Лекция 1. Последовательности. Основные понятия и определения. Действительные числа

Множество всех действительных чисел обозначается *R*. Его подмножества называются числовыми.

1. **Операции сложения.** Для любой пары действительных чисел *a* и *b* определено единственное число, называемое их суммой и обозначаемое *a*+*b*, такое, что при этом выполняются следующие условия:

1.1 $a+b=b+a, f, b \in R$

1.2 $a+(b+c)=(a+b)+c, a, b, c \in R$

1.3 Существует такое число, называемое нулем и обозначаемое 0, что $a+0=0, \forall a \in R$

1.4 Для любого числа $a \in R$, существует число называемое ему противоположным и обозначаемое $-a$, для которого $a+(-a)=0$

Число $a+(-d), a, b \in R$ называется разностью чисел и обозначается $a-b$

2.Операции умножения. Для любой пары действительных чисел *a* и *b* определено единственное число, называемое их произведением и обозначаемое *ab*, такое, что при этом выполняются следующие условия:

2.1 $ab=ba, a, b \in R$

2.2 $a(bc)=(ab)c, где\_a, b, c \in R$

2.3 Существует такое число, называемое единицей и обозначаемое 1, что

$a \cdot 1 = a, \forall a \in R$

2.4 Для любого числа $a \neq 0$ существует число называемое ему обратным и обозначаемое $\frac{1}{a}$, для которого $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

3.Связь операций сложения и умножения

$$(a+b)c + ac + bc, \forall a, b, c \in R$$

4.Упорядоченность

Для любых двух различных чисел *a* и *b* имеет место одно из двух соотношений: либо

$$a < b(b > a), \textit{либо}\_\ a > b(b < a)$$

транзитивность. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$

если $a<b$, то для любого числа c имеет место $a+c<b+c$

если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$

5.Непрерывность. Для любых непустых числовых множеств X и У, таких что для каждой пары чисел $x \in X, y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, существует число *a*, удовлетворяющее условию $x \leq a \leq y, x \in X, y \in Y$

X У

__________|_|_|_|_|________________|_|_|_|_|____________

x a y

Определение. Множество элементов, обладающих свойствами 1-5, содержащее более одного элемента, называется множеством действительных чисел, а каждый его элемент – действительным числом.

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел.

$$Q = \left\{ x \in R : x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

Для любого числа $a \in R$ и натурального n степень a^n определяется как произведение n сомножителей, равных a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n}$$

Пусть $a>0$, а n натуральное число. Число b называется корнем n-й степени из числа a, если $b^n = a$. Обозначение $b = \sqrt[n]{a}$. Неотрицательное значение корня $\sqrt[n]{a}$ называется его арифметическим значением.

Если $r = \dfrac{p}{q}$, где p и q – целые, $q \neq 0$, т. е. r –рациональное число, то для $a>0$ $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Для любого числа $a \in R$ неотрицательное число $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$ называется абсолютной величиной или модулем. Свойства модуля

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a|^n = |a|^n$$

Расширенная числовая прямая. Окрестности.

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной прямой, а отдельные числа - точками этой прямой. Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой или числовой осью, а отдельные числа – ее точками.

Часто бывает удобно дополнить множество действительных чисел элементами, обозначаемыми через и - (плюс бесконечность и минус бесконечность). Считаем по определению, что выполняется неравенство . Множество действительных чисел R дополненное этими символами называется расширенным множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой) и обозначается . Бесконечности называются также бесконечно удаленными точками числовой прямой, остальные точки называются конечными точками числовой прямой.

Напомним определения некоторых важных типов подмножеств расширенной числовой прямой .

Пусть $a \in R, b \in R, a < b$

Множество $[a,b] = \{x : x \in \overline{R}, a \le x \le b\}$ - отрезок;

Множество $(a,b) = \{x : x \in \overline{R}, a < x < b\}$ - интервал;

Множество $[a,b) = \{x : x \in \overline{R}, a \le x < b\}$ - полуинтервал;

Множество $(a,b] = \{x : x \in \overline{R}, a < x \leq b\}$ - полуинтервал;

Все они – промежутки расширенной числовой прямой.
a,b – концы промежутков;
a<*x*<*b* – *x* – внутренние точки;
b-a – длина промежутка (сам промежуток – конечный).

Важным является понятие окрестности конечной и бесконечно удаленной точки числовой прямой.

Если $a \in R$, то $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon$ - окрестностью $U(a,\varepsilon)$ числа *a* называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, то есть $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

В случае $a = +\infty \Rightarrow U(+\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$

В случае $a = -\infty \Rightarrow U(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$

Предел последовательности

Одной из важнейших операций мат. Анализа является операция предельного перехода. Рассмотрим простейшую форму предельного перехода, основанную на понятии предела числовой последовательности.

1.Числовые последовательности

В элементарном курсе математики было дано понятие последовательности, и примерами могут служить арифметическая и геометрическая прогрессия.

Определение Если каждому числу **n** натурального ряда чисел 1,2,3,…,n,… ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число , то множество занумерованных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

называются числовой последовательностью. Обозначение последовательности $\{x_n\}$

Элемент или член последовательности x_n. Например, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ соответственно $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots$

Введем понятие арифметических операций над числовыми последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$. Соответственно:

$\{x_n + y_n\}$ или $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$ - сумма последовательностей;

$\{x_n - y_n\}$ или $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n$ - разность последовательностей;

$\{x_n \cdot y_n\}$ или $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n$ - произведение последовательностей;

$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ или $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}$ - частное последовательностей.

2.Ограниченные и неограниченные последовательности

<u>**Определение 1.**</u> Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (число m), что каждый элемент x_nпоследовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \le M \, (x_n \ge m)$

M – верхняя грань; m – нижняя грань. $x_n \le M \, (x_n \ge m)$ - условие ограниченности последовательности сверху (снизу).

<u>**Замечание**</u> Любая ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесчисленное множество верхних (нижних) граней.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной, если существует такие числа M и m, что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству

$$m \le x_n \le M$$

M – верхняя грань; m – нижняя грань.

Если $\{x_n\}$ ограничена, то все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| \le A$, где $A = \max\{|M|, |m|\}$

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа *A* найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$

Примеры:

1)Последовательность -1, -4, -9, …,- n^2 ,… - ограничена сверху и не ограничена снизу. Верхняя грань – число больше или равно -1.

2)Последовательность 1, ½,1/3,…,1/n, … - ограничена. $M \ge 1, m \le 0$

3)Последовательность 1, 2, 1, 3, ….,n, 1, (n+1), … - не ограничена.

3.Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Введем определения бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A можно указать номер N такой, что для $n \geq N$ все элементы x_n удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$

Замечание 1

Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной.

Замечание 2

Неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

Пример:

Неограниченная последовательность *1,2,1,3,…,n,…* не является бесконечно большой, поскольку при *A>1* неравенство $|x_n| > A$ не имеет места для всех элементов с нечетными номерами.

Определение 2. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для $\forall \varepsilon > 0,$ можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы α_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon.$

Рассмотрим пример:

Последовательность $q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$

При $|q|>1$ – бесконечно большая;

При $|q|<1$ – бесконечно малая.

Докажем первое утверждение

Если |q|>1, то $|q| = 1 + \delta, \delta > 0.$ Используя формулу бинома Ньютона, получаем $|q|^N = (1+\delta)^N = 1 + \delta \cdot N +$ положительные элементы. Отсюда $|q|^N > \delta \cdot N (1)$

Фиксируем $\forall A > 0$ и выбираем номер N столь большим, чтобы имело место неравенство $\delta \cdot N > A$. Из этого неравенства и неравенства (1) следует неравенство $|q|^N > A$. Так как, при $n \geq N, |q| > 1 \Rightarrow |q|^n \geq |q|^N \Rightarrow |q|^n > A$. Тем самым доказано, что при $|q|>1$

рассматриваемая последовательность является бесконечно большой.

Второе утверждение доказывается аналогично, применяя бином Ньютона и определение бесконечно малой последовательности.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 1

Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство

Пусть $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности.

Докажем, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - бесконечно малая последовательность

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число.

N_1 - номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

N_2 - номер, начиная с которого $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Так как $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$, то, обозначая $N = \max\{N_1, N_2\}$, получаем, что, начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $|\alpha_n + \beta_n| \le \varepsilon$ Это означает, что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - бесконечно малая.

Теорема 2

Разность двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство аналогичное, только, вместо $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$ берем $|\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$

Следствие Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 3

Бесконечно малая последовательность ограничена.

Доказательство

Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Пусть $\varepsilon > 0$- произвольное число. Пусть N – номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \varepsilon$. Обозначим через $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, ..., |\alpha_{N-1}|\}$. Очевидно, что $|\alpha_n| < A$ для $\forall n$, что означает ограниченность последовательности.

Теорема 4

Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность представляет собой бесконечно малую последовательность.

Доказательство

Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность;

Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность.

Так как $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, то $\forall x_n \Rightarrow \exists A$, что $|x_n| \le A$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Так как $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то для положительного числа $\frac{\varepsilon}{A}$ можно указать N такой, что при $n \ge N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Тогда при $n \ge N$

$$| x_n \cdot \alpha_n | = | x_n | \cdot | \alpha_n | < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$.

Поэтому последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ - бесконечно малая.

<u>Следствие</u>

Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей представляет собой бесконечно малую последовательность.

<u>Замечание</u>

Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть последовательностью любого типа и даже может не иметь смысла.

Например

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1 \Rightarrow (1,1,\ldots,1,\ldots)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n} = n \Rightarrow \text{бесконечно большая последовательность}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2}, \beta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{бесконечно малая последовательность}$$

Если бесконечно много элементов последовательности $\{\beta_n\}$ равны 0, то последовательность $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ не имеет смысла.

<u>Теорема 5</u>

Если все элементы бесконечно малой последовательности равны одному и тому же числу *c*, то *c=0.*

<u>Доказательство</u>

Пусть $c \neq 0$, положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Начиная с номера *N*, соответствующему этому ε выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n = c$, а $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, то $|c| < \frac{|c|}{2} \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ - противоречие.

<u>Теорема 6</u>

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера *n* определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой последовательностью. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны 0, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая.

<u>Доказательство</u>

Отметим, что у бесконечно большой последовательности лишь конечное число элементов может быть равно 0. Из определения бесконечно большой последовательности вытекает, что для данного *A>0,* существует *N*, начиная с которого $|x_n| > A$. Это означает, что при $n \geq N$ все элементы $x_n \neq 0$, тогда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ имеет смысл, если ее элементы рассматривать, начиная с номера N^*. Докажем теперь, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая последовательность.

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Для числа $\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N \geq N^*$, такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, начиная с указанного номера N. Будет выполняться неравенство $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, то есть доказано, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично.

Сходящиеся последовательности и их основные свойства

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число *a*, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. При этом число *a* называется пределом последовательности $\{x_n\}$. В соответствии с эти определением всякая бесконечно малая последовательность сходится и имеет своим пределом число 0.

Другое определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число *a*, что $\forall \varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n \geq N$ все x_n удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. Число *a* – предел последовательности.

Символическая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$.

Бесконечно большую последовательность иногда называют последовательностью, сходящейся к бесконечности. Символическая запись $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$.

Если элементы бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера имеют определенный знак, то последовательность сходится к бесконечности определенного знака. Символическая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Замечание 1

Неравенство (1) эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Эти неравенства означают, что элемент x_n находится в ε - окрестности числа *a* (это интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Еще определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число *a*, что $\forall \varepsilon > 0$ в ε - окрестности числа *a* находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера.

Определение сходящейся последовательности утверждает, что разность $x_n - a = \alpha_n$ - бесконечно малая последовательность. Следовательно, всякий элемент сходящейся последовательности, имеющей предел *a*, можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$ (2), где α_n - элемент бесконечно малой последовательности.

Замечание 2

Из определения предела последовательности, очевидно, что конечное число элементов не влияет на сходимость этой последовательности и на величину этого предела.