Задачи, приводящие к теории графов.
Основные понятия и определения.

Историческая записка

- Леонард Эйлер (1707-1783)- швейцарец по происхождению. Приехал в Санкт-Петербург в 1727 году. Не было такой области математики **XVIII** века, в которой Эйлер не достиг бы заметных результатов. Например, решая головоломки и развлекательные задачи, Эйлер заложил основы теории графов, ныне широко используемой во многих приложениях математики.
- Напряженная работа повлияла на зрение ученого, в 1766 году он ослеп, но и после этого продолжал работу, диктуя ученикам свои статьи.
- Эйлер умер в 76 лет и был похоронен на Смоленском кладбище Санкт-Петербурга. В 1957 году его прах был перенесен в Александро-Невскую лавру.

Приложения теории графов

- Задача о кратчайшей цепи
- составление расписания движения транспортных средств,
- размещение пунктов скорой помощи,
- размещение телефонных станций.

- Задача о максимальном потоке
- анализ пропускной способности коммуникационной сети
- организация движения в динамической сети
- оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ
- задача о распределении работ

- Задача об упаковках и покрытиях
- оптимизация структуры ПЗУ
- размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети

- Раскраска в графах
- распределение памяти в ЭВМ
- проектирование сетей телевизионного вещания

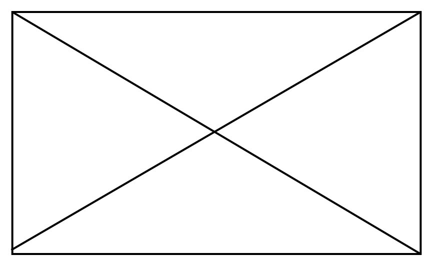
- Связность графов и сетей
- проектирование кратчайшей коммуникационной сети
- синтез структурно-надежной сети циркуляционной связи
- анализ надежности стохастических сетей связи

- Изоморфизм графов и сетей
- структурный синтез линейных избирательных цепей
- автоматизация контроля при проектировании БИС
- - Изоморфное вхождение и пересечение графов
- локализация неисправности с помощью алгоритмов поиска МИПГ
- покрытие схемы заданным набором типовых подсхем

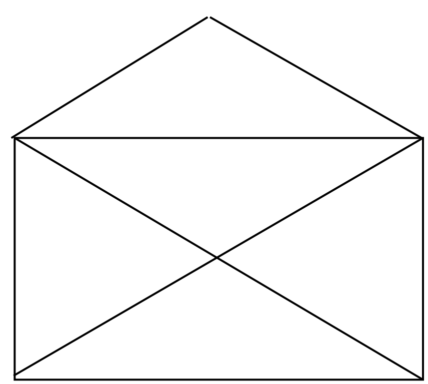
- Автоморфизм графов
- конструктивное перечисление структурных изомеров для
- производных органических соединений
- синтез тестов цифровых устройств

Задачи, приводящие к теории графов

- Попробуйте нарисовать закрытый конверт одним росчерком, т.е., не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды один и тот же отрезок.

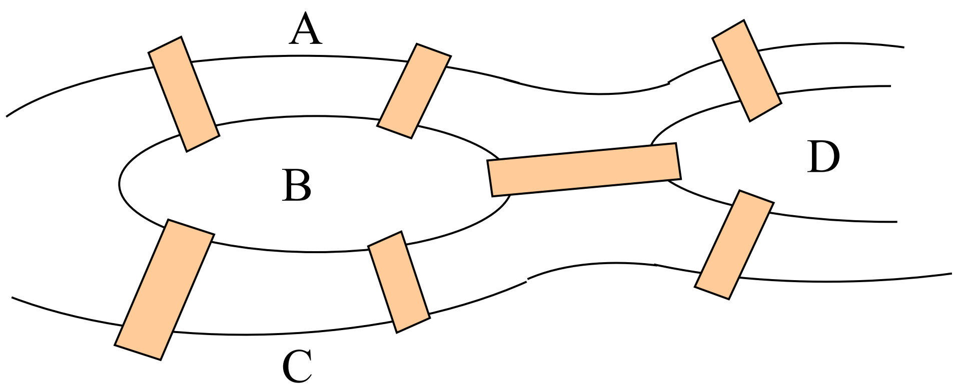


- А если конверт распечатать?

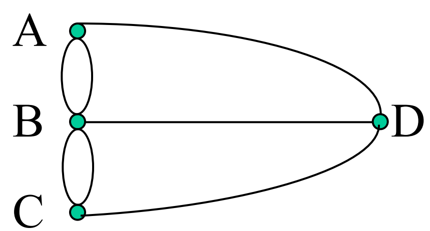


Задача о Кёнигсбергских мостах

- Впервые над задачей описанного выше типа задумался Леонард Эйлер после посещения города Кенигсберга (ныне Калининград).
- В городе было семь мостов через реку Прегель.

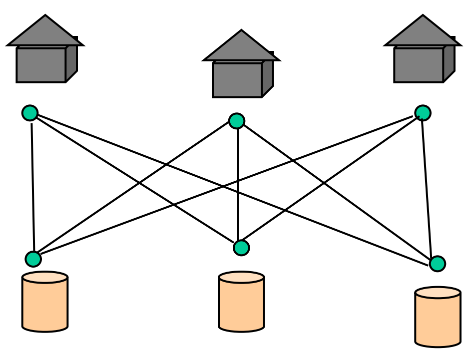


- Гостям города предлагали задачу: пройти по всем мостам ровно один раз. Никому из гостей не удавалось справиться с задачей.
- Эйлер отметил на карте города по одной точке на каждом берегу реки и на каждом острове.
- Затем он соединил эти точки в соответствии с расположением мостов. Задача обхода мостов свелась к задаче изображения одним росчерком следующей картинки



Задача о трех домах и трех колодцах

- Всегда ли можно изобразить граф на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались? Впервые этот вопрос возник при решении старой головоломки. Вот как ее описывает Льюис Кэрролл.
- В трех домиках жили три человека, неподалеку находилось три колодца: один с водой, другой с маслом, а третий с повидлом. Однако хозяева домиков перессорились и решили провести тропинки от своих домиков к колодцам так, чтобы эти тропинки не пересекались. Первоначальный вариант по этой причине их не устраивал.



Основные понятия и определения

Определение 1

Под графом будем понимать пару (V, E), где V – произвольное непустое множество, а E – подмножество множества $V^{(2)}$ $(E \subseteq V^{(2)})$

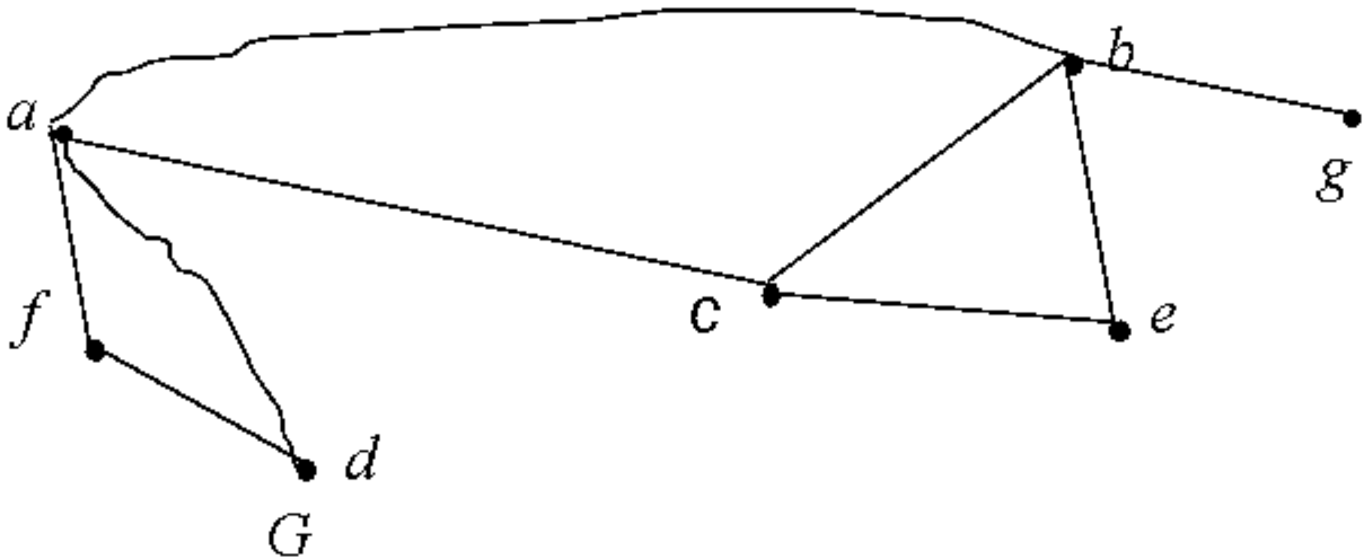
Если множество V конечно, то граф называется конечным,

Элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества E – ребрами графа.

Вершины графа обозначают точками на плоскости, а ребра графа – кривыми на плоскости, соединяющими соответствующие точки. Такие рисунки называют графами.

Множество вершин и ребер графа G обозначают $V(G)$ и $E(G)$ соответственно.

Пример



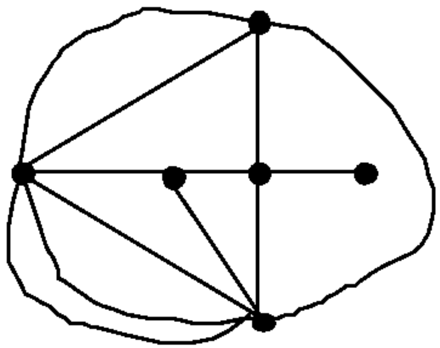
$$V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\},\ E(G)=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,f),(b,c),$$
$$(b,g),(b,e),(c,e),(d,f)\}.$$

Определение 2

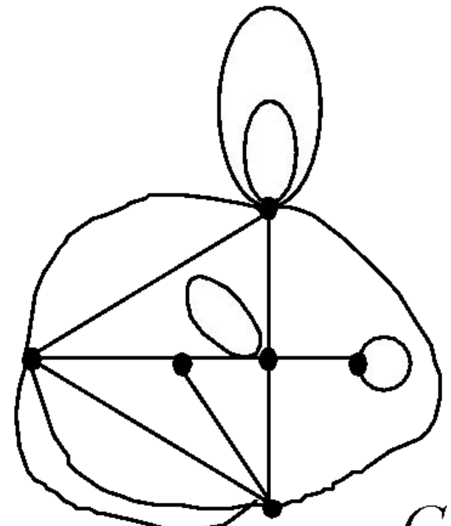
а) Если в графе допускается существование повторяющихся (

а) Если в графе, кроме того, допускается существование петель, т.е. ребер, соединяющих вершину саму с собой, то граф называется псевдографом.

Пример



G_1



G_2

G_1 - мультиграф, G_2 - псевдограф

Определение 3

Если мощность множества V равна n, то число n называется порядком графа.

Определение 4

Если мощность множества V равна n, а мощность множества E равна m, то граф называется (n,m) - графом.

Определение 5

Две вершины графа называются смежными, если они соединены ребром.

Определение 6

Два ребра называются смежными, если они выходят из одной вершины.

Определение 7

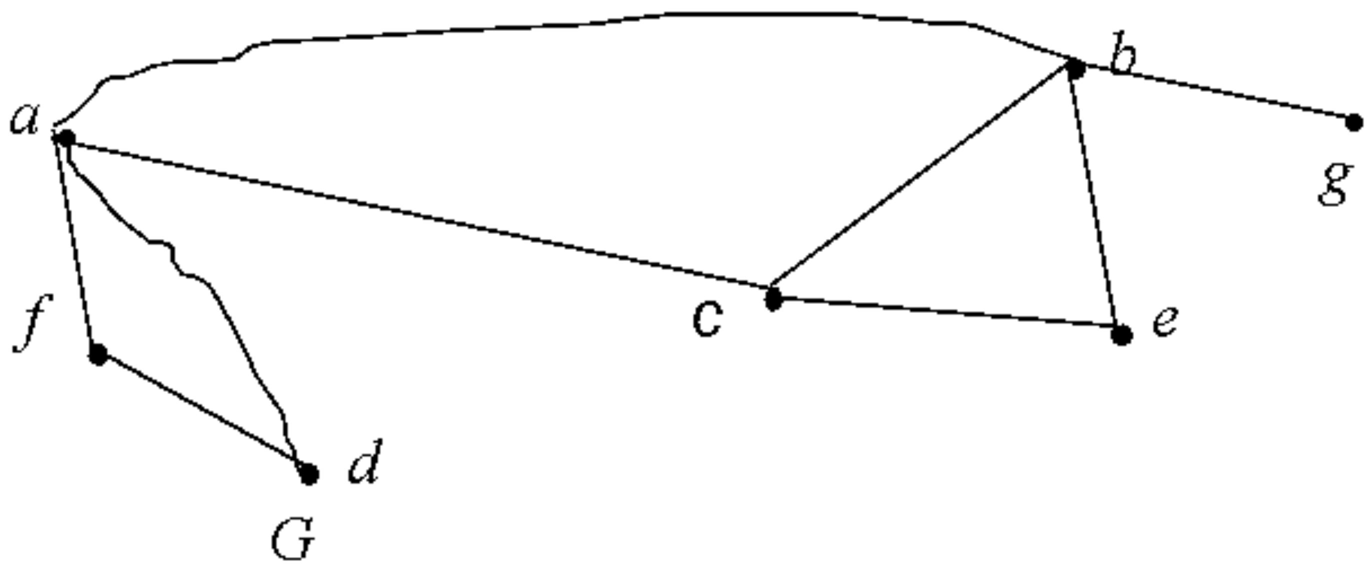
Ребро и вершина называются инцидентными, если данная вершина является концом данного ребра.

Определение 8

Окружением вершины v в графе G называется множество смежных с ней вершин графа G. Обозначают: $N(v), N_G(v)$.

Вернемся к примеру.

Пример



$N(a) = ?$ Смежны ли вершины a и b, a и g ?

Смежны ли ребра (a, b) и (a, d), (a, b) и (c, e) ?

Являются ли инцидентными вершина f и ребро (f, d) ?

Определение 9

Граф называется пустым, если в нем нет ребер.

Обозначают: O_n или E_n – n.

Определение 10

Граф называется полным, если любые две его вершины соединены ребром.

Обозначают: K_n или F_n – n.

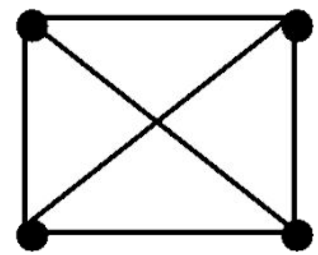
Определение 11

Два графа G и H называются равными, если $V(G)=V(H)$ и $E(G)=E(H)$.

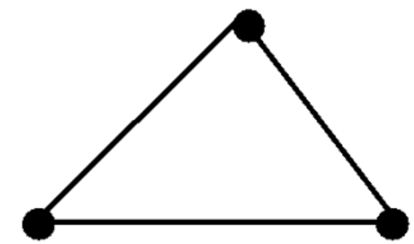
Обозначают: $G=H$.

Пример

 O_1  O_2



K_4



K_3

Теорема 12

Число ребер в полном графе порядка n равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Дополнительные графы. Самодополнительные графы

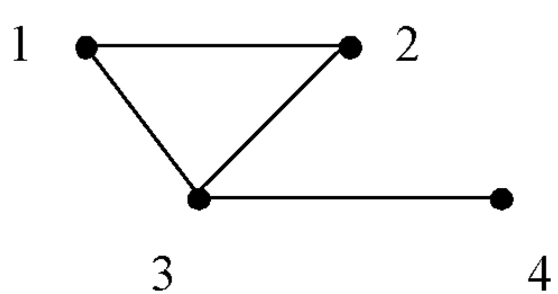
Дополнительные графы. Самодополнительные графы.

Определение 1

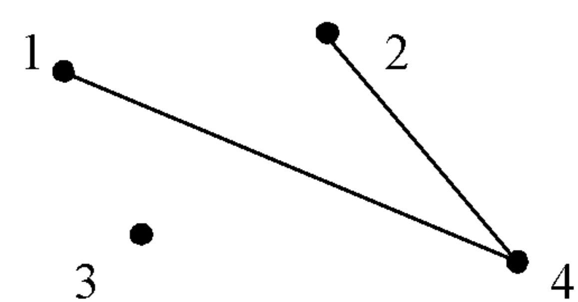
Пусть дан граф $G=(V,E)$. Дополнением графа G (или дополнительным графом к G) называется граф $\overline{G}=(V,\overline{E}_{V^{(2)}})$, т.е. $V(G)=V(G)$ и любые две несовпадающие вершины смежны в $\overline{G}$

G.

Пример



G



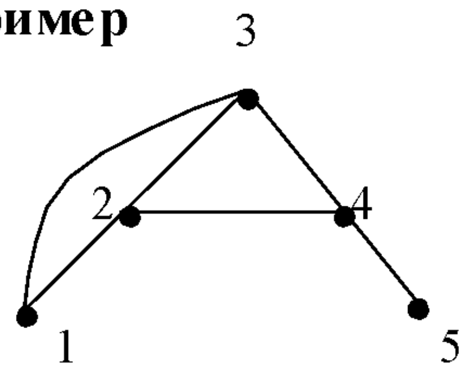
$\overline{G}$

Определение 2

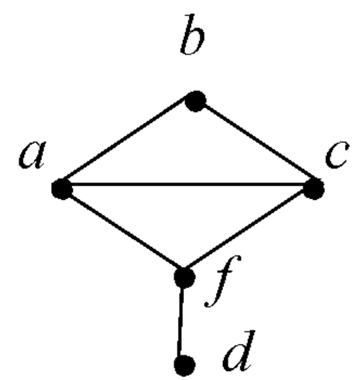
Два графа называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая отношение смежности. То есть, две вершины в одном графе будут смежны тогда и только тогда, когда их образы (прообразы) при данной биекции смежны в другом графе.

$G \cong H$: G H.

Пример



G_1



G_2

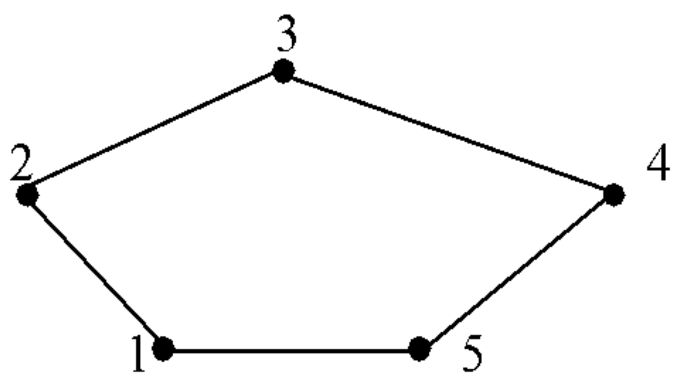
$G_1 \cong G_2$, так как существует сохраняющая отношение смежности биекция $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$.

$\varphi(1) = b, \varphi(2) = a, \varphi(3) = c, \varphi(4) = f, \varphi(5) = d.$

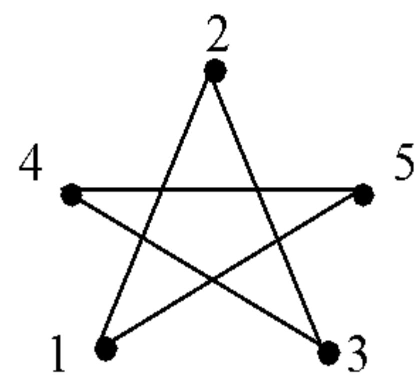
Определение 3

Граф называется сомодополнительным, если он изоморфен своему дополнению.

Пример



G



$\overline{G}$

$G \cong \overline{G}$, G -самодополнительный.

Теорема 4

1) $\overline{\overline{G}} = G$.

2) $G \cong H \Leftrightarrow \overline{G} \cong \overline{H}$.

3) Для любого (n, m) - графа G, граф $\overline{G}$ является $\left(n, \dfrac{n(n-1)}{2} - m\right)$-графом.

4) Если G – самодополнительный граф порядка n, то G является $\left(n, \dfrac{n(n-1)}{4}\right)$-графом.