Бинарные отношения

ЛЕКЦИЯ 3

8 ФУНКЦИЯ

Определение

Бинарное отношение *f* определенное на паре не пустых множеств **A** и **B**, называется ***функцией***, *определенной на множестве A со значениями в B (или отображением из A в B),* если ***для любого элемента x ∈ A*** существует ***один и только один элемент y ∈ B,*** удовлетворяющий условию ***x f y.***

Другими словами, отношение *f*, заданное на паре непустых множеств A и B, является функцией из **A** в **B**, если ***из того, что***

$(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$.

Определение

Функция (отображение) *F:* X →Y называется ***инъекцией*** (или ***инъективным***), если различным элементам из множества X соответствуют различные элементы из множества Y при отображении *F:* X → Y, т.е. если для любых x_1 и x_2 из X выполняется следующее условие:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2).$$

Другое название *инъективного отображения* *F:* X →Y — ***взаимно однозначное отображение*** из X **в** Y.

Определение

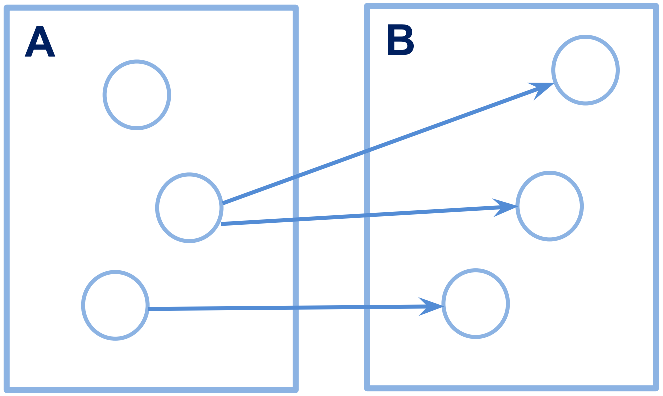
- Функция F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называется ***сюръективной*** (или *сюръекцией*), если каждый элемент множества $\mathbf{Y}$ является образом хотя бы одного элемента из $\mathbf{X}$ при отображении F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ (или: если каждый элемент множества $\mathbf{Y}$ имеет хотя бы один прообраз в множестве $\mathbf{X}$ при отображении F).
- Иными словами, отображение F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называется *сюръективным*, если образ $F(\mathbf{X})$ множества $\mathbf{X}$ при отображении F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ совпадает с $\mathbf{Y}$, т.е. $F(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$.
- Другое название сюръективного отображения F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ — *отображение множества* $\mathbf{X}$ ***на*** *множество* $\mathbf{Y}$.

Определение

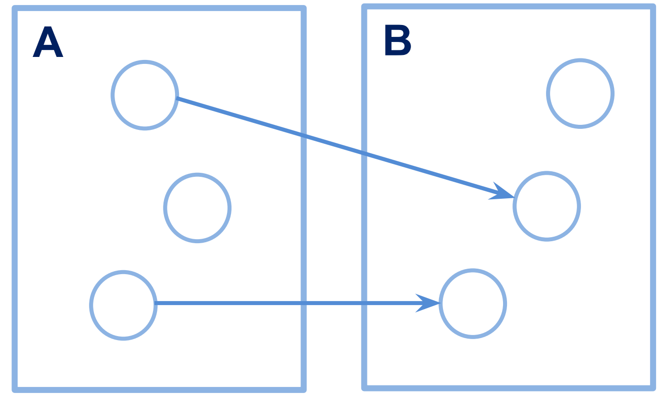
Функция F: **X** $\to$ **Y** называется ***биективной*** (или *биекцией*), если она одновременно и инъективна, и сюръективна.

Другое название биективного отображения

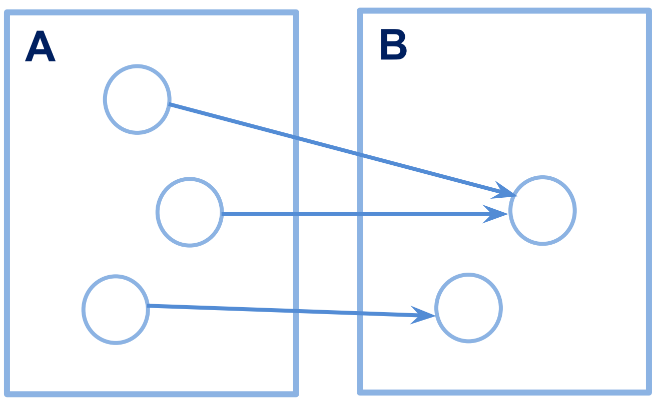
F: **X** $\to$ **Y** — *взаимно однозначное отображение множества* ***X на*** *множество* **Y**.



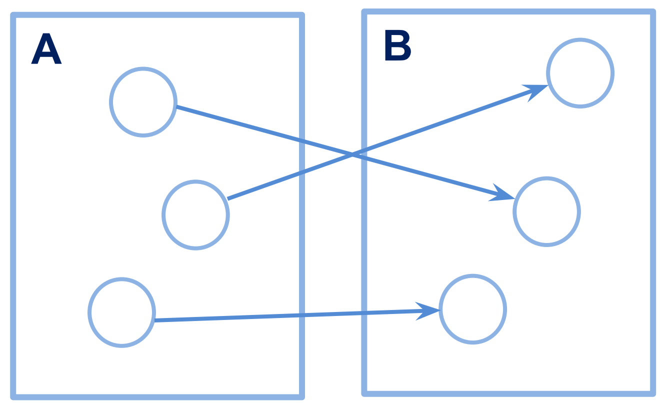
а) не функция



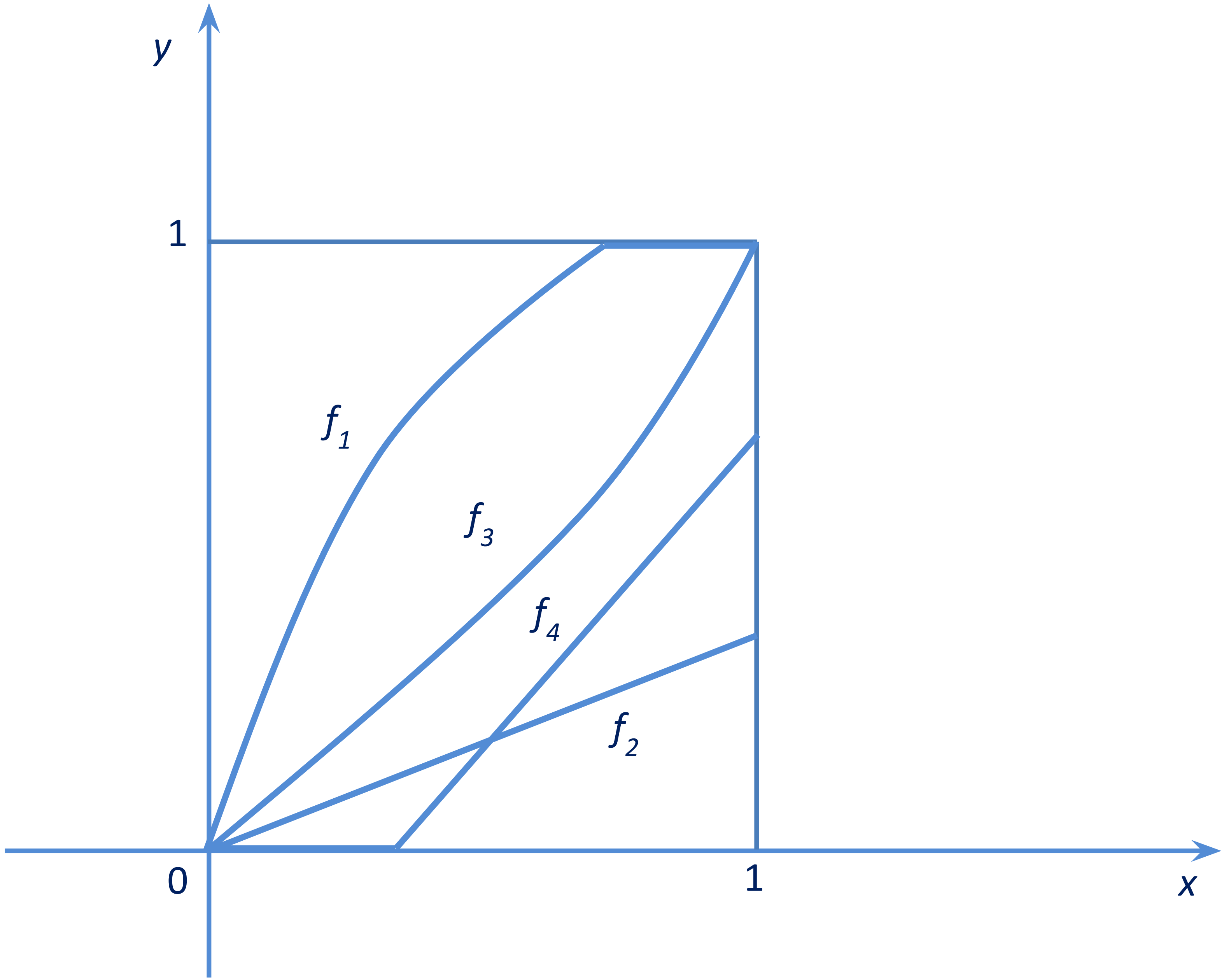
б) инъекция, но не сюрьекция



в) сюрьекция, но не инъекция



г) биекция


y
1
f_1
f_3
f_4
f_2
0
1
x

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Определение

Бинарное отношение α, определенное на множестве **A**, называется ***отношением эквивалентности*** или просто *эквивалентностью* на множестве **A**, если α:

- ***рефлексивно,***
- ***симметрично,***
- ***транзитивно.***

Определение

Пусть Р – бинарное отношение на множестве А: $P \subseteq A^2$. Отношение Р называется:

1. ***рефлексивным***, если $(x,x) \in P$ для всех $x \in A$.
2. ***симметричным***, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in P$ следует $(y, x) \in P$, т.е. $P^{-1} = P$.
3. ***антисимметричным***, если из $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует $x = y$, т.е. $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$.
4. ***транзитивным,*** если из $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует $(x, z) \in P$, т.е. $P \circ P \subseteq P$.

Отметим, что антисимметричность не совпадает с несимметричностью.

Примеры отношений эквивалентности:

- отношение ***подобия*** в множестве треугольников в евклидовой плоскости;
- отношение ***равенства*** в произвольной системе множеств;
- отношение ***равночисленности***, т.е. иметь одинаковое число элементов, в системе конечных множеств;
- отношение ***равносильности*** в множестве формул логики высказываний;
- отношение ***«учиться в одной группе»*** в множестве студентов факультета кибернетики;

Пусть σ — отношение эквивалентности на множестве **A**.

Определение

- Множество всех таких элементов *x*, что $x\sigma a$ истинно, называют ***смежным классом множества* A** *по эквивалентности σ*, или ***классом эквивалентности***, и обозначают $[a]_\sigma$.

Теорема

Свойство 1: $a \in [a]$

Свойство 2: если $a\sigma b$, то $[a] = [b]$.

Лемма

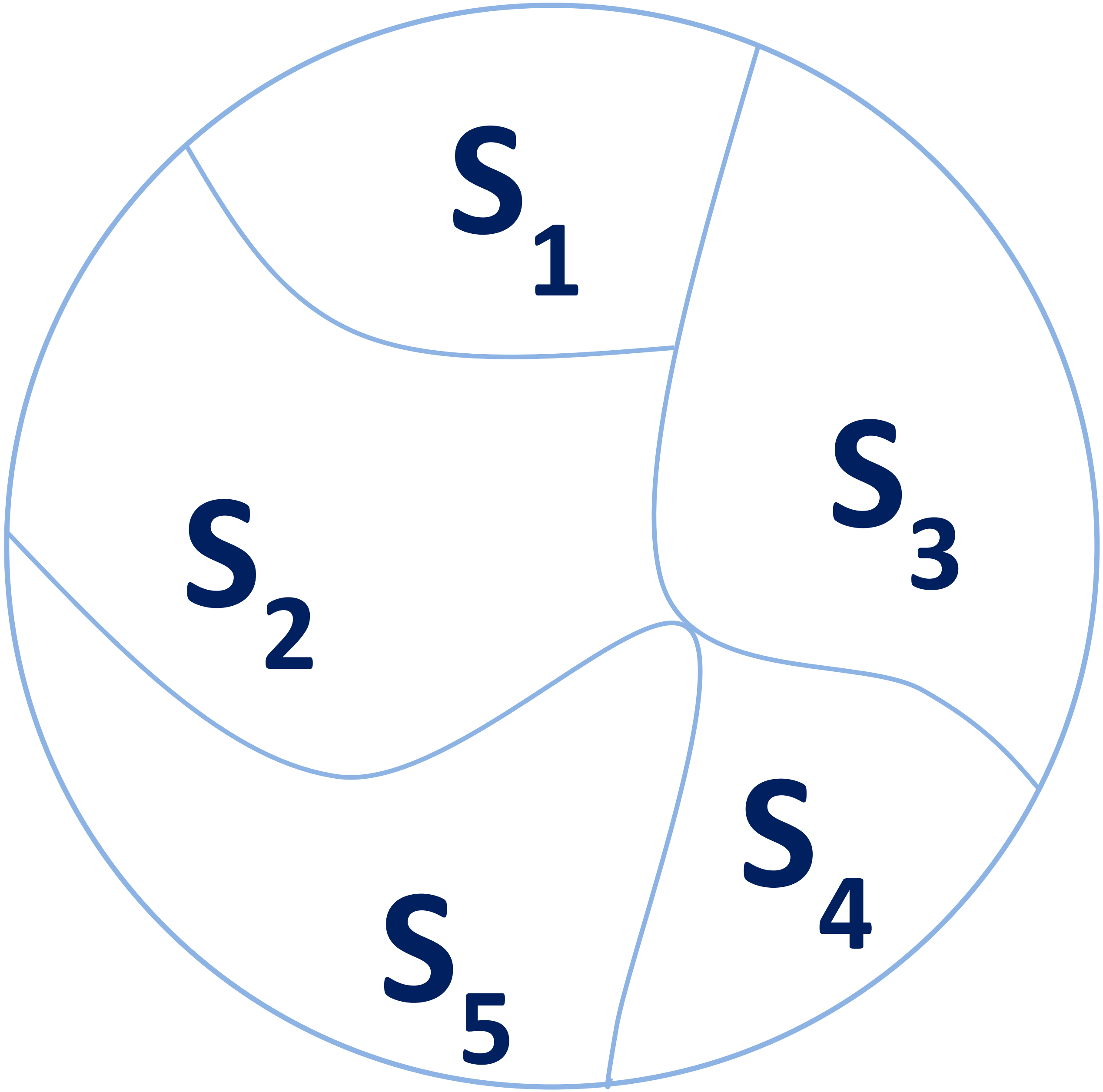
Любые два смежных класса множества **A** по эквивалентности σ либо не пересекаются, либо совпадают.

Определение

Совокупность всех различных смежных классов множества **A** по эквивалентности σ называется *фактор-множеством множества* **A** по эквивалентности σ и обозначается **A**/σ.

Определение

Разбиением (или *расслоением)* множества **A** называется система *S* непустых подмножеств множества **A** таких, что каждый элемент из **A** принадлежит одному и только одному подмножеству из системы *S*.


S_1
S_2
S_3
S_4
S_5

Теорема

Если σ — отношение эквивалентности на множестве **А**, то совокупность всех различных смежных классов множества **А** по эквивалентности σ является разбиением

Теорема

Пусть *S* — разбиение множества **А**, а σ — бинарное отношение на множестве **А** такое, что, по определению, *xσy* истинно тогда и только тогда, когда в *S* есть подмножество **М**, которое совпадает с каким-либо классом эквивалентности отношения σ.

Тогда σ — отношение эквивалентности на множестве **А**. Эта эквивалентность σ

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Определение

Бинарное отношение ρ, определенное на множестве **A**, называется ***частичным порядком,*** или ***отношением частичного порядка***, если оно:

1) рефлексивно;

2) транзитивно;

3) антисимметрично.

Множество **A**, на котором задан какой-нибудь частичный порядок, называется *частично упорядоченным*.

Определение

Бинарное отношение ρ, определенное на множестве **A**, называется ***частичным порядком***, или ***отношением частичного порядка***, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $x\rho x$ для любого (рефлексивность);
2) из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$ для любых (транзитивность);
3) из $x\rho y$ и $y\rho x$ следует $x = y$ для любых (антисимметричность).

Множество **A**, на котором задан какой-нибудь частичный порядок, называется *частично упорядоченным*.

Примеры:

- отношение включения на множестве подмножеств некоторого множества;
- отношение $\leq$ на множестве действительных чисел;
- отношение «x делит y» на множестве натуральных чисел.

Частичный порядок на множестве **A** будем обозначать символом **≤**,

и если a **≤** b для некоторых элементов a , b то будем говорить, что a меньше или равно b, а также, что a содержится в b или равно b. Если a **≤** b и $a \neq b$, то будем писать $a < b$ и говорить, что a строго меньше b или a строго содержится в b.

Определение

Элементы a, b множества **A** называются ***сравнимыми*** относительно частичного порядка $\leq$ на этом множестве, если ***$a \leq b$ или $b \leq a$.***

Определение

Пусть **A** — частично упорядоченное множество с частичным порядком $\leq$.

- Элемент x называется *наименьшим элементом*, если $x \leq a$ для любого a.
- Элемент x называется *наибольшим элементом*, если $b \leq x$ для любого b.
- Наибольший элемент часто называют единицей, а наименьший — нулем.

Частично упорядоченное множество может обладать или не обладать наименьшим или наибольшим элементом.

Примеры:

- Множество действительных чисел с обычным отношением $\leq$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.
- Множество неотрицательных действительных чисел имеет наименьший элемент (число 0), но не имеет наибольшего элемента.

3.Множество неотрицательных целых чисел с отношением делимости в качестве отношения частичного порядка (т.е. $m \leq n$ тогда и только тогда, когда m делит n) имеет наименьший элемент (число 1) и наибольший элемент (число 0).

Однако если частично упорядоченное множество обладает наибольшим (наименьшим) элементом, то он единственный.

Определение

Максимальным элементом частично упорядоченного множества **A** называется такой элемент, что каждый элемент *x* из **A** либо не сравним с *a*, либо $x \leq a$, т.е. другими словами, если **A** не содержит элементов, строго больших *a*. *Минимальным элементом* частично упорядоченного множества **A** называется такой элемент , что каждый элемент *x* из **A** либо не сравним с *b*, либо $b \leq x$, т.е. если **A** не содержит элементов, строго меньших *b*.

В отличие от наибольшего (наименьшего) элемента частично упорядоченное множество может содержать несколько максимальных (минимальных) элементов.

Так, например, в множестве целых положительных чисел, отличных от 1, с отношением делимости в качестве отношения частичного порядка (т.е. $m \leq n$ тогда и только тогда, когда m делит n) минимальными элементами являются простые числа.

Лемма

Всякий наибольший элемент частично упорядоченного множества является **максимальным**, а всякий наименьший — **минимальным**.

Обратное, вообще говоря, не имеет места. Действительно, предыдущий пример показывает, что в множестве целых положительных чисел, отличных от 1, с отношением делимости минимальными элементами являются простые числа, а наименьшего элемента нет.

Определение

- Частичный порядок на множестве **A** называется *линейным порядком*, если любые два элемента из **A** сравнимы относительно **≤**.
- Множество **A**, на котором задан какой-либо линейный порядок, называется *линейно упорядоченным множеством*, или *цепью*.

Примером линейно упорядоченного множества может служить множество всех действительных чисел с обычным отношением **≤**.

Определение

Если всякое непустое подмножество линейно упорядоченного множества **A** является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальные элементы, то множество **A** называется *вполне упорядоченным множеством*.

Примеры:

- Вполне упорядоченными множествами являются конечное линейно упорядоченное множество и множество натуральных чисел, упорядоченное естественным образом.

- Множество всех целых чисел относительно естественного порядка не будет вполне упорядоченным, так как оно не имеет наименьшего элемента.
- Однако оно станет вполне упорядоченным, если установить порядок следующим образом: $1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < -3 < \ldots$.
- Другим примером не вполне упорядоченной цепи служит отрезок [0, 1], ибо, например, интервал]1/2, 1[не содержит минимального элемента.

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Понятие мощности возникает при сравнении множеств по числу элементов.

Определение

Множество X назовем *равномощным множеству* Y (символически: **X ~ Y**), если существует биективное отображение X в Y.

Отношение равномощности множеств удовлетворяет следующим условиям:

1. рефлексивности: $X \sim X$;
2. симметричности: если $X \sim Y$, то $Y \sim X$;
3. транзитивности: если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$,

т. е. оно является отношением эквивалентности.

Определение

Мощностью множества X называется класс всех множеств, равномощных множеству X.

- Если A ~ $\{a_1,\ldots,a_n\}$ для некоторого n = 1,2,…, т. е. A имеет ровно n элементов, то множество A называется конечным.
- В таком случае пишут: $|A| = n$. Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов.

- Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***.
- Если $A \sim N$, т.е. если множество равномощно множеству натуральных чисел, то множество A называется ***счетным.***
- Множество Q рациональных чисел счетно.
- Если $A \sim 2^N$, т.е. если множество равномощно множеству действительных чисел, то множество A называется ***континуальным*** или ***континуумом.***

- На мощность множества A можно смотреть и как на новый объект, называемый ***кардинальным числом или кардиналом***.
- В качестве примеров кардиналов можно взять любое натуральное число n, а также N, 2^N, и т. д.
- Эти числа можно рассматривать как имена, обозначающие соответствующие мощности.

Теорема ***(основная теорема о конечных множествах)***

Конечное множество не может быть равномощно никакому собственному подмножеству.

Однако эта теорема не применима к бесконечным множествам.

Множество точек любого интервала из множества действительных чисел R равномощно всему множеству действительных чисел R.

Например, множество точек интервала (0,1) равномощно R.