Дискретная математика

Список литературы

1.Шишмарев Ю.Е. Дискретная математика: Конспект лекций. Ч.1. – 2-е изд.- Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2001.
2.Шишмарев Ю.Е. Дискретная математика: Конспект лекций. Ч.2.-.Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.
3.Емцева Е.Д., Солодухин К.С. Дискретная математика: Курс лекций. Ч.3.-Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.
4. Шишмарев Ю.Е., Емцева Е.Д., Солодухин К.С. Дискретная математика. Сборник задач. Ч.1. – 2-е изд., испр. и доп. - Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.
5.Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
6.Лекции по теории графов/ Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. - М.: Наука, 1990.
7. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика.- М.: ФИМА, МЦНМО, 2006

Метод математической индукции ММИ

Лекция 0

Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
- Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является

  метод математической индукции

Введение

- Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?
- 👍 Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.
- А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?
- 👍 Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.
- ☺ «Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

Метод математической индукции
(1838 г., Британская энциклопедия, де Морган)

- **Огастес - де Мóрган** (1806-1871) — шотландский математик и логик.

Метод математической индукции

- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной n, если выполняются следующие условия:
- Предложение $P(n)$ верно при $n = 1$;
- Для любого натурального числа k из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.

Схема доказательства ММИ

1. *база индукции* (проверка справедливости предложения $P(1)$);
2. *индуктивное предположение* (допущение, что предложение $P(k)$ верно для любого натурального k);
3. *индуктивный переход* (доказательство, что верно предложение $P(k+1)$ с помощью индуктивного предположения).

Пример

- $1+2+3+\ldots+100=?$

- $1+2+3+\ldots+n=?$

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

немецкий математик, астроном, физик, иностранный член-корреспондент (1802), иностранный почетный член (1824) Петербургской АН.

Пример 1

- Доказать ММИ, что сумма первых нечетных натуральных чисел равна n^2, т.е. доказать формулу

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

Пример 1

- Доказательство.

1. **База индукции.** Докажем, что формула верна при $n=1$. Так как значение говорит о количестве слагаемых в левой части равенства, то левая часть равенства представляет собой одно слагаемое, а именно первое, т.е. 1. Значение правой части равенства находится непосредственной подстановкой вместо n единицы, т.е. $1^2=1$. Сравнивая левую и правую части равенства, имеем $1=1$ (верно).

Пример 1

2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, для любого натурального k, т.е. верна формула

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Пример 1

3. **Индуктивный переход.** Докажем, что равенство (1) верно при $n = k+1$, т.е.

$$1+3+5+...+(2k-1)+\big(2(k+1)-1\big)=(k+1)^2 \qquad (2)$$

Замечание. В левой части равенства мы написали предпоследнее слагаемое, что дает возможность использовать при доказательстве индуктивное предположение.

Используя пункт 2), заменим в левой части равенства (2) первые k слагаемых на выражение k^2, а последнее слагаемое упростим, раскрыв скобки. Тогда левая часть примет вид

$$\big(1+3+5+...+(2k-1)\big)+\big(2(k+1)-1\big)=k^2+(2k+2-1)=k^2+2k+1$$

Свернем последнее выражение, используя формулу квадрата суммы:

$k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, левая часть имеет вид $(k+1)^2$, а, значит, равна правой.

Отсюда, формула (1) верна для любого натурального n.

Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число a, и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех целых значений переменной $n \geq a$, если выполняются следующие условия:

1. Предложение $P(n)$ верно при $n = a$;
2. Для любого целого числа $k \geq a$ из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.

Пример 2

- При каких натуральных значениях верно неравенство $2^n > n^2 + 1$.

Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства.

Пример 3

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним , таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
- ***Доказательство.*** Пусть утверждение верно при некотором k , т.е. $k = k + 1$. Покажем, что тогда $k + 1 = k + 2$. Действительно, прибавим к обеим частям единицу $k = k + 1 \Rightarrow k + 1 = k + 2$. Значит, все натуральные числа равны между собой.

Пример 4

- Докажем, что все кошки на земле серые.
- Точнее покажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
- Доказательство поведем индукцией по n - числу кошек в обществе.

Пример 4

1. **База индукции.** Очевидно, что $P(1)$ истинно.
2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что утверждение $P(k)$ истинно для любого натурального k.
3. **Индуктивный переход.** Рассмотрим произвольный набор из $k+1$ кошки. Выведем из этого общества одну кошку, назовем ее Муркой. Оставшиеся k кошек по предположению индукции одного цвета. Вернем Мурку и заберем другую, которую назовем Нюркой. Опять по предположению индукции оставшиеся в обществе k кошек одного цвета, причем такого же, как Мурка и Нюрка.

- Вывод: любое конечное общество кошек одного цвета.
- **Найти ошибку в рассуждении.**