

Семинар 9. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Понятие о логарифмической производной

Рассмотрим сложную функцию $y = \ln z, z = \varphi(x)$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z \cdot z'_x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x \Rightarrow y' = (\ln z)'_x = \frac{z'}{z}$$

Производная от логарифмической функции называется логарифмической производной функции.

Пример $y = \ln(x^2 + 4x + 5) \Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Зависимость между переменными x, y иногда удобно задавать двумя уравнениями

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (1), где t – вспомогательная переменная, (параметр). В общем случае, уравнения (1) определяют y как сложную функцию относительно x .

Разрешив первое уравнение системы (1) относительно параметра t (если это возможно), получим $t = \theta(x)$, θ – функция, обратная к функции φ . Далее, исключая из уравнений (1) параметр t , получаем $y = \psi(\theta(x))$ (2). Пользуясь формулой (2) легко найти производную y'_x как производную сложной функции. Кроме того, существует

правило для нахождения y'_x не требующее исключения параметра t (параметр невозможно исключить).

Теорема

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $\varphi(t), \psi(t)$ - дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$ производная этой функции есть

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (3).$$

Примеры с решениями.

1. Применяя логарифмическую производную вычислить производные следующих функций:

Решение Здесь основание и показатель степени зависят от x .

1) $y = x^{x^2}$
Логарифмируя, получим $y = x^2 \ln x$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x . Так как y является функцией от x , то $\ln y$ есть сложная функция x и

Следовательно
 $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x \Rightarrow y' = yx(2 + \ln x) \Rightarrow x^{x^2} x(2 + \ln x) = x^{x^2+1(2+\ln x)}$$

2) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$
Решение Имеем $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x$ откуда $\frac{y'}{y} = \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \Rightarrow y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right)$

$$3) y = \frac{(2x-1)^2 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}$$

Решение. Здесь заданную функцию также полезно предварительно прологарифмировать

$$\ln y = 3(\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x))$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-1} + \frac{3^2}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}$$

Получаем

$$y' = \frac{(2x-1)^2 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}} \cdot \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right)$$

$$4) y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$$

Решение. заданную функцию также полезно предварительно прологарифмировать

$$\ln y = -x \ln x \cdot x \ln 2 \cdot 2x = -\ln 2 \cdot \ln x \cdot x^3$$

$$\frac{y'}{y} = -\ln 2 \left(\frac{1}{x} \cdot x^3 + 3x^2 \ln x \right) = -\ln 2 \cdot x^2 (1 + 3 \ln x) \quad \text{следовательно} \quad y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 \cdot (-\ln 2 \cdot x^2 (1 + 3 \ln x))$$

2. Продифференцировать функции, заданные параметрическими уравнениями

1. Найти $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ если $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Решение

2. Найти $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ если $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

$$x'_t = 3t^2 + 3; y'_t = 15t^4 + 15t^2 \Rightarrow y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

Решение $x'_t = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t; y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t \Rightarrow y'_x = \frac{e^t (\cos t - \sin t)}{e^{-t} (\cos t - \sin t)} = e^{2t}$

3. Найти $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ если $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1) \\ y = \arctgt \end{cases}$

Решение $x'_t = \frac{2t}{1+t^2}; y'_t = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow y'_x = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Применяя логарифмическую производную вычислить производные следующих функций

1. $y = \sqrt[4]{\frac{1+thx}{1-thx}}$ 2. $y = (\ln x)^x$ 3. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 4. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$ 5. $y = (tx^2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$

6. $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+4}}}$ 7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \arctgx + \frac{1}{2} \ln x + 1}$

2. Продифференцировать функции, заданные параметрическими уравнениями

1. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctgt \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \frac{1}{t^2-1} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$