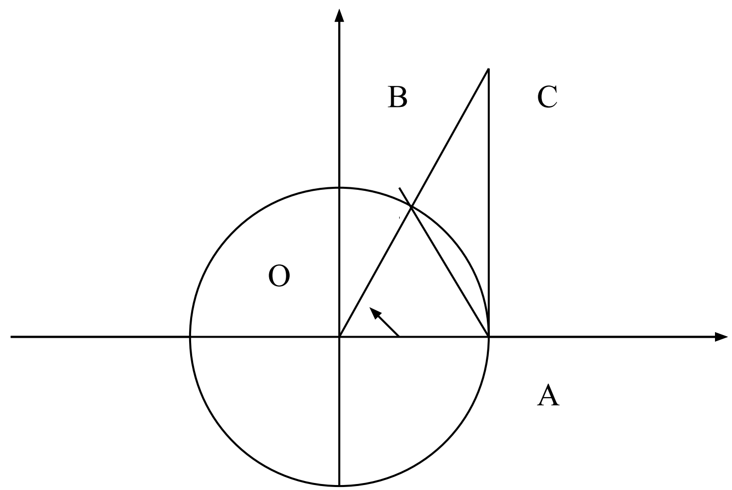
Семинар 6. Первый и второй замечательные пределы и способы их вычисления

Первый замечательный предел
(предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге)

<u>Теорема</u> Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (1)

<u>Доказательство</u>



Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат $OA = R, \angle AOB = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, AC \perp OA$

$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект.AOB}} < S_{\Delta AOC}$, то есть $\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx$ или $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

В силу четности функций $\frac{x}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos x}$ это неравенство справедливо и для интервала

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$ и заметив, что в силу непрерывности функции *cosx* при *x=0* имеет место равенство $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ получим $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, что равносильно $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел

Рассмотрим выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где *n* – натуральное число.

Задаем для n неограниченно возрастающие значения и вычисляем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Получим следующий результат

n	1	2	10	100	1000	10000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718

Как видно из таблицы при увеличении n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ изменяется все медленнее и стремится к некоторому пределу, приближенно равному 2,718.

Теорема

Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к конечному пределу, заключенному между 2 и 3.

(Доказательство на основании разложения по биному Ньютона). Этот предел называется числом *e*. Итак

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad e=2{,}7182818284\ldots$$

Рассмотрим функцию $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, где $\left(x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)\right)$. Можно доказать, что

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x .$$

Другое выражение для числа *e*. Полагая , $\dfrac{1}{x} = \alpha\,(\alpha > -1)$ будем иметь $e = \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

При вычислении пределом полезно применять следующие формулы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \quad \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Данные формулы легко получаются из двух основных формул.

Примеры с решениями

1.Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}$

Решение. Используя первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{m\cdot \sin mx}{mx} \qquad m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx} = m$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(5x/2)}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(5x/2)}{x}\right)^2 = 2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 25/2$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x\cdot\sin 2x}{x\cdot x} = 2\cdot 5\cdot 2 = 20$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

Решение. Сделаем замену $t=\arcsin x\Rightarrow x=\sin t\Rightarrow t\to 0$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{1}{2(1+\sqrt{\cos x})} = \frac{1}{4}$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Решение. Преобразуем выражение в скобках и выделим второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Решение. Преобразуем выражение в скобках и выделим второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+3/x}\right)^x \cdot \left(\frac{1-1/x}{1+3/x}\right)^2 = \frac{e^{-1}}{e^3}\cdot\frac{1}{1} = e^{-4}$$

8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

Решение. Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть, а именно $\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}$. Таким образом, при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности (неопределенность вида 1^∞). Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}$$. Так как $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$, при $x\to\infty$ то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)=e$$. Принимая во внимание, что $\lim_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8$,

окончательно получаем $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8$

9. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

Решение. Сделав замену $e^x-1=z,\Rightarrow x=\ln(1+z),\Rightarrow z\to 0$, получим второй замечательный предел, а именно

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=1$$

Примеры для самостоятельного решения.
Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(mx)}{\sin(nx)}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$