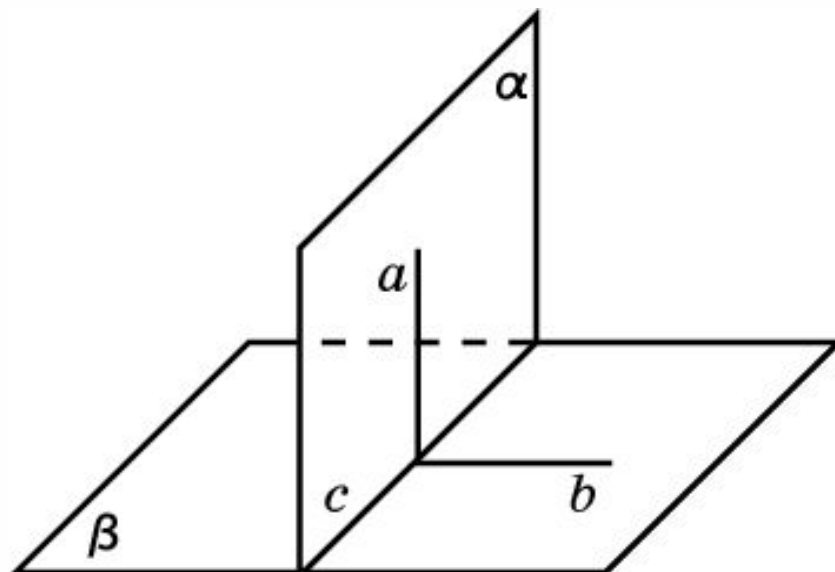




ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

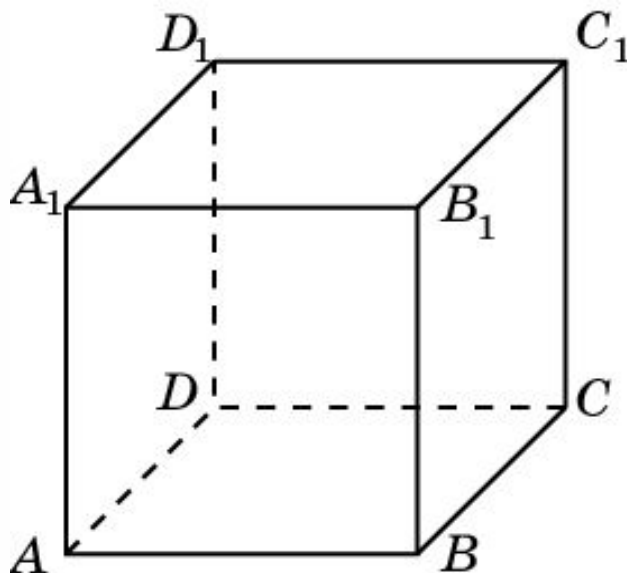
Теорема. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.





Упражнение 4

В кубе $A...D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, перпендикулярные плоскости: а) ABC ; б) $B_1C_1D_1$.



Ответ: а) ABB_1 , BCC_1 , CDD_1 , ADD_1 , ACC_1 , BDD_1 ;

б) ABB_1 , CDD_1 , AB_1C_1 .



ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

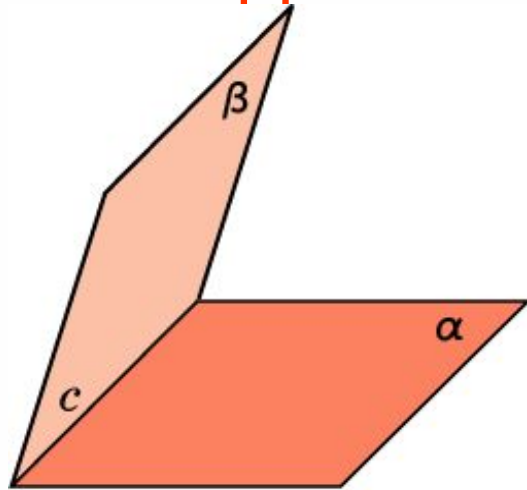


Рис. 1

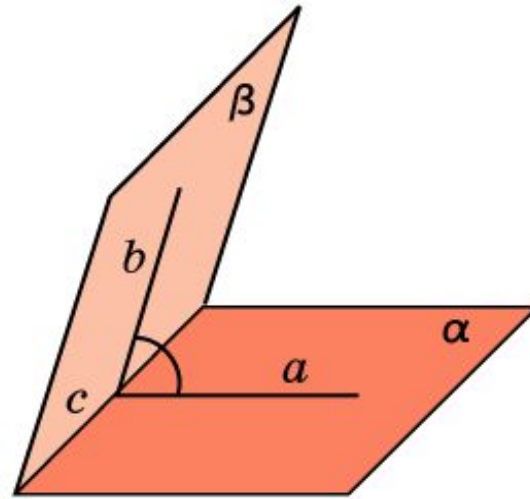


Рис. 2

Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованная двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

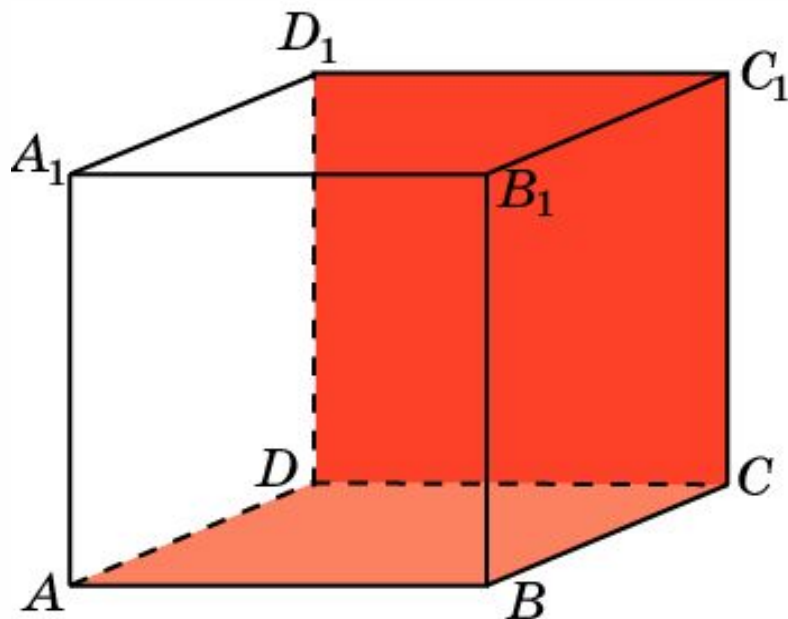
Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.



Упражнение 5

В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1 .

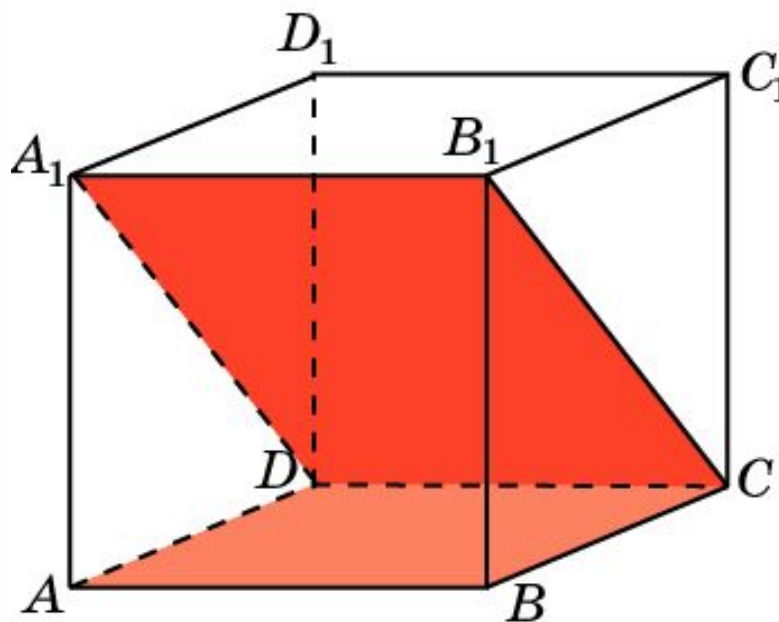


Ответ: 90° .



Упражнение 6

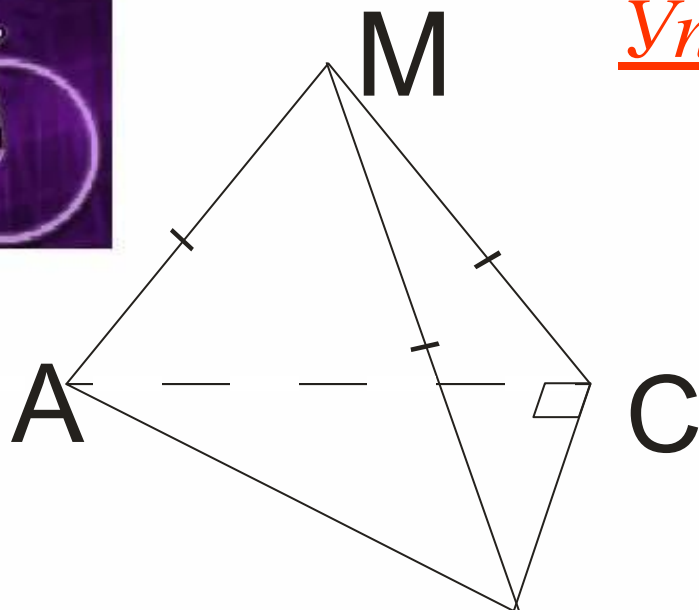
В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1 .



Ответ: 45° .



Упражнение 7

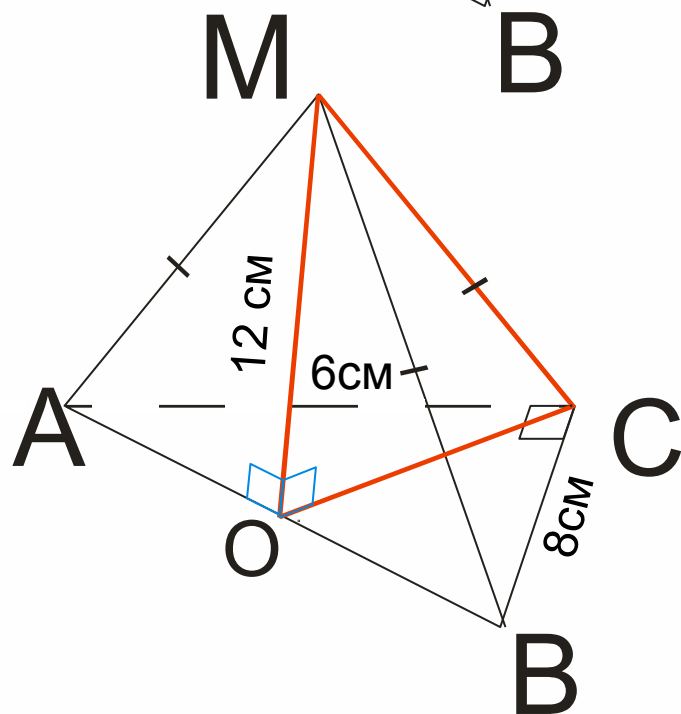


Дано : $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$, $M \notin (ABC)$

$AM = MC = MB$, $AC = 6\text{ см}$, $BC = 8\text{ см}$

MO – расстояние от точки M до (ABC)

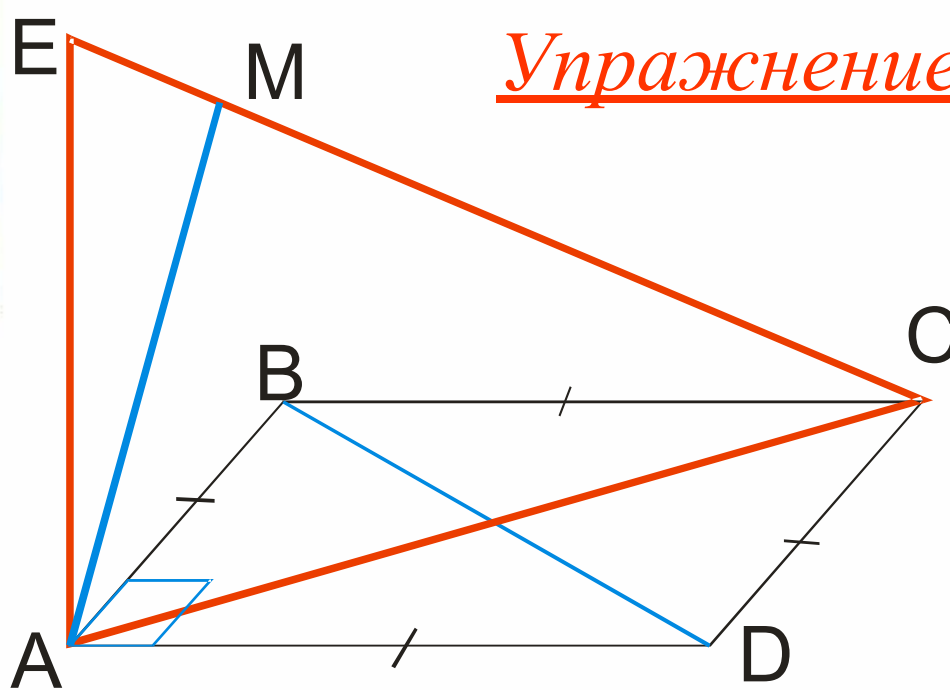
$MO = 12\text{ см}$.



Найти : расстояние от точки M до вершины B



Упражнение 8



$ABCD$ – квадрат

$AE \perp (ABC)$

$M \in EC$

Найти угол между
рямыми BD и AM

Решение :

$AC \perp BD$ по свойству диагоналей квадрата.

$AE \perp (ABC)$ – по усл.
 $BD \subset (ABC)$ } $\Rightarrow AE \perp BD$ (по опр.).

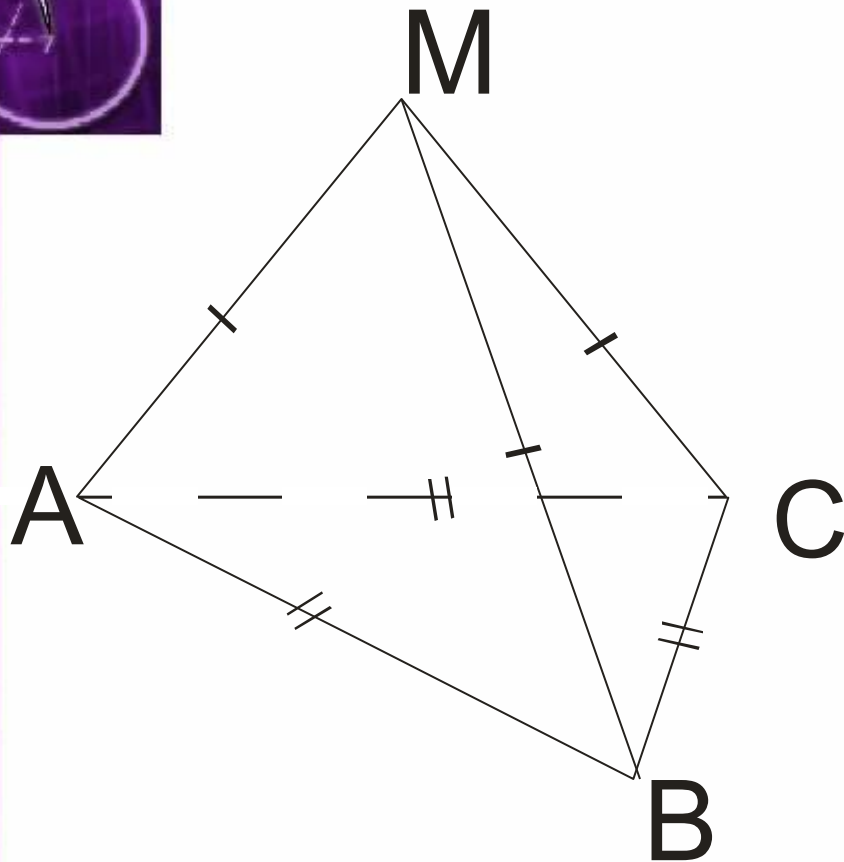
$AC \cap AE$ и лежат в одной плоскости

следовательно по признаку перпендикулярности

прямой и плоскости, $\left. \begin{array}{l} BD \perp (AEC) \\ AM \subset (AEC) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp AM,$

а значит, угол между BD и AM равен 90° .

Упражнение 9

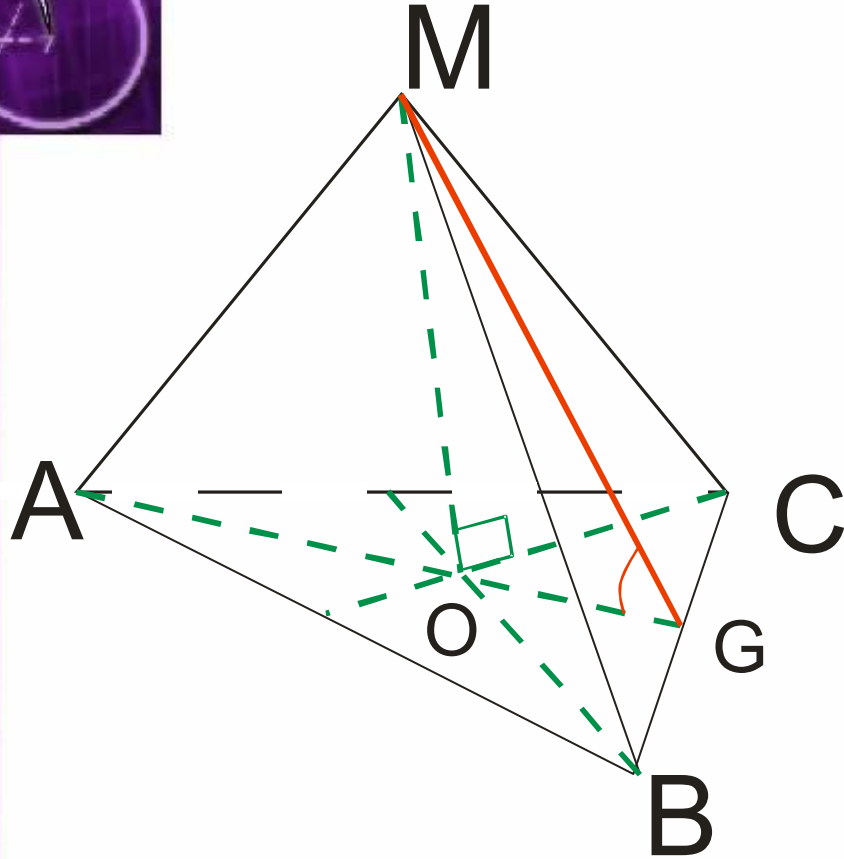


Точка M равноудалена от всех вершин правильного треугольника ABC , сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 2 см.

- 1) Докажите, что $(AMO) \perp (BMC)$, где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC .
- 2) Найдите угол между (BMC) и (ABC)
- 3) Найдите угол между прямой MC и плоскостью ABC .



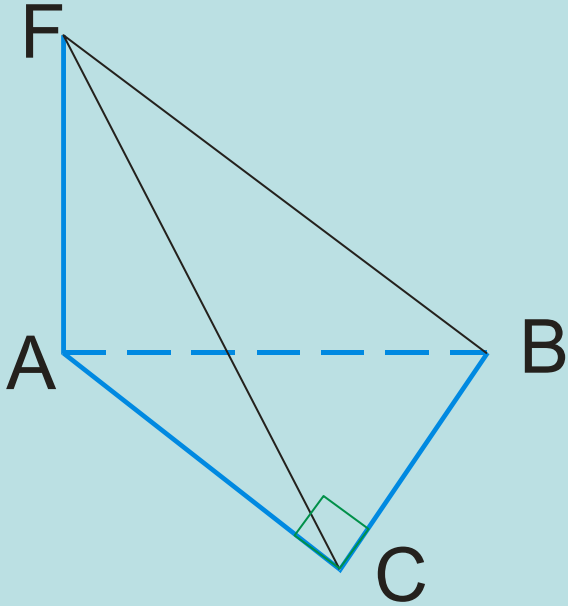
Упражнение 10



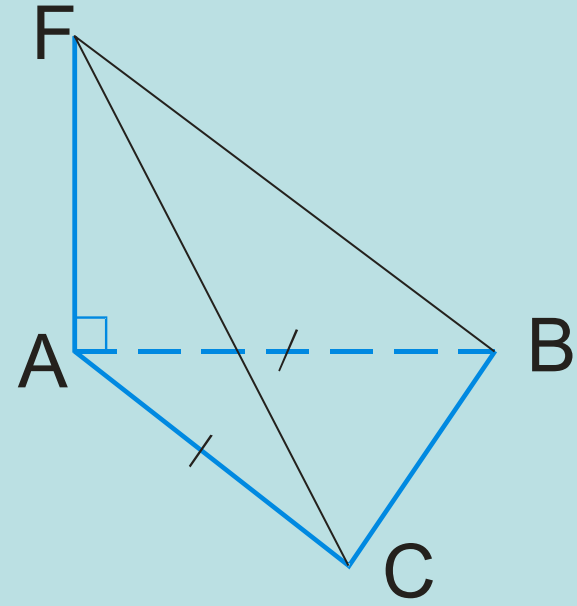
Дано : ΔABC – правильный
 $M \notin (ABC)$, $AM = CM = BM$
 $AB = 4\text{ см}$, MO – расстояние
от точки M до (ABC) ,
 $MO = 2\text{ см}$.

Доказать :

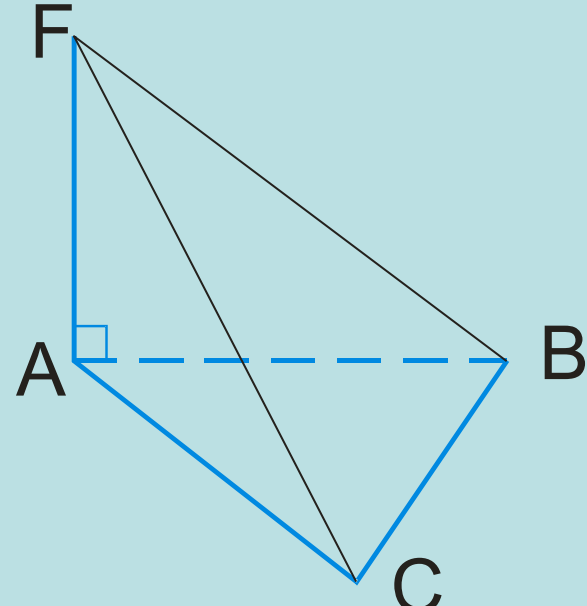
1. $(AMO) \perp (BMC)$
2. Найти угол между (BMC) и (ABC)
3. Найти угол между MC и (ABC)



Дано: $AF \perp (ABC)$
 ΔABC – прямоугольный
 $\angle C = 90^\circ$
 Найти: угол между
 (ABC) и (FCB)



Дано: $AF \perp (ABC)$
 ΔABC – равнобедренный
 $AB = AC$
 Найти: угол между
 (ABC) и (FCB)



Дано: $AF \perp (ABC)$
 ΔABC – тупоугольный
 $\angle C$ – тупой
 Найти: угол между
 (ABC) и (FCB)