Формула включений и исключений

Формула включений и исключений

Пусть A_i - конечные множества, тогда

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\right| = \sum_{1\le i\le n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right| + \dots +$$

$$+(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}\right| + \dots + (-1)^{n+1}\left|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\right|$$

Доказательство:

Пусть элемент a принадлежит s множествам $A_{i_1},\dots,A_{i_s}$

Тогда он вносит в левую часть единицу, а в правую – следующее количество единиц

$$s - C_s^2 + C_s^3 + \dots + (-1)^{s+1}C_s^s$$

Проверим справедливость равенства $1 = s - C_s^2 + C_s^3 + \dots + (-1)^{s+1}C_s^s$

Это равенство верно по следствию 2 из бинома Ньютона.

$$1 - s + C_s^2 - C_s^3 + \dots + (-1)^s C_s^s = 0$$

Формула включений и исключений

Другая формулировка

Существует N объектов, каждый из которых обладает или не обладает свойствами $P_1, P_2, \ldots, P_n$

Пусть $N(P_i)$ - количество объектов , обладающих свойством P_i ,

$N(\overline{P_i})$ - количество объектов, не обладающих свойством P_i

Тогда

$$N(\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(P_{i_1}, P_{i_2}) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}) + \ldots + (-1)^n N(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Задачи

- 1) В группе 30 студентов, из которых 12 студентов изучают английский, 15 человек французский, 16 – немецкий язык. 7 человек изучают английский и немецкий, 9 – английский и французский, 6 – немецкий и французский. 4 человека в группе изучают все три языка. Сколько человек в группе не изучают ни одного из перечисленных языков?

$$30-(12+15+16-7-9-6+4)=5$$

- 2) Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

$$N=100$$

$$N(2)=50, N(3)=33, N(5)=20$$

$$N(2;3)=N(6)=16, N(2;5)=N(10)=10, N(3;5)=N(15)=6$$

$$N(2;3;5)=N(30)=3$$

$$N(\bar{2},\bar{3},\bar{5})=100-50-33-20+16+10+6-3=26$$

Задачи

- 3) 5 джентльменов, вернувшись с вечеринки домой, обнаружили, что надели не свои шляпы. Сколько вариантов такого беспорядка существует?

$$5!-5\cdot 4!+C_5^2\cdot 3!-C_5^3\cdot 2!+C_5^4\cdot 1!-1=120-120+60-20+5-1=44$$

- 4) Сколькими способами можно раздать 5 одинаковых апельсинов, 3 банана, 7 яблок между 4 людьми так, чтобы каждому достался хотя бы один фрукт?

P_i - i–тый человек без фруктов

$$N(\overline{P_1},\overline{P_2},\overline{P_3},\overline{P_4})=\overline{C}_4^5\cdot\overline{C}_4^3\cdot\overline{C}_4^7-4\cdot\overline{C}_3^5\cdot\overline{C}_3^3\cdot\overline{C}_3^7+C_4^2\overline{C}_2^5\cdot\overline{C}_2^3\cdot\overline{C}_2^7-C_4^3\cdot\overline{C}_1^5\cdot\overline{C}_1^3\cdot\overline{C}_1^7$$

Задачи

- 5) В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел по крайней мере один человек?
- **Решение.** 8 пассажиров могут распределиться на четырех этажах 4^8 способами. Из них в 3^8 случаях на трех определенных этажах, в 2^8 случаях на двух определенных этажах, и в 1 – на одном определенном этаже.
- По формуле включений-исключений получим

$$4^8 - 4 \cdot 3^8 + 6 \cdot 2^8 - 4 = 40824$$

Задачи

- 6) Сколькими способами можно переставить цифры числа 12 341 234 так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?
- **Решение.** Общее число перестановок данных цифр равно P(2,2,2,2). Из них в P(2,2,2,1) перестановках данная цифра стоит два раза подряд (объединили эти две повторяющиеся цифры в один элемент), P(2,2,1,1) повторяются подряд данные две цифры, в P(2,1,1,1) – данные три цифры и в P(1,1,1,1) – данные четыре цифры. По формулу включений-исключений получим
- P(2,2,2,2)-4 P(2,2,2,1)+6 P(2,2,1,1)-4 P(2,1,1,1)+ +P(1,1,1,1)=864

Беспорядки

Беспорядки

- **Определение 1**
- Пусть дано множество $A = \{1;2;3;...;n\}$. Перестановка $(k_1, k_2, ..., k_n)$ называется беспорядком, если $k_i \neq i$ для любого $i \leq n$, то есть каждое число не стоит на своем месте.

Пример. Пусть $A = \{1;2;3;4\}$. Выпишем все беспорядки:

$(2;1;4;3), (2;3;4;1), (2;4;1;3), (3;1;4;2), (3;4;1;2), (3;4;2;1), (4;1;2;3),$
$(4;3;1;2), (4;3;2;1)$

Беспорядки

- **Теорема 1.** Число беспорядков n-элементного множества равно

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

- **Доказательство.** Обозначим $N(i)$ **-**количество перестановок, у которых на i-том

месте стоит число i. Так как все остальные

(n-1) числа могут стоять произвольно, то $N(i) = (n-1)!$

Пусть $N(i, j)$ - количество перестановок, в которых числа i и j стоят на i-м и j-м местах соответственно,

$$N(i, j) = (n-2)!$$

Беспорядки

- Обозначим $N(i_1, i_2, ..., i_k)$ - количество

перестановок, в которых числа $i_1, i_2, ..., i_k$

стоят на местах с этими же номерами соответственно, $N(i_1, i_2, ..., i_k) = (n-k)!$

Отметим, что количество наборов $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ существует C_n^k .

По формуле включений – исключений получаем

Беспорядки

$$D_n = n! - \sum_{i=1}^{n} N(i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(i_1, i_2) + \ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} N(i_1, i_2, \ldots, i_k) + \ldots + (-1)^n N(1,2,3,\ldots,n) =$$

$$= n! - n(n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \ldots + (-1)^k C_n^k (n-k)! + \ldots + (-1)^n C_n^n \cdot 0! =$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \quad n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Теорема доказана.

Пример

- Вернемся к предыдущему примеру.
- Непосредственным подсчетом мы выяснили, что $D_4 = 9$
- Вычислим D_4, используя полученную формулу

$$D_n = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 24\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$$