Степени вершин графа

Определение 1

Степенью (валентностью) вершины называется число инцидентных ей ребер.

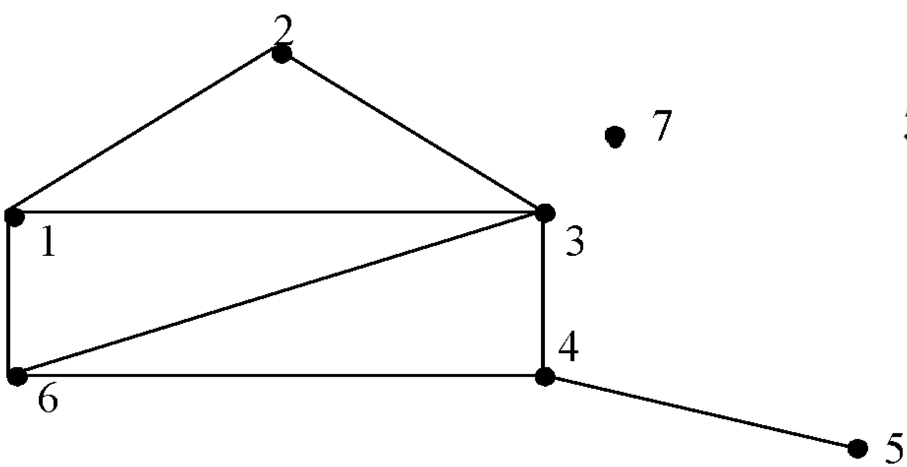
$$o(V), \deg(V).$$

Определение 2

Вершина степени 1 называется висячей.

Вершина степени 0 называется изолированной.

Пример



5 –

7 – висячая вершина.

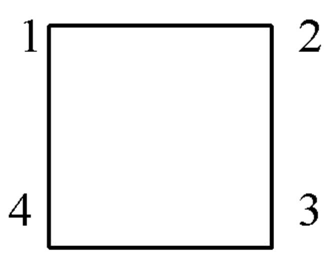
изолированная вершина

Определение 3

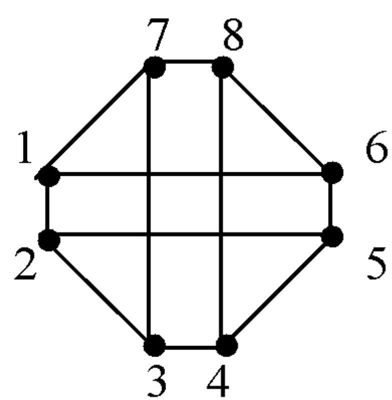
Граф называется однородным (регулярным), если степени всех его вершин равны. Обозначают: R_n^k, где k – степень каждой вершины графа, n – число вершин графа.

Число, которому равны степени всех вершин, называется степенью данного однородного графа.

Пример



R_4^2



R_8^3

Теорема 5

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число, равное удвоенному количеству ребер.

Теорема 6

Теорема 7

В любом графе обязательно найдутся две вершины, имеющие одинаковую степень.

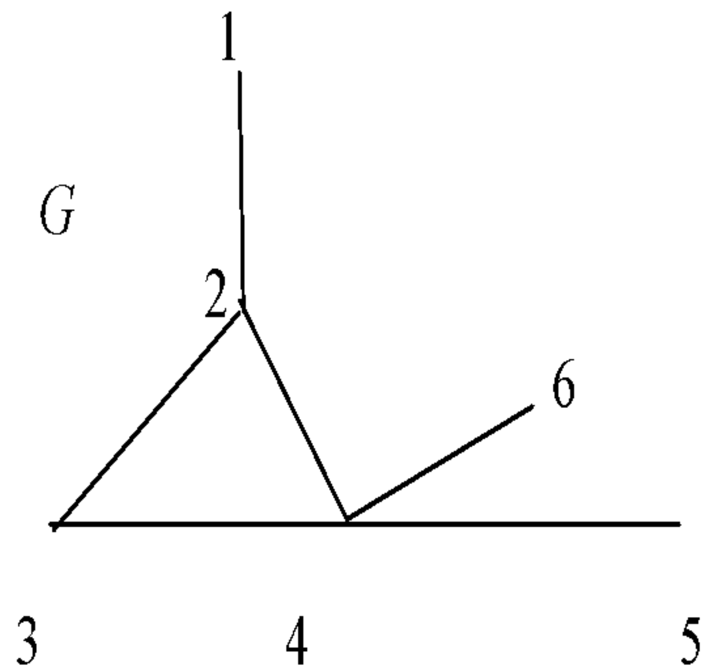
Теорема 8

В любом однородном графе либо его порядок, либо его степень – четное число.

Определение 9

Последовательность степеней всех вершин графа называется степенной последовательностью графа.

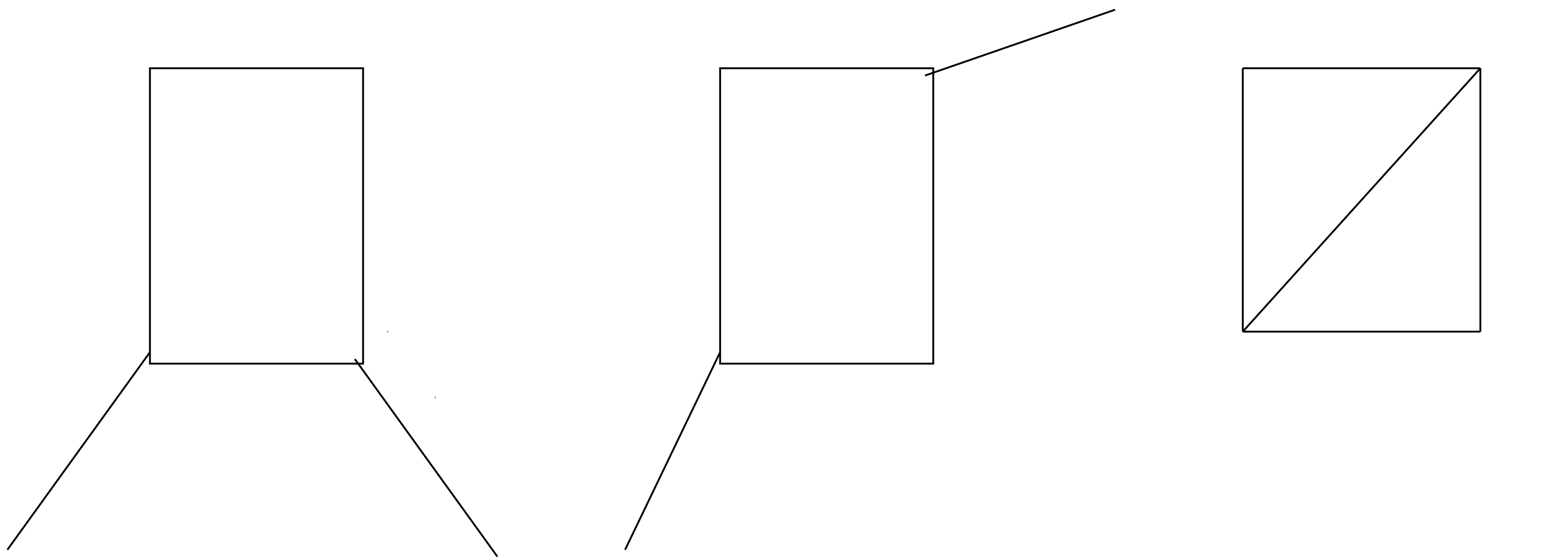
Пример



(1, 3, 2, 4, 1, 1) или (1^3, 2, 3, 4) - степенная последовательность графа *G*.

Пример

По степенной последовательности $(1^2, 2^2, 3^2)$ можно построить графы



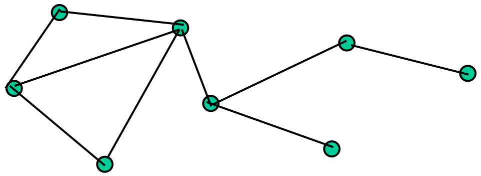
Задача 1

Доказать, что если в графе с n вершинами ($n>2$)
ровно две вершины имеют одинаковую степень,
то в этом графе либо в точности одна вершина степени 0,
либо в точности одна вершина степени ($n-1$).

Решение. Допустим противное.
1) В графе ровно две вершины одинаковой степени, и это вершины степени 0. Тогда, удалив из графа эти изолированные вершины, получим граф, степени всех вершин которого различны, что невозможно по теореме 3.
2) Если же в графе ровно две вершины одинаковой степени, и это вершины степени ($n-1$), то перейдя к дополнению , получим противоречие, аналогично пункту 1).

Задача 2

- Существуют ли графы с данной степенной последовательностью? Ответ пояснить.
- 1) $(1;2;3;4)$;
- 2) $(1^3;2^2;3;5)$;
- 3) $(0;1;2;3;4^2)$;
- 4) $(1^2;2^3;3^2;4)$;
- 5) $(1^2;3^2;4)$.
- **Решение.**
- 1) Не существует, так как все степени различные (смотри теорему 7).
- 2) Не существует, так как число вершин нечетной степени нечетно, а именно 5 (смотри теорему 6).
- 3) Не существует(смотри задачу 1).
- 4) Построим граф, имеющий данную степенную последовательность



- 5) Не существует, так как, соединив вершину степени 4 с четырьмя из оставшихся вершин, убеждаемся, что для вершин степени 3 не достаточно смежных вершин.

Задача 3

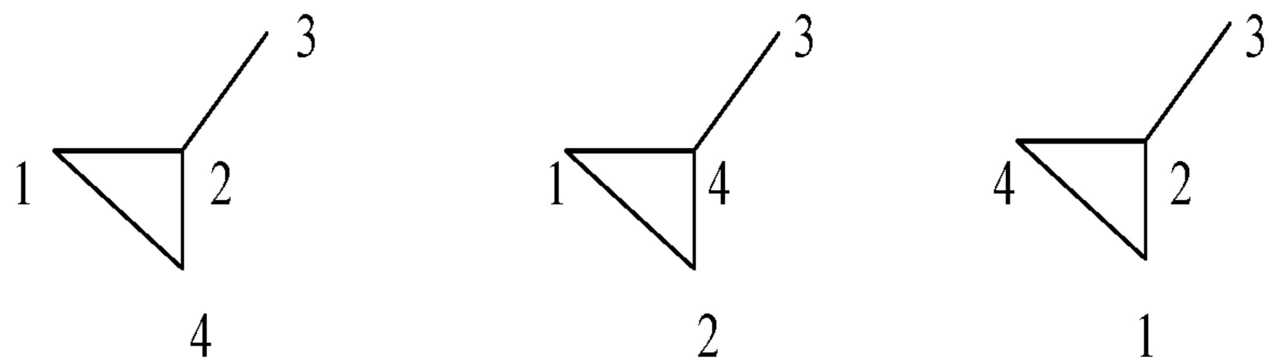
- а) Опишите n вершинный однородный граф степени 2.
- б) Опишите n вершинный однородный граф степени n-1.
- **Решение.**
- а) Многоугольник с n вершинами.
- б) Полный n вершинный граф.

Подграфы.
Операции над графами

Определение 1

Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера $1, 2, \dots, n$.

Пример



G_1 G_2 G_3

$G_1 \neq G_2, G_1 = G_3$, где G_1, G_2, G_3 − помеченные графы.

$G_1 = G_2 = G_3$, G_1, G_2, G_3 − непомеченные (абстрактные) графы.

Определение 2

Пусть дан граф $G=(V,E)$. Граф $G_1=(V_1,E_1)$ называется подграфом (частью графа G), если $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$.

Если при этом $V_1 = V$,

Определение 3

Пусть дан граф $G=(V,E)$. Подграф $G_1=(V_1,E_1)$ графа G называется порожденным, если для любых вершин $u,v \in V_1$ $(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (u,v) \in E$.

Определение 4

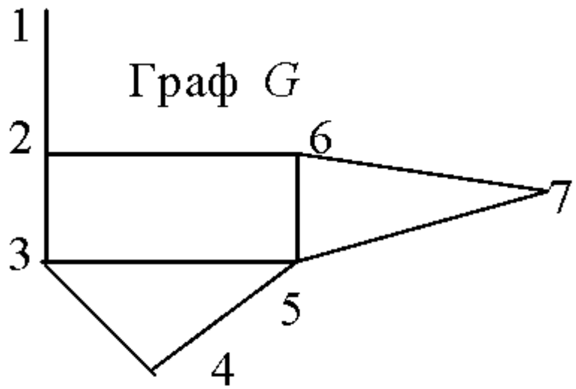
Объединением графов $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называют граф $G=(V,E)=G_1 \cup G_2$ такой, что $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Объединение графов G_1 и G_2 называется дизъюнктным, если $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

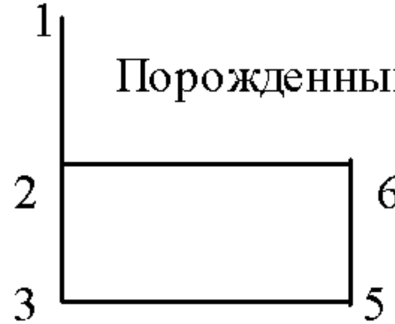
Обозначают: $G = G_1 + G_2$.

Пример

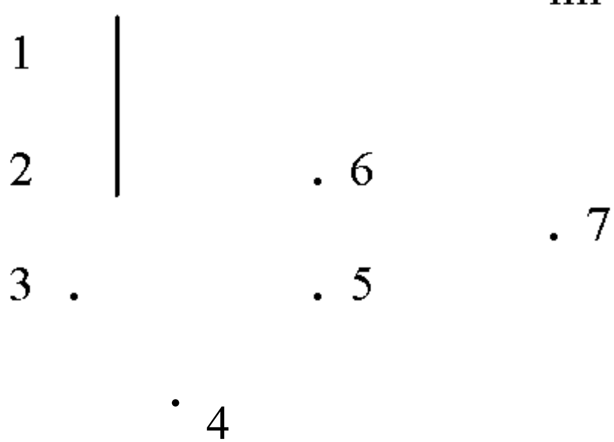
Граф G



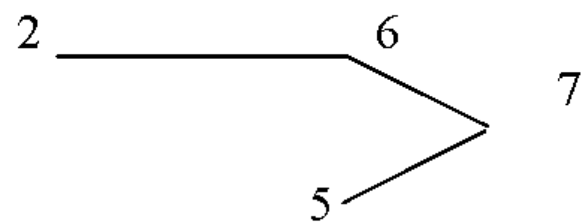
Порожденный подграф графа G



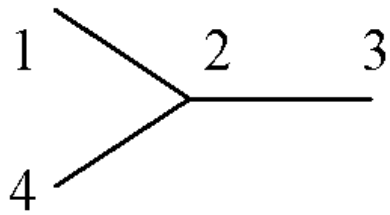
Остовный подграф графа G



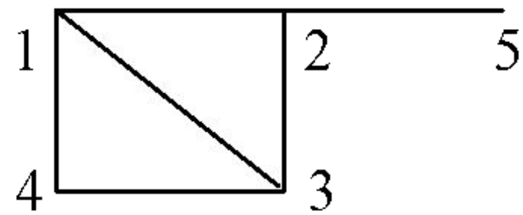
Подграф графа G, не являющийся ни остовным, ни порожденнным



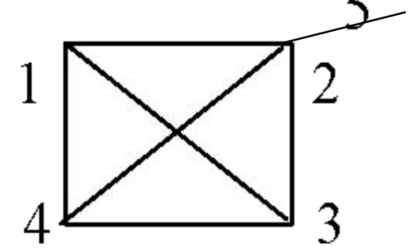
Примеры



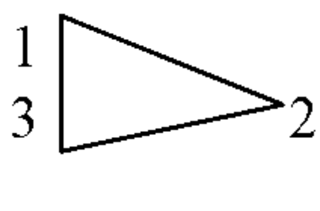
G_1



G_2

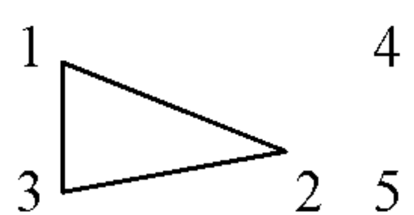


$G_1 \cup G_2$



G_1

G_2



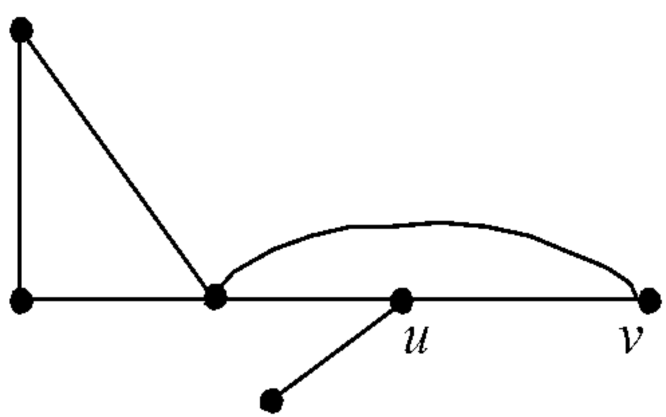
$G_1 + G_2$

Определение 5

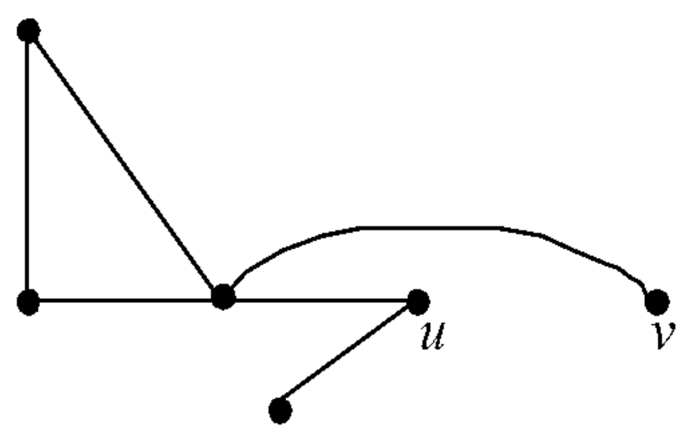
Пусть (u,v) - ребро графа $G=(V,E)$.

Граф $G_{(u,v)} = G-(u,v)$ получается из графа G в результате удаления ребра (u,v), т. е. $V(G_{(u,v)}) = V(G), E(G_{(u,v)}) = E(G) \setminus \{(u,v)\}$.

Пример



G



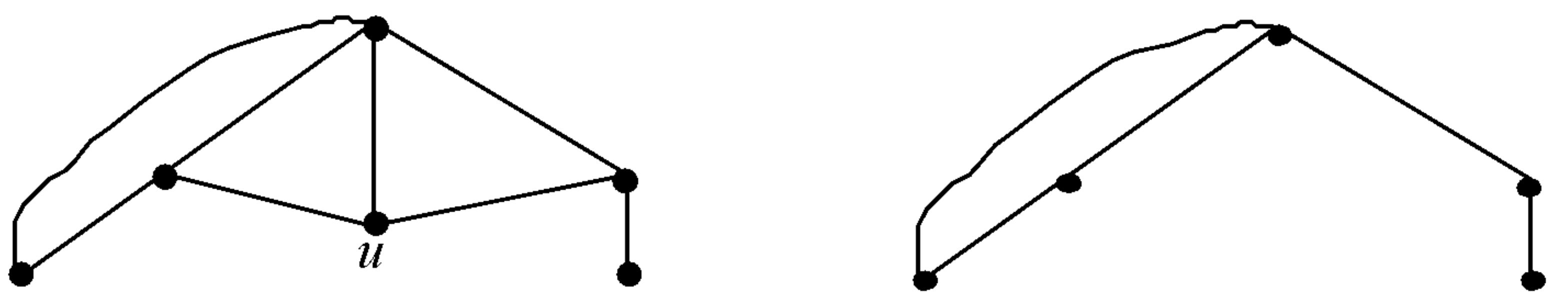
$G_{(u,v)}$

Определение 6

Пусть v - вершина графа G. Граф $G_{(v)} = G - v$ получается из графа G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер,

$$V(G_{(v)}) = V(G) \setminus \{v\}, E(G_{(v)}) = E(G) \setminus \{(v,u) \mid u \in V(G)\}.$$

Пример



G $\qquad$ $G_{(u)}$

Определение 7

Пусть u и v - две вершины графа $G=(V,E)$.

Удалим эти вершины из графа G x,

и добавим новую вершину

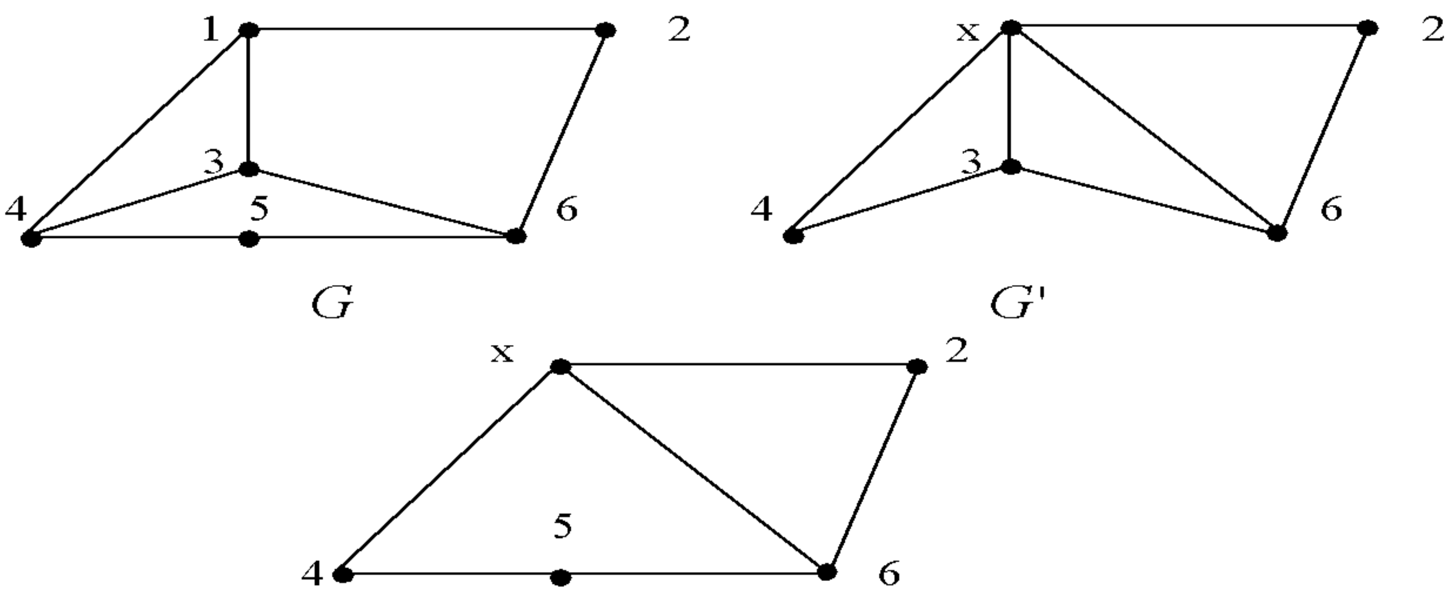
соединив ее ребром с каждой вершиной, входящей в объединение

окружений вершин u и v в исходном графе G.

Построенный граф получился из графа G u и v.

Отождествление вершин u и v называется стягиванием ребра (u,v), $(u,v)\in E(G)$.

Пример

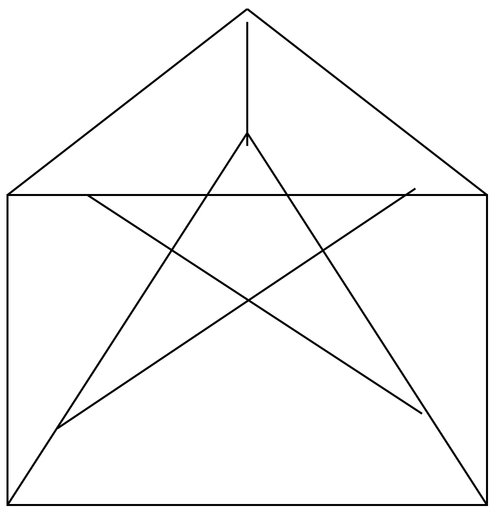


G G' G''

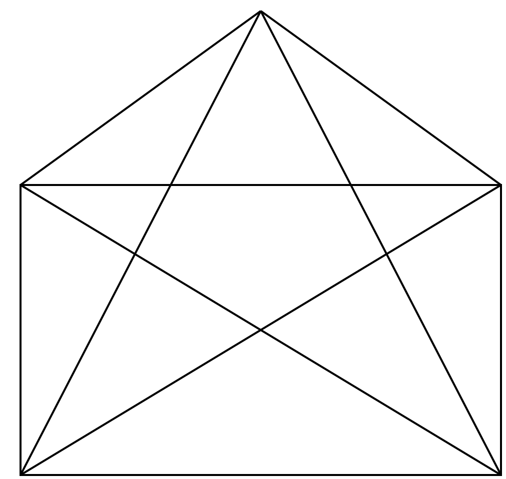
Определение 8

Граф G называется стягиваемым к графу G', если G' получается из G в результате некоторой последовательности стягивания его ребер.

Пример



G



G_1

Граф G ($G_1 = K_5$.

Определение 9

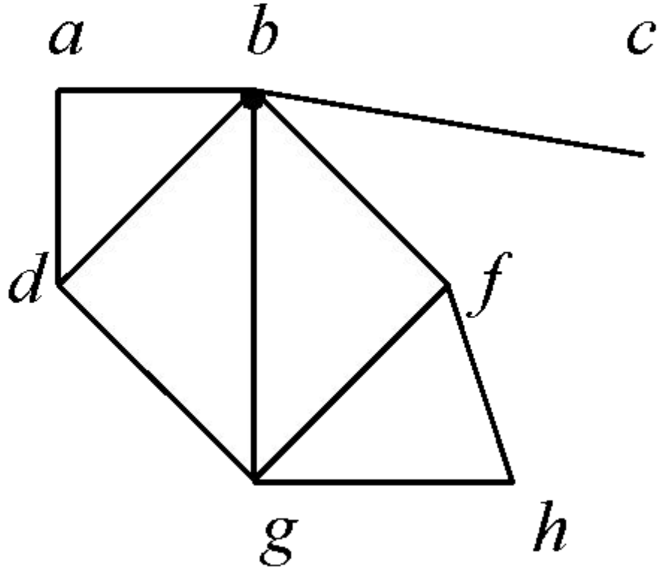
Пусть v - вершина графа G. Рассмотрим два множества $N_1(v)$ и $N_2(v)$, объединение которых совпадает с окружением $N(v)$ вершины v.

Удалив вершину v, добавим новые вершины v_1, v_2 и ребро (v_1, v_2).

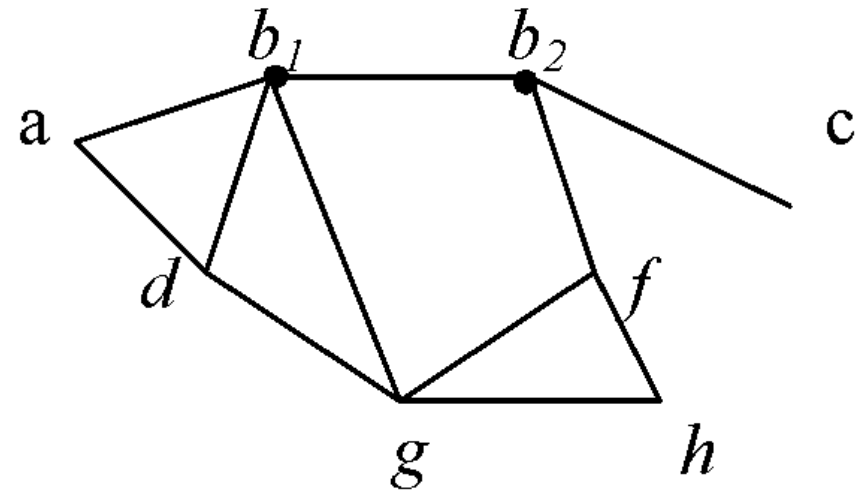
Соединим v_1 с каждой вершиной из $N_1(v)$, а v_2 - с каждой вершиной из $N_2(v)$.

Произведенная операция называется расщеплением вершины v, а полученный граф обозначается G_v^*.

Пример



G



G_b^*

G_b^* получился из G расщеплением вершины b.

$$N(b) = \{a, c, d, f, g\}, N_1(b) = \{a, d, g\}, N_2(b) = \{f, c\}.$$

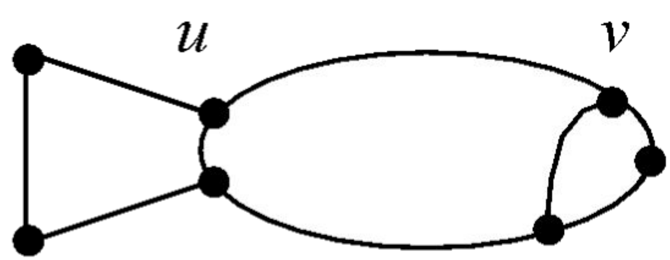
Определение 10

Пусть (u,v) - ребро графа $G=(V,E)$.

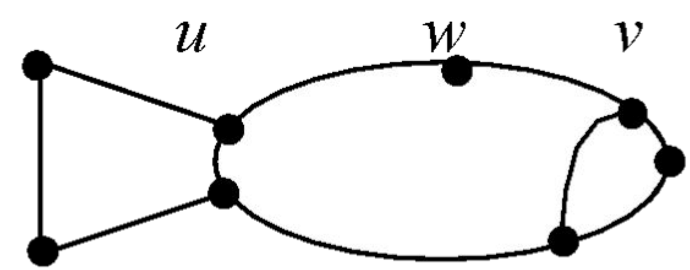
Удалим ребро (u,v) и добавим два новых ребра (u,w) и (w,v), где w - новая вершина.

Произведенная операция называется подразбиением ребра (u,v).

Пример



G



H

Определение 11

1. *Декартовым произведением* $G_1 \square G_2$ называется граф G, для которого $V(G)= V_1 x V_2$ - декартово произведение множеств вершин исходных графов, а $E(G)$ определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда или $u_1=v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, или $u_2=v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

2. *Категорийным произведением* $G_1 x G_2$ называется граф G, для которого $V(G)= V_1 x V_2$ - декартово произведение множеств вершин исходных графов, а $E(G)$ определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда u_1 и v_1 смежны в G_1 и u_2 и v_2 смежны в G_2.

3. *Сильным произведением* $G_1 \boxed{x} G_2$ называется граф G,

для которого $V(G)= V_1 x V_2$ - декартово произведение

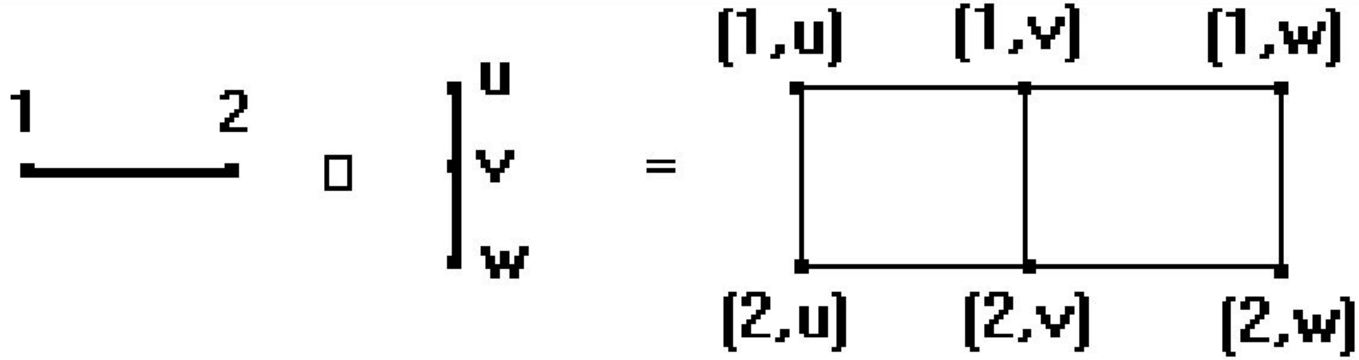
множеств вершин исходных графов, а $E(G)$ определяется следующим образом:

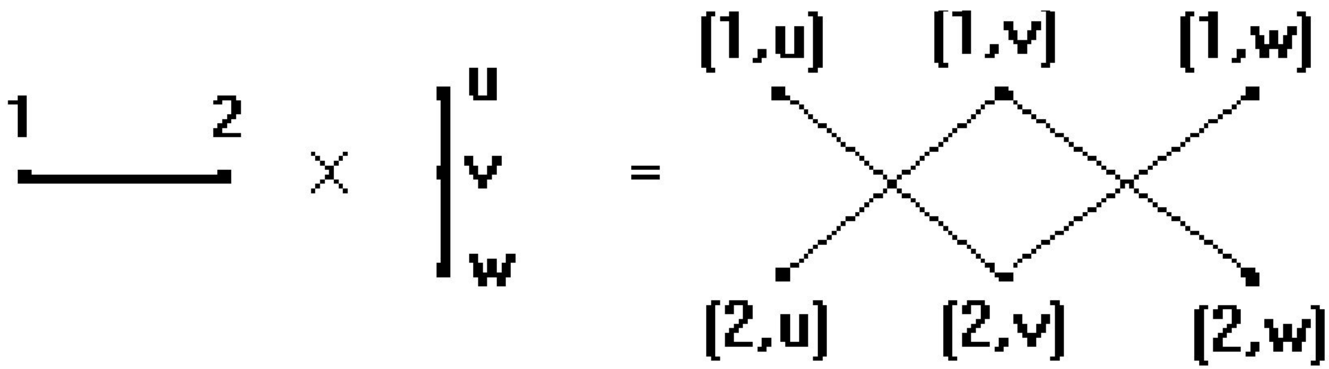
вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда,

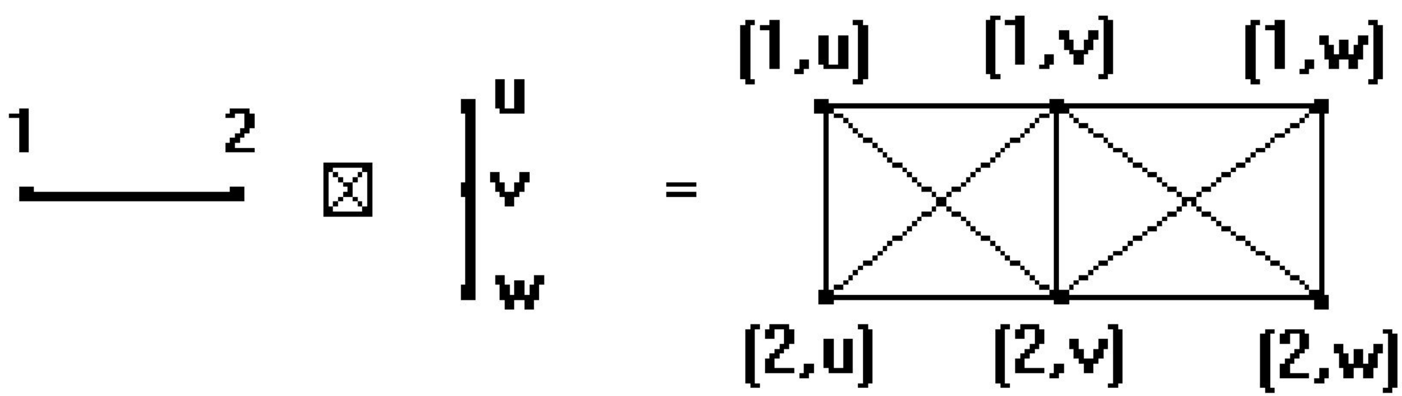
когда u_1, v_1 смежны в G_1, а u_2, v_2 смежны в G_2 или $u_2=v_2$,

или u_2, v_2 смежны в G_2, а u_1, v_1 смежны в G_1 или $u_1=v_1$.

Пример


1
2
□
u
v
w
=
(1,u)
(1,v)
(1,w)
(2,u)
(2,v)
(2,w)


1
2
×
u
v
w
=
(1,u)
(1,v)
(1,w)
(2,u)
(2,v)
(2,w)


1
2
⊠
u
v
w
=
(1,u)
(1,v)
(1,w)
(2,u)
(2,v)
(2,w)