

Семинар 5. Основные теоремы о пределах. Основные способы вычисления пределов функций

Предполагается, что функции, рассматриваемые в следующих теоремах определены на некотором общем множестве X , для которого точка a является предельной точкой.

Теорема 1 Если каждое слагаемое алгебраической суммы конечного числа функций имеет предел при $x \rightarrow a$, то предел этой алгебраической суммы при $x \rightarrow a$ существует и равен такой же алгебраической сумме пределов слагаемых.

Теорема 2 Если каждый из сомножителей конечного числа функций имеет предел при $x \rightarrow a$, то предел произведения при $x \rightarrow a$ существует и равен произведению пределов сомножителей.

Следствие 1 Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пусть C – постоянная, тогда $\lim_{x \rightarrow a} [C \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} C \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = C \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие 2 Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то предел при $x \rightarrow a$ целой положительной степени ее равен такой же степени предела этой функции, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

Пример

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+2)^2(x+30)^3}{x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{10}{x}\right) \left(1 + \frac{20}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{30}{x}\right)^3 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{20}{x}\right)^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{30}{x}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Теорема 3 Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, отличный от нуля, то предел обратной ей по величине функции $\frac{1}{f(x)}$ равен обратной величине предела данной

функции, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Теорема 4 Если делимое $f(x)$ и делитель $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$ и предел делителя отличен от нуля, то предел их частного при $x \rightarrow a$ равен частному пределов делимого и делителя, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Теорема 5 Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$ и n — натуральное, существует в точке a и в некоторой ее окрестности U_a , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Теорема о промежуточной функции

Пусть в некоторой окрестности точки a функции $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел A при $x \rightarrow a$, то есть

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A \quad \text{тогда функция } f(x) \text{ имеет тот же предел, то есть}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Вычисление пределов основано на применении основных теорем о пределах, признаков существования пределов, а также теорем о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.

Рассмотрим вычисление пределов на различных примерах.

1. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3}$$

Решение. Так как $x \rightarrow 4$, то числитель стремится к числу $4 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель к числу $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3} = \frac{22}{11} = 2$$

2. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{2x + 7}$

Решение. Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \rightarrow \infty$. В таком случае говорят, что имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{2x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5/x}{2 + 7/x} = \frac{3}{2}$$

3. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

Решение. Числитель и знаменатель при $x \rightarrow 3$ стремятся к нулю. Принято говорить,

что получается неопределенность $\frac{0}{0}$. Имеем $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$

Если $x \neq 3$ то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x}$ Но при $x \rightarrow 3$ дробь $\frac{x+3}{x} \rightarrow \frac{3+3}{3} = 2$. Итак

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2$$

4. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим на множители

числитель и знаменатель дроби. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$

5. Найти $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 10001}{x^3 - 20x^2 + 100x}$

Решение. Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$ Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 10001}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x-10)^2} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x-10)} =, \text{ так как}$$

числитель дроби стремится к числу 300, а знаменатель стремится к нулю, то есть является бесконечно малой величиной, следовательно рассматриваемая дробь – бесконечно большая величина.

6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Решение умножим числитель и знаменатель на сопряженное к числителю, то есть сумму

.Получим $\frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 4 + 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

7. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}$

Решение. Положим $1 + x = y^5$

тогда
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}$$

8. Найти
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$

Решение. Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \rightarrow \infty$. В таком случае говорят, что имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень x , то есть получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x + 3/x^2 + 4/x^3}{4 + 3/x + 2/x^2 + 1/x^3} = \frac{1}{4}$$

9. Найти
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$$

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень x , то есть получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2/x^4}{\sqrt{1 + 3/x^3 + 4/x^4}} = \frac{3}{1} = 3$$

10. Найти
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$$

Решение. Имеет место неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим данное выражение на сопряженное

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 8/x + 3/x^2} + \sqrt{1 + 4/x + 3/x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x - 12}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x - x^2}}{x^2 - x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 5x + -6}{x^3 + 3x^2 + 7x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x})$

7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$