Стохастические процессы

$$S_{t+1}^{e} = M(S_t; \Omega_t) \quad (1)$$

$$S_t = S_{t-1} + \mathcal{E}_t \quad (2)$$

Основной процесс Винера

- $w(t; \Omega)$- процесс Винера.
- Свойства процесса Винера:

1) $w(0; \Omega)$= 0 с вероятностью 1.

2) Случайные величины $w(t_i; \Omega) - w(t_{i-1};\ \Omega)$ (приращения винеровского процесса) взаимонезависимы и распределены согласно нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $(t_i - t_{i-1})$.

3) Функция $w(t;\ \Omega)$ непрерывна по переменной t для всех Ω.

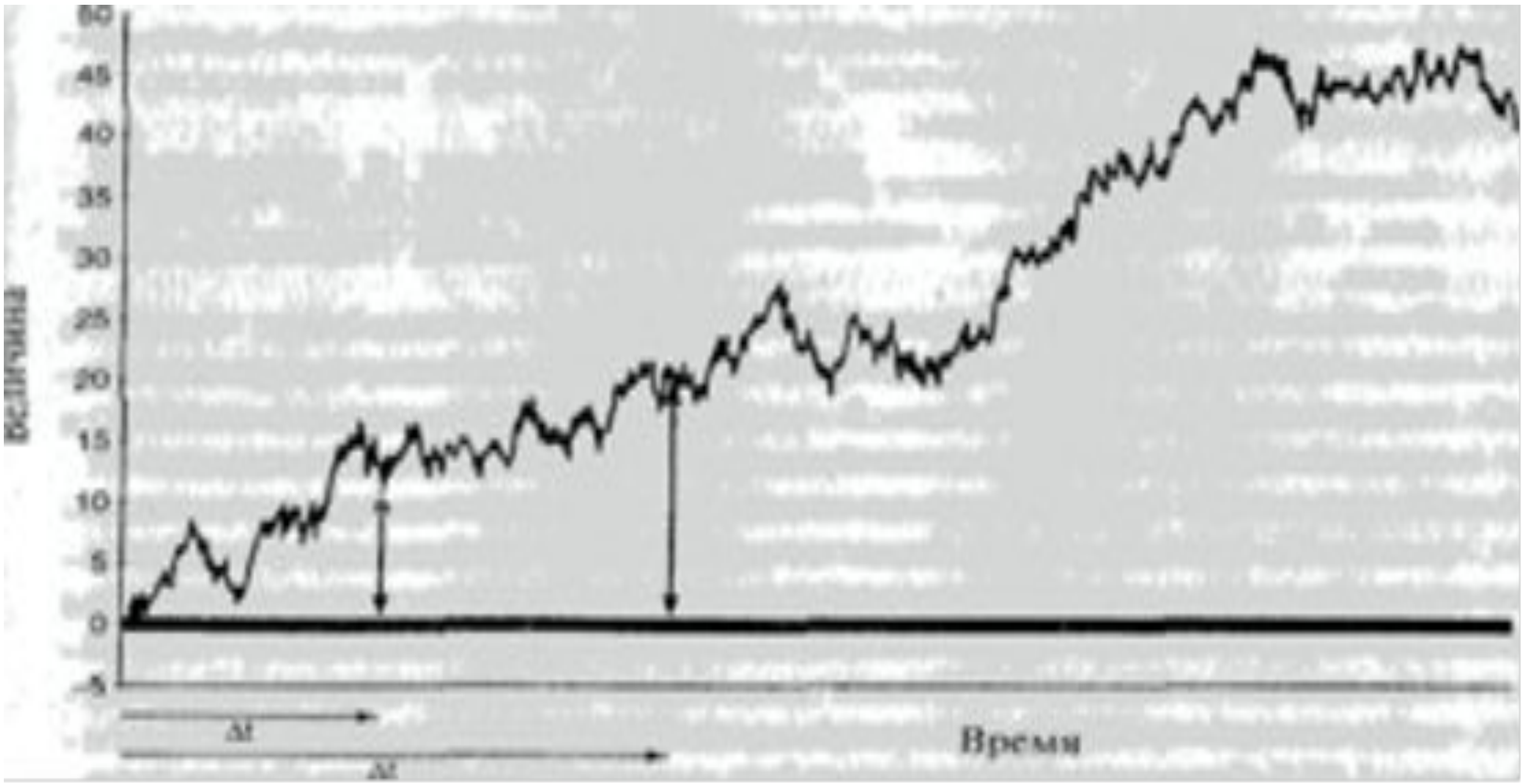
Основной процесс Винера

- Пусть S – рыночная цена фондового актива, а t - период времени. За малый промежуток времени Δt случайная переменная S изменится на ΔS. Если S следует процессу Винера, т.е. броуновскому движению, изменение S за малый промежуток времени будет связано с Δt следующим соотношением:

$$\Delta S = \mathcal{E} * \sqrt{\Delta t}$$ или

$$dS = \mathcal{E} * \sqrt{dt}$$

Основной процесс Винера



Обобщенный процесс Винера

- 1) Активы характеризуются различными степенями волатильности. В процессе же, описанном выше, волатильность всех активов была одинаковой.

$$dS = \sigma * \mathcal{E} * \sqrt{dt} \qquad (1).$$

2) Рисковые активы имеют положительное ожидаемое среднее значение дохода.

$$dS = \alpha * dt + \sigma * \mathcal{E} * \sqrt{dt} \qquad (2).$$

3) Абсолютные приращения цен фондовых активов ΔS зависят от величины S.

$$dS = \alpha * S * dt + \sigma * S * \mathcal{E} * \sqrt{dt} \quad (3).$$

Процесс Ито

- Процесс Ито - это обобщенный процесс Винера, в котором параметры α (ожидаемый доход) и σ^2 (дисперсия) являются функциями от основных переменных. В общем виде процесс Ито выглядит как:

$$dS = \alpha(S,t) * dt + \sigma(S,t) * \mathcal{E} * \sqrt{dt}$$

Лемма Ито

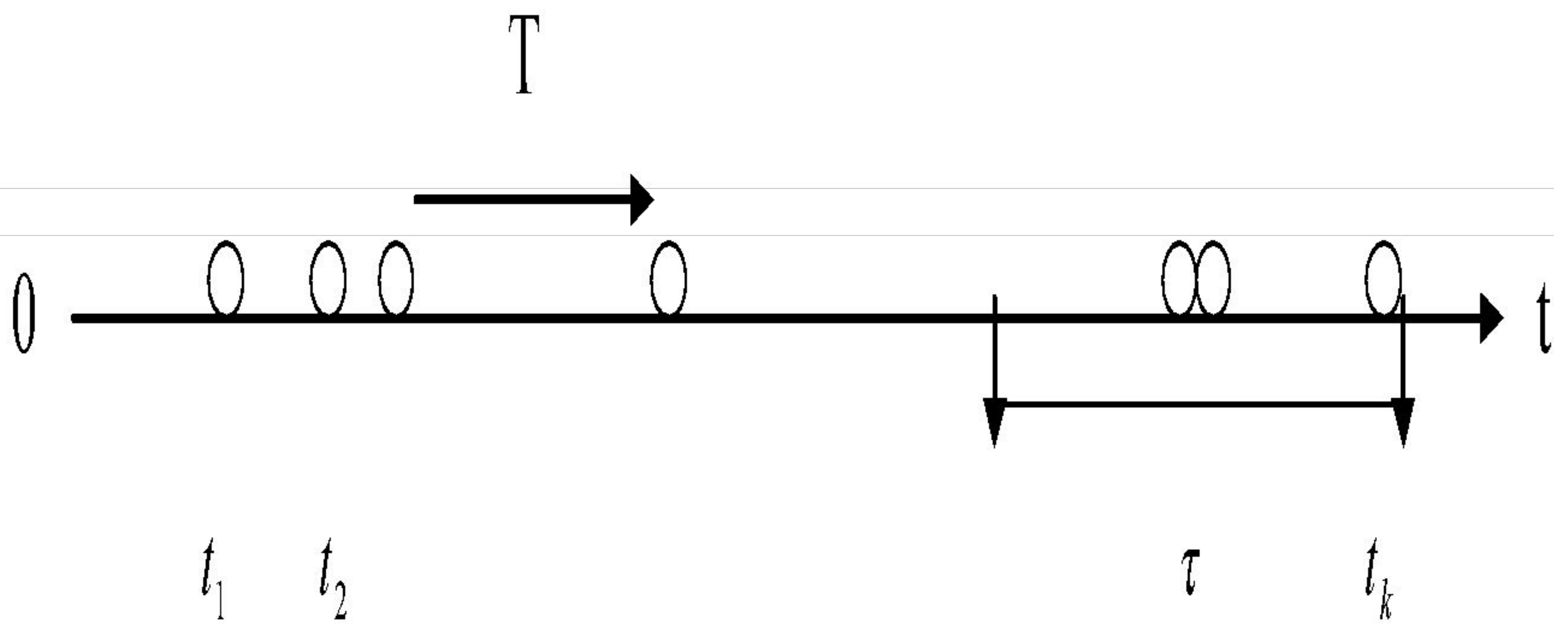
Если некоторая случайная переменная Z является функцией n процессов Ито:

$$Z = Z(t, S_1(t,\theta), S_2(t,\theta), \ldots\ldots, S_n(t,\theta))$$

то приращение процесса Z можно представить в виде:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 Z}{\partial S_i \partial S_j} dS_i dS_j$$

Теория массового обслуживания. Поток событий.



Стационарный пуассоновский поток

1. Поток событий называется *стационарным,* если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси 0t расположен этот участок.
2. Поток событий называется *потоком без последействия,* если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.
3. Поток событий называется *ординарным, если вероятность* попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Стационарный пуассоновский поток

- Выделим произвольный участок времени длиной τ. Как уже было отмечено, при условиях 1, 2 и 3 (стационарность, отсутствие последействия и ординарность) число точек, попадающих на участок τ, распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$\alpha = \lambda * \tau$$

где λ - плотность потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени). Вероятность того, что за время τ произойдет ровно *m* событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} * e^{-\lambda\tau}$$