

Семинар 11. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталья.

1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка $f(a)=f(b)=0$, то существует внутри отрезка $[a,b]$ по крайней мере одна точка $x=c$, $a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в 0.

2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Если $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется, по крайней мере, одна точка c , $a < c < b$, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (1)$$

3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Если $f(x), \varphi(x)$ непрерывные и дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$,

причем $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$ найдется такая точка $x=c$, $a < c < b$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (1).$$

Понятие о правиле Лопиталья

Рассмотрим отношение $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ где функция $\varphi(x), \psi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки a . Может случиться, что при $x \rightarrow a$ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремятся к 0 или ∞ то есть обе функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими. Тогда в точке a функция $f(x)$ имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (1).

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

В этом случае, используя производные $\varphi'(x), \psi'(x)$ можно сформулировать простое правило для нахождения предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ то есть дать способ раскрытия неопределенностей вида (1). **Это правило Лопиталю.**

Теорема

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Указанные виды неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ не являются единственными.

Возможны неопределенности $0 \cdot \infty$ то есть $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ причём $\varphi(x) \rightarrow 0, \psi(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a$ Или неопределенность $\infty - \infty$ то есть $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ причём $\varphi(x) \rightarrow \infty, \psi(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a$

Возможны и другие неопределенности. Для раскрытия этих неопределенностей их стараются с помощью тождественных преобразований свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применить правило Лопиталю.

Примеры с решениями

1. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$ если $a=1, b=5$?

При каком значении c ?

Решение. Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x и ее значения на концах отрезка $[1;5]$ равны: $f(1)=f(5)=95$, то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение c определяется из уравнения $f'(x)=2x-6=0$, то есть $c=3$

2. Показать, что производная многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ имеет действительный корень в интервале $(-1;1)$

Решение. Найдем корни данного многочлена: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0$
то есть $x_1 = x_2 = 1; x_3 = -1$

Так как $f(-1)=f(1)=0$, то по теореме Ролля $f'(x)$ имеет корень в интервале $(-1;1)$.

Найдем корни производной: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1/3; x_2 = 1$

Таким образом, между корнями функции содержится корень производной, равный $-1/3$.

3. На дуге AB кривой $y = 2x - x^2$ найти точку M , в которой касательная параллельна хорде AB , если $A(1;1)$ и $B(3;-3)$

Решение. Функция $y = 2x - x^2$ непрерывна и дифференцируема при этих значениях x . По теореме Лагранжа между двумя значениями $a=1$ и $b=3$ существует значение $x=c$, удовлетворяющее равенству $f(b)-f(a)=f'(c)(x-a)$, где $f'(x)=2-2x$. Подставив соответствующие значения, получим $f(3)-f(1)=f'(c)(3-1)$, $-4=4(1-c)$. Отсюда $c=2$, $f(2)=0$. Таким образом, точка M имеет координаты $(2;0)$.

4. На дуге AB кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = t^2; y = t^3$

найти точку M , в которой касательная параллельна хорде AB , если точкам A и B соответствуют значения $t=1$ и $t=3$.

Решение. Угловой коэффициент хорды AB равен $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$ а угловой коэффициент касательной в точке M (при $t=c$) равен $\frac{y'_t(c)}{x'_t(c)}$ где $x'_t = 2t; y'_t = 3t^2$

Для определения c по теореме Коши получаем уравнение $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{y'_t(c)}{x'_t(c)}$ или

$$\frac{27-1}{9-1} = \frac{3c^2}{2c} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{3}{2}c$$

Найденное значение $c=13/6$ удовлетворяет неравенству $1 < c < 3$. Подставив значение $t=c$ в уравнения кривой получим $x=169/36; y=2197/216$.

5. Применяя правило Лопитала найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) = \{ \infty - \infty \} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0$$

Примеры для самостоятельного решения.

- 1. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = x^{\mathbf{И}}$ $\varphi(x) = x^2 + 1$ **В** интервале $[1,2]$.**
- 2. Написать формулу Коши для функций $f(x) = e^{2x}$ **И** $\varphi(x) = 1 + e^x$ **В** интервале $[a,b]$.**
- 3. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ **В** интервале $[1,2]$.**
- 4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ **В** интервале $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$**
- 5. Написать формулу Лагранжа для функции $y = x(1 - \ln x)$ **В** интервале $[a,b]$.**
- 6. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ **В** интервале $[1, e]$**
- 7. Применяя правило Лопиталья найти пределы.**

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x) \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} \quad 8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x} \quad 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$$