Нормальный закон распределения

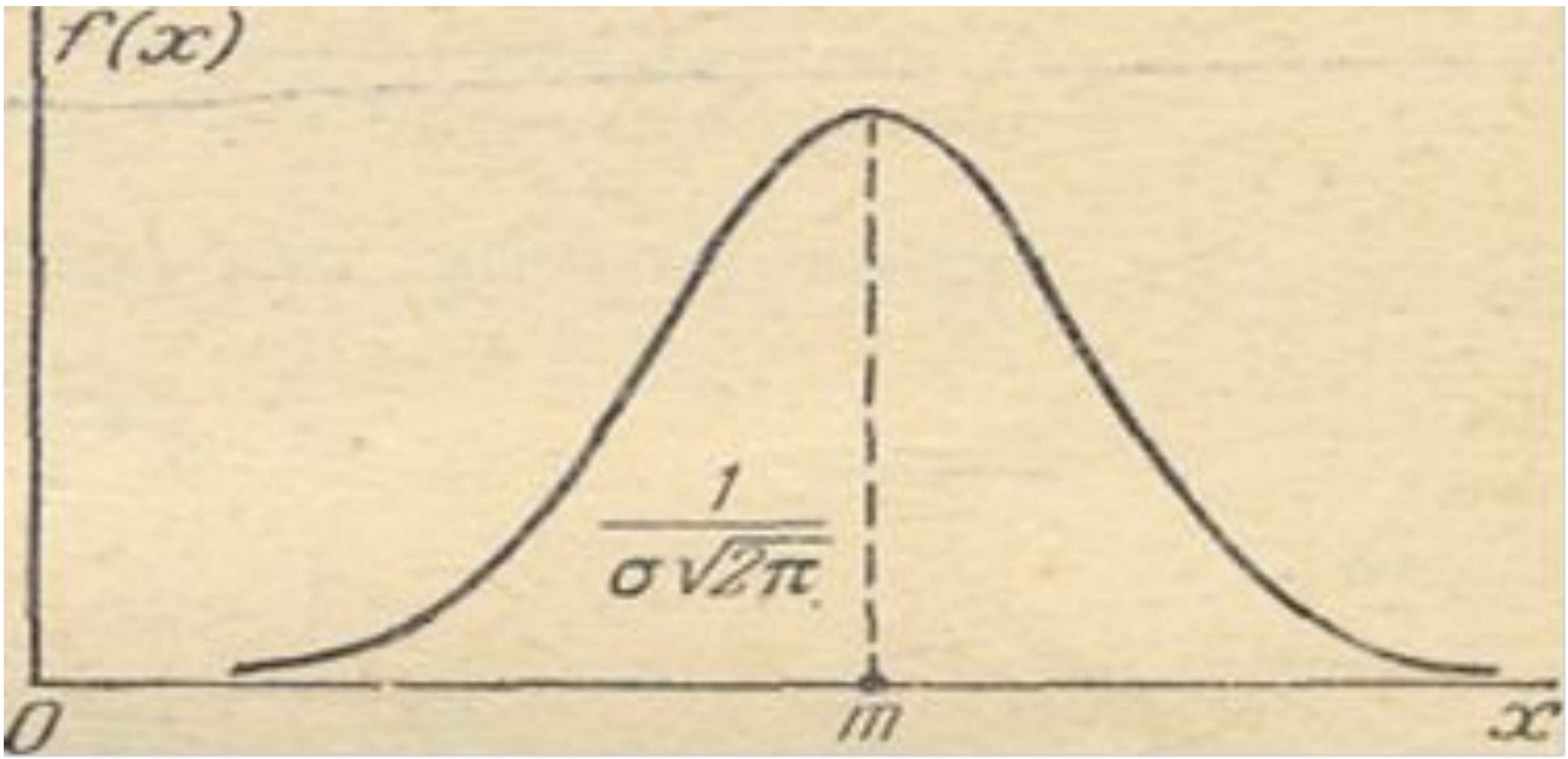
Нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса) играет исключительно важную роль в финансовых расчетах и занимает среди других законов распределения особое положение. Это - наиболее часто встречающийся в практике фондовой биржи закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Нормальный закон распределения

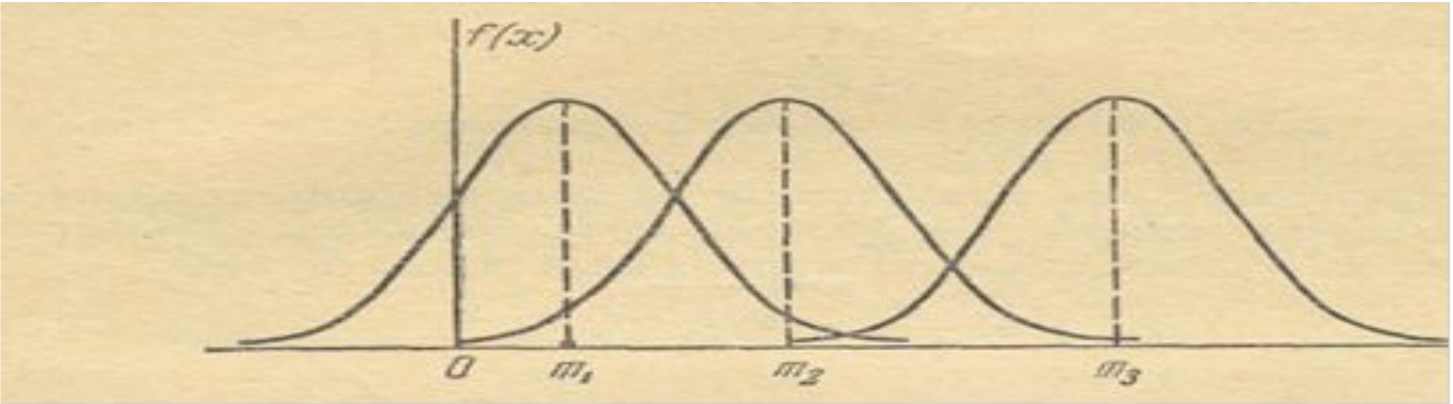
Можно доказать, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничений), приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Каким бы законам распределения ни были подчинены отдельные элементарные события, особенности этих распределений в сумме большого числа слагаемых нивелируются, и сумма оказывается подчиненной закону, близкому к нормальному.

Нормальный закон распределения

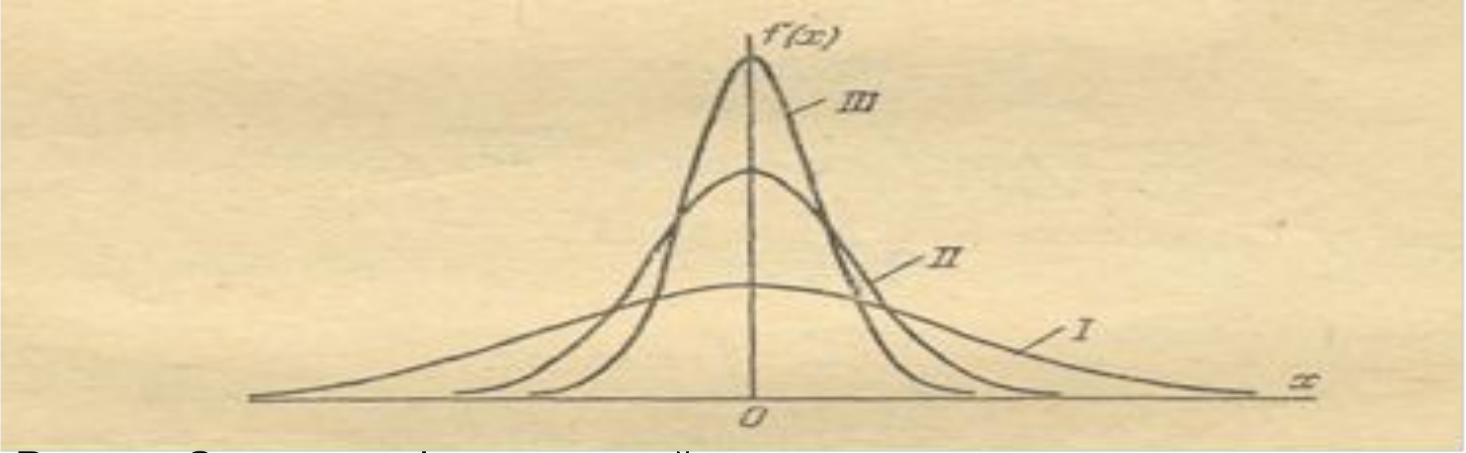
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Нормальный закон распределения



- Рис. 2.2. Смещение кривой нормального распределения при изменении центра рассеивания.



- Рис. 2.3. Смещение формы кривой нормального распределения при изменении .

Вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, на заданный участок.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, на заданный участок.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Как и всякая функция распределения, функция *Ф(х)* обладает свойствами:

1. Ф( ) = 0.
2. Ф( ) = 1.
3. Ф(х) - неубывающая функция.

Кроме того, из симметричности нормального распределения с параметрами m = 0, = 1 относительно начала координат следует, что

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Правило «трех сигма»

$P\,(m < X < m + \sigma\,)$ = Ф(1) - Ф(0) = 0.8413 – 0.5 = 0.341;

$P\,(m + \ < X < m + 2\sigma\,)$ = Ф(2) - Ф(1) = 0.136;

$P\,(m + 2\ < X < m + 3\sigma\,)$ = Ф(3) - Ф(2) = 0.012;

$P\,(m + 2\ < X < m + 4\sigma\,)$ = Ф(4) - Ф(3) = 0.001.

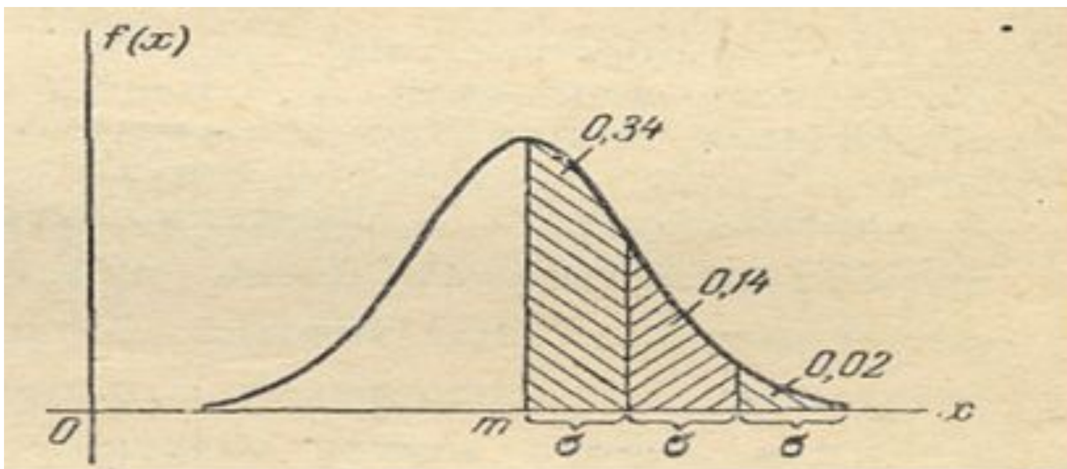


Рис. 2.5. Правило «трех сигма».

Правило «трех сигма»

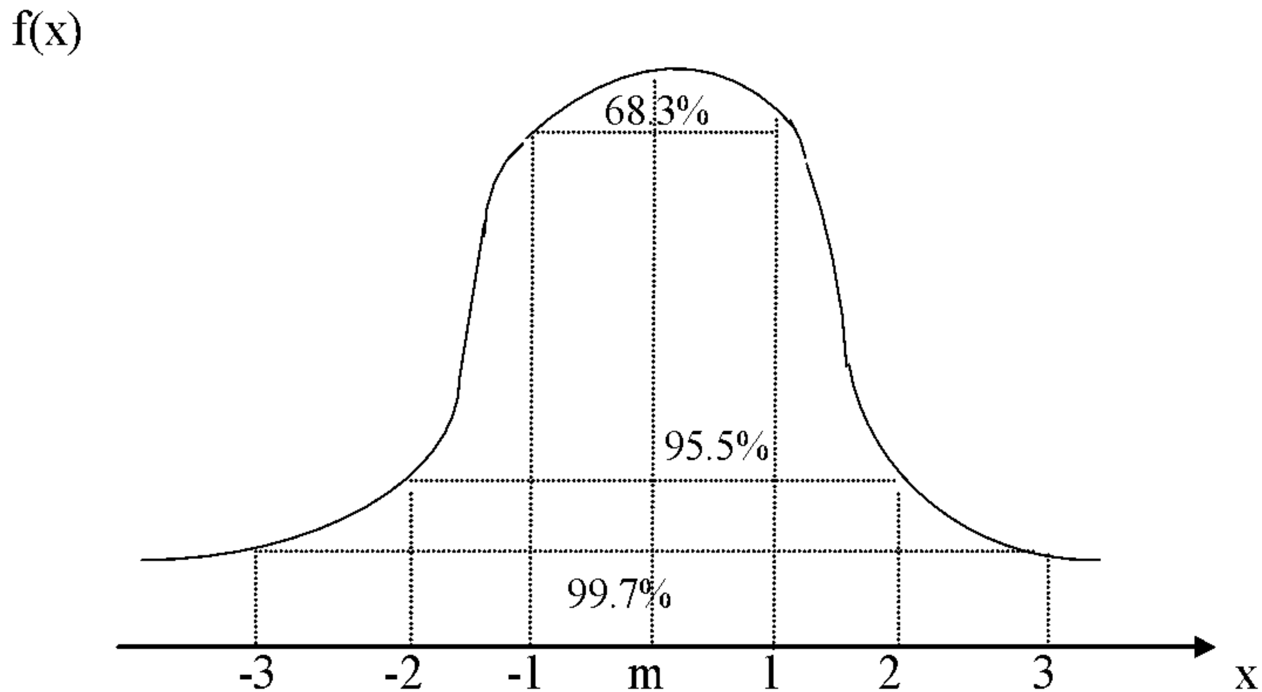


Рис. 2.6. Стандартное отклонение нормального распределения.

Распределение Пуассона

Во многих задачах практики фондового рынка приходится иметь дело со случайными величинами, распределенными по своеобразному закону; который называется за коном Пуассона.

Рассмотрим прерывную случайную величину X, которая может принимать только целые, неотрицательные значения: 0, 1, 2, ….m, …. причем последовательность этих значений теоретически не ограничена. Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение m, выражается

Распределение Пуассона.

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{a} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-a} e^{a} = 1$$

Распределение Пуассона.

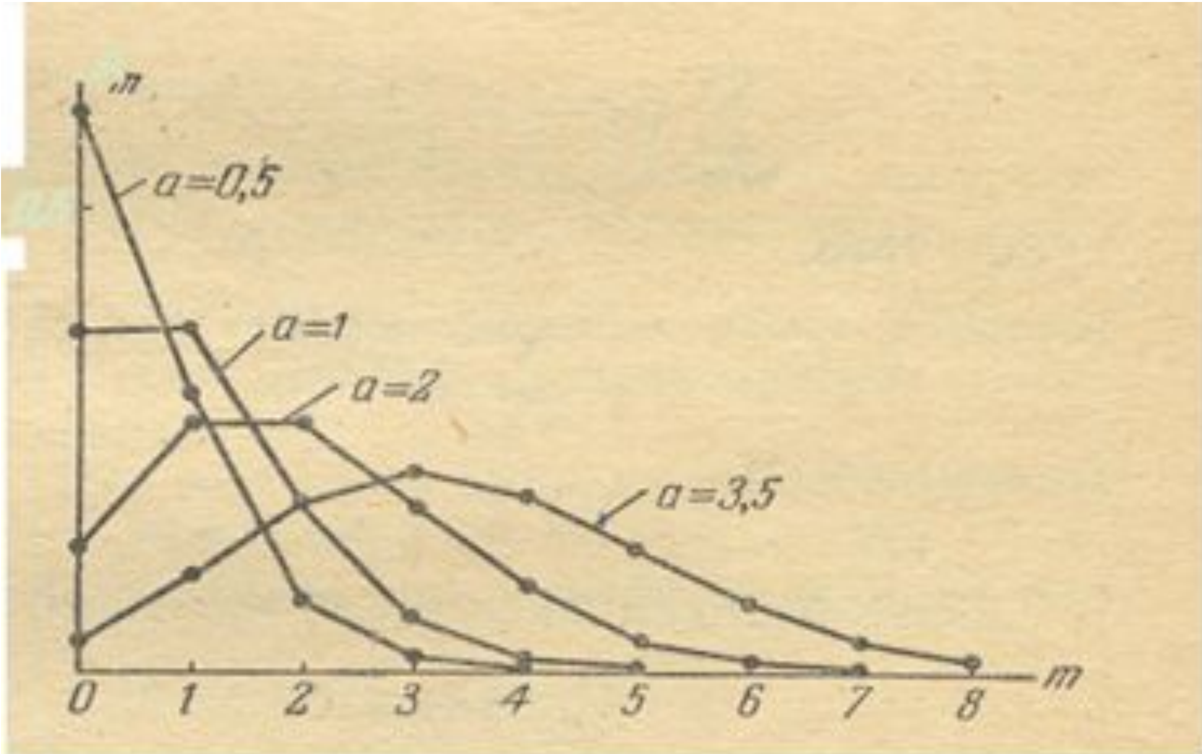


Рис. 2.7. Влияние параметра «а» на вероятность наступления события, распределенного по закону Пуассона.

Распределение Пуассона. (матожидание)

$$M[X]=\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot P_m=\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$$

$$M[X]=\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\cdot a^{m-1}}{m!}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$M[X]=ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=ae^{-a}e^{a}=a$$

Распределение Пуассона. (дисперсия)

$$\alpha_2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = a\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} = a\sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)+1] \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a}$$

$$\alpha_2 = a\left[\sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^{m-1}}{(m-1)} e^{-a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a}\right] = a\left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} + e^{-a} e^{a}\right] = a[a+1]$$

Далее, используя свойство дисперсии: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$$D(X) = a[a+1] - a^2 = a$$

Распределение Пуассона.

Таким образом, дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию.

Это свойство распределения Пуассона часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсию) случайной величины. Если их значе ния близки, то это может служить доводом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении; резкое различие этих характеристик, напротив, свидетельствует против гипотезы.

Логнормальное распределение

Пусть S(t) - цена этой ценной бумаги в момент времени t и $S(t+\Delta t)$ - цена в момент времени $t+\Delta t$, тогда относительное изменение цены по истечении периода Δt будет равно: $\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$.

Предположим, что каждое из таких отношений цен на протяжении короткого отрезка времени Δt

$\ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$ было случайной переменной, независимой и идентично распределенной. Тогда согласно центральной предельной теореме величины

Логнормальное распределение

Центральная предельная теорема гласит, что если мы рассматриваем большую случайную выборку, то средняя величина ее будет нормально распределена. Таким образом, когда мы разделяем период времени на большое число промежутков (больше 30), с чем мы имеем дело, когда рассматриваем время как непрерывное, то сумма натуральных логарифмов будет нормально распределена.

Логнормальное распределение

Переменная называется логнормально распределенной, если натуральный логарифм ее нормально распределен. Следовательно, если величина

$$\ln\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$$

нормально распределена, то величина

$$\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$$

должна быть распределена логнормально.

Логнормальное распределение.

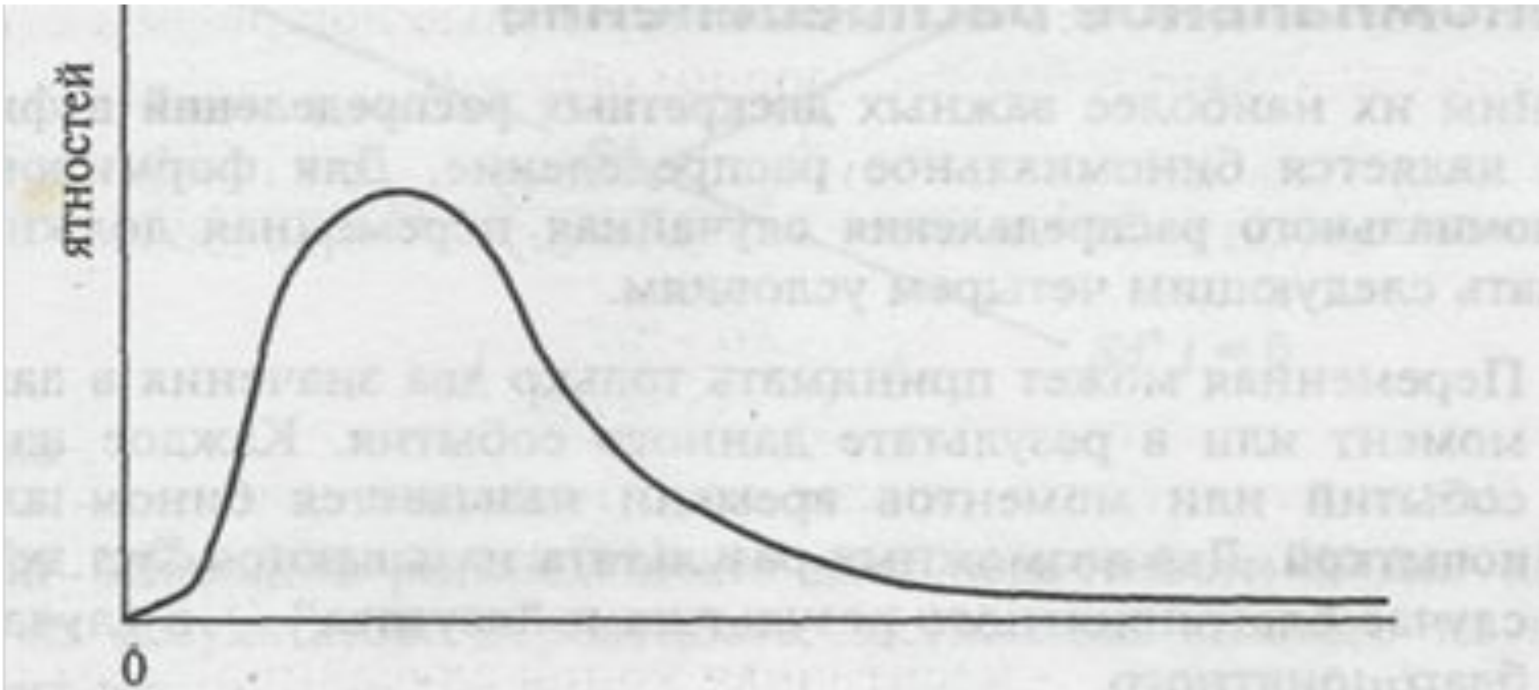


Рис. 2.8. Плотность вероятностей логнормального распределения.

Логнормальное распределение.

Это очень привлекательная модель распределения отношений цен ценных бумаг, потому что, если цена растет, то отношение цен будет больше единицы, если падает - то отношение цен будет меньше единицы, но оно никогда не принимает отрицательного значения.

На рисунке логнормальное распределение вытянуто вправо, но не имеет отрицательных значений. Это совместимо с возможным распределением цен ценных бумаг, поскольку они не могут упасть ниже нуля, и только очень немногие из наблюдений могли быть очень высоки.

Матрицы

Матрицей размера m на n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется вектором-строкой, а из одного столбца – матрицей-столбцом. Матрица называется квадратной n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица третьего порядка.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- единичная матрица третьего порядка.

$$\underset{mxn}{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- нулевая матрица - все элементы равны нулю.