ПОТОКИ В СЕТЯХ

Одной из наиболее важных задач теории графов является задача определения максимального потока, протекающего от некоторой вершины графа *s* (источника) к вершине *t* (стоку).

Примерами таких задач могут быть: перевозка наибольшего товара, максимальное количество жидкости и газа, транспортируемых по трубопроводам, информация по компьютерной и телефонной сети и др.

Потоком в сети *G = (X,U)* от входа *s* к выходу *t* называется неотрицательная функция *U*, определенная на множестве дуг сети со следующими свойствами:

$$1.\ \sum_{x_k \in \Gamma(x_i)} Y_{ik} - \sum_{x_k \in \Gamma-(x_i)} Y_{ik} = \begin{cases} U, & \text{если } x_i = s, \\ -U, & \text{если } x_i = t, \\ 0, & \text{если } x_1 \neq s, t; \end{cases} \qquad (10.4)$$

$$2.\ 0 \leqslant Y_{ik} \leqslant C_{ik}. \qquad (10.5)$$

Условие (10.4) является уравнением сохранения потока, согласно которому поток, втекающий в вершину, равен потоку, вытекающему из нее, за исключением вершин *s* и *t* (источник и сток).

Ограничение (10.5) указывает, что пропускные способности дуг ограничены для каждой дуги графа *G*.

Задача состоит в нахождении такого множества потоков по дугам, чтобы

$$U = \sum y^{+}_{x^{+}k} = \sum y^{-}_{x^{-}k} \rightarrow \max \qquad (10.6)$$

при ограничениях (10.4) и (10.5).

Теорема Форда - Фалкерсона
(о максимальном потоке и минимальном разрезе)

Величина $(X_m \to \tilde{X}_m)$, максимального потока из *s* в *t* равна значению минимального разреза отделяющего источник *s* от стока *t*.

Разрез $X_0 \to \tilde{X}_0$ отделяет *s* от *t*, если $s \in X_0$,а $t \in \tilde{X}_0$ Величиной такого разреза называется сумма пропускных способностей всех дуг из *G*, начальные вершины которых лежат в X $t \in \tilde{X}_0$ онечные — в , т.е.

$$U(X_0 \to \tilde{X}_0) = \sum C_{ik},$$
$$(x_i, x_k) \in (X_0 \to \tilde{X}_0). \qquad (10.7)$$

Теорема Форда - Фалкерсона

(о максимальном потоке и минимальном разрезе)

- Минимальный разрез $\tilde{X}_0$) — это разрез с наименьшим значением суммы пропускных способностей дуг.
- Если вершины неографа *G = (X,U)* разделены на два множества *Xo* и $\tilde{X}_0$, где и является дополнением *Xo* относительно *X*, то множество ребер графа *G*, одни концевые вершины которых лежат в *Xo*, а $\tilde{X}_0$ другие — в *Xo*,

  определяют разрез этого неографа *G*.
- Обозначают разрезы в графах *R* = (X_0, $\tilde{X}_0$).

Теорема Форда - Фалкерсона

(о максимальном потоке и минимальном разрезе)

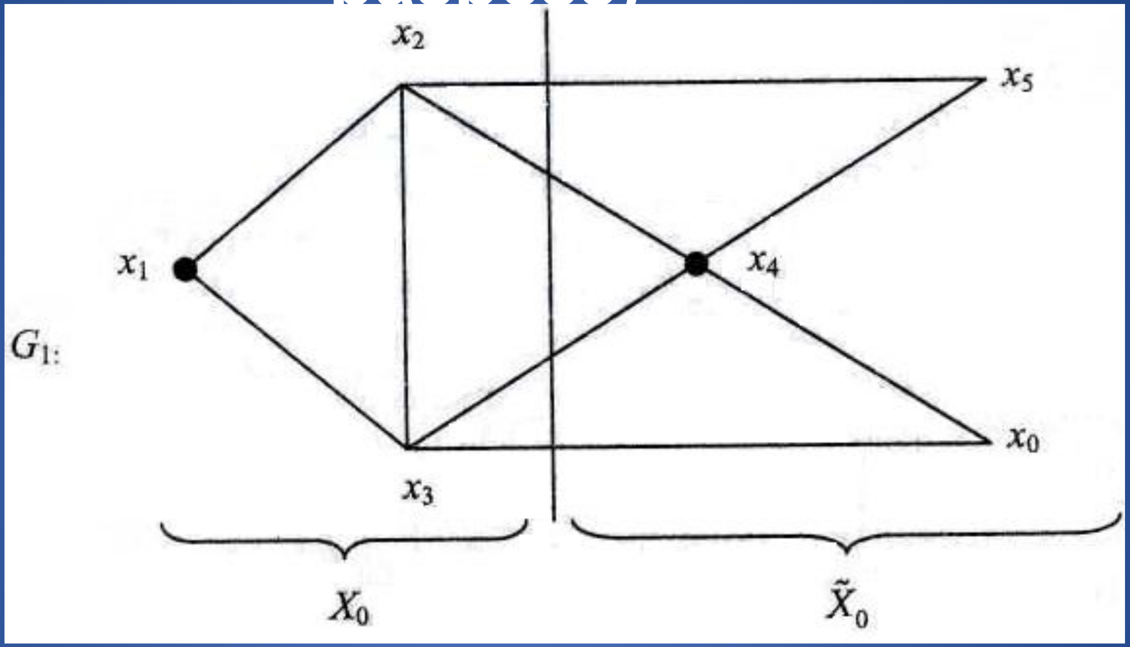

Рис. 10.32

Разрез $R = (X_0, \tilde{X}_0)$, состоящий из дуг орграфа определяется как объединение $(X_0 \to \tilde{X}_0) \cup (\tilde{X}_0 \to X_0)$.

Теорема Форда - Фалкерсона
(о максимальном потоке и минимальном разрезе)

- Разрезом орграфа *G2* (рис. 10.33) является множество дуг $U_1 = (x_5, x_1)$, $U2 = (x_1, x_4)$, $U_4 = (x_3, x_7)$ и $U5 = (x_2, x_7)$, удаление которых разделяет множеств $\tilde{X}_0$ вершин $Xo = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $=\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$ (рис. 10.33).

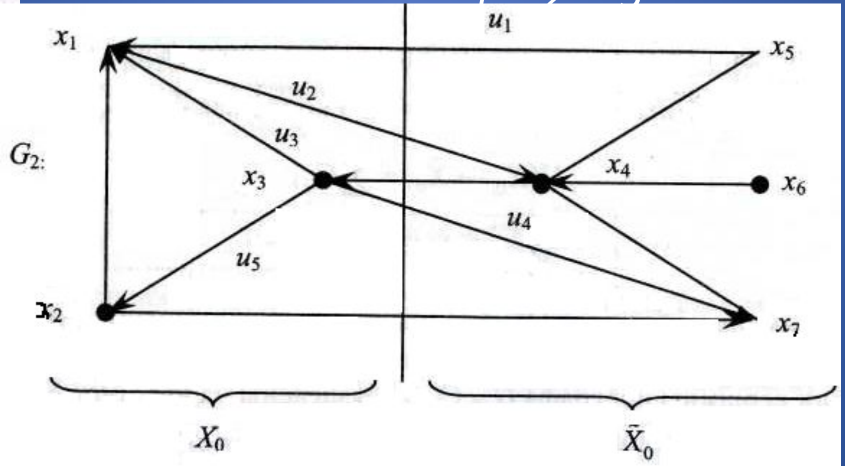

Рис. 10.33

Этот разр $X_0 \to \tilde{X}_0 = \{u_2, u_4, u_5\}$ и $\tilde{X}_0 \to X_0 = \{u_1, u_3\}$.

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Построить максимальный поток для ориентированной сети с источником *S* и стоком *t* (рис. 10.34). Пропускные способности дуг указаны на дугах сети:

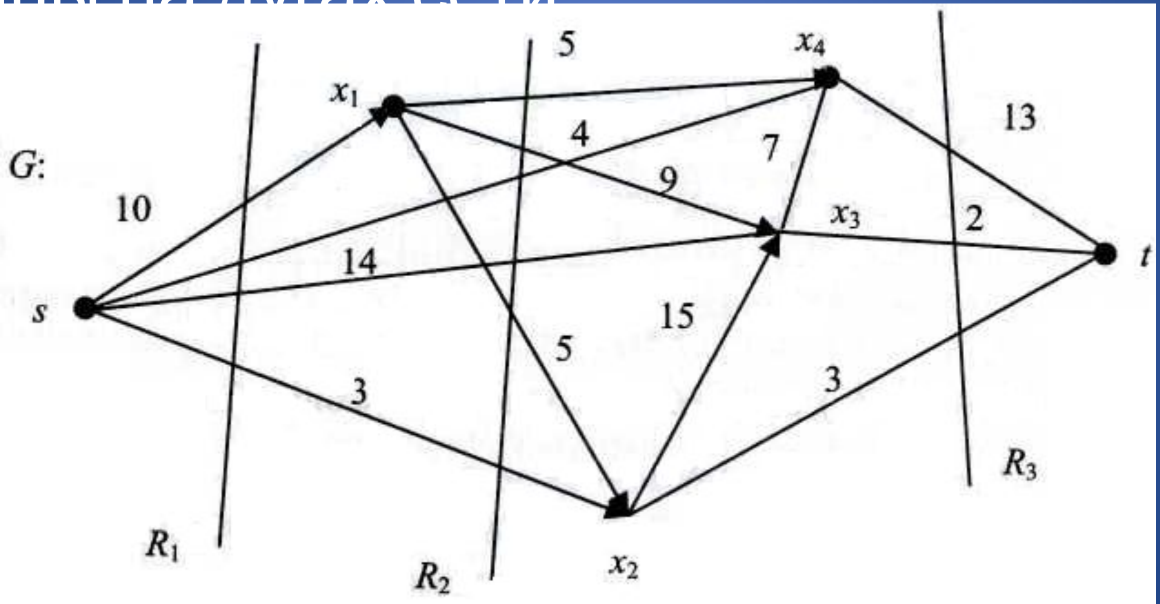

Рис. 10.34

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

- *Решение*

1. Составляем матрицу пропускных способностей дуг $C = \{c_{ik}\}$ для графа G; нулевые значения пропускных способностей дуг в табл. 10.7 не записываем

C:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		$\overline{10}$	3	14	4	
x_1			5	9	$\overline{5}$	
x_2				15		3
x_3					7	2
x_4						$\overline{13}$
t						

(10.7)

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

2. Выбираем произвольно один из путей от вершины S к вершине t графа G (рис. 10.34).

Пусть $P_1 = \{s, x_1, x_4, t\}$ —первоначальный путь: Определяем пропускную способность выбранного пути

$$Q_1 = \min\{10, 5.13\} = 5.$$

В табл. 10.7 отмечаем чертой сверху значения пропускных способностей дуг, соответствующих указанному пути P_1.

Вычитаем значение $Q_1 = 5$ из отмеченных элементов (10, 5, 13).

Нули, получаемые в результате вычислений, записываем в соответствующую строку или столбец.

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

C_1:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		5	3	14	$\overline{4}$	
x_1			5	9	0	
x_2				15		3
x_3					7	2
x_4						$\overline{8}$
t						

(10.8)

3. Выбираем следующий путь из *S* в *t*, т.е. $P_2 = \{s, x_4, t\}$ и определяем его пропускную способность:

$$Q2 = \min\{4;8\} = 4.$$

В табл. 10.8 отмечаем значения пропускных способностей чертой над числами 4 и 8. Вычитаем значение *Q2* = 4 из указанных элементов. Получаем новую табл. 10.9:

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

C_2:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		$\bar{5}$	3	14	0	
x_1			5	$\bar{9}$	0	
x_2				15		10
x_3					$\bar{7}$	2
x_4						$\bar{4}$
t						

(10.9)

4. Выбираем новый путь из *s* в *t*, т.е.

C_3:

x_1			5	5	0	
x_2				15		3
x_3					3	$\bar{2}$
x_4						0
t						

(10.10)

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

$P_3 = \{s, x_1, x_3, x_4, t\}$ и определяем его минимальную пропускную способность:

$$Q_3=\min\{5,9,7,4\} = 4.$$

Вычитаем значение $Q_3 = 4$ из элементов, отмеченных в табл. 10.9. Получаем табл. 10.10 в виде:

5. Выбираем путь $P_4 = \{s, x_3, t\}$ и определяем его пропускную способность:

$$Q_4=\min\{14,2\} = 2.$$

Вычитая $Q_4 = 2$ из значений пропускаемых способностей (14,2), получаем табл. 10.11:

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

C_4:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		1	$\bar{3}$	12	0	
x_1			5	5	0	
x_2				15		$\bar{3}$
x_3					3	0
x_4						0
t						

(10.11)

6. Укажем путь $P_5 = \{s, x_2, t\}$ и определим его пропускную способность:

$$Q_5 = \min\{3;3\} = 3.$$

Вычитая Q_5 из элементов пропускных способностей дуг рассматриваемого пути получаем таб. 10.11 в виде 10.12:

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

C_5: (10.12)

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		1	0	12	0	
x_1			5	5	0	
x_2				15		0
x_3					3	0
x_4						0
t						

В столбце *t* имеются только нули.

Следовательно, простроить новый путь невозможно.

Вычитая из элементов табл. 10.1) значения пропускных способностей дуг, указанных в табл. 10.12, получаем таблицу со значениями C_{jk}, определяющими максимального возможный поток.

Его величина равна

$$П = Q_l + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5;$$
$$П = 5 + 4 + 4 + 2 + 3 = 18.$$

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Построим итоговую матрицу:

$$C_6 = C - C_5. \qquad (10.13)$$

C_6:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		9	3	2	4	
x_1			0	4	5	
x_2			0			3
x_3						2
x_4						13
t						

На основании итоговой матрицы строим максимальный поток сети:

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

•

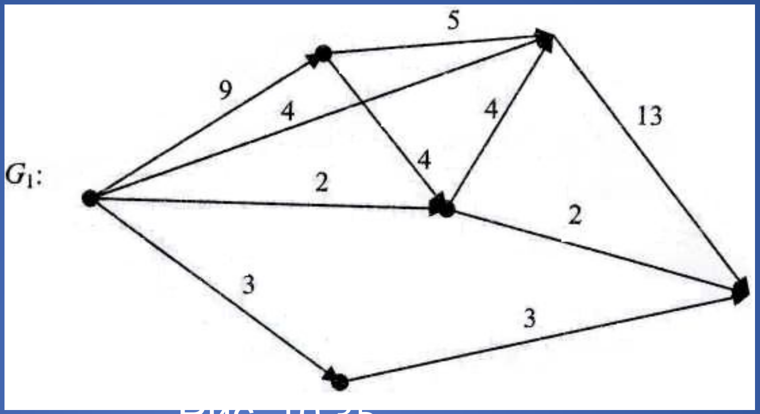

Рис. 10.35

Построенный граф *G* удовлетворяют условию потока, т.е. соблюдается равновесие вершин (величина входящего и выходящего потоков равны). Величина минимального разреза дуг равна R = 18.

Рассмотрим другой способ решения задачи, используя алгоритм построения максимального потока в сети методом увеличения потока вдоль пути, который состоит в следующем:

Выбор начального потока. Обычно выбирают нулевое начальное значение потока.

Построение увеличивающего пути от источника *s* к стоку *t*

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

3. Увеличение потока вдоль построенного пути на максимально возможную величину, полагая увеличение потока по увеличивающей дуге и уменьшение его по уменьшающей дуге.

Увеличивающей дугой называется дуга, направление которой совпадает с направлением потока и величина потока по этой дуге меньше ее пропускной способности, т.е.

$\varphi_{ik} > c_{ik}$.

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Уменьшающей дугой называется дуга, направление которой противоположное направлению потока, а величина $\varphi_{ik} > 0.$ ка отлична от нуля:

Уменьшающие и увеличивающие дуги называют **допустимыми**.

Увеличивающим путем называется элементарный путь, все дуги которого являются допустимыми.

Рассмотрим пример 10.2.

Определить максимальный поток для сети (рис. 10.34).

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Рассмотрим пример 10.2.

Определить максимальный поток для сети (рис. 10.34).

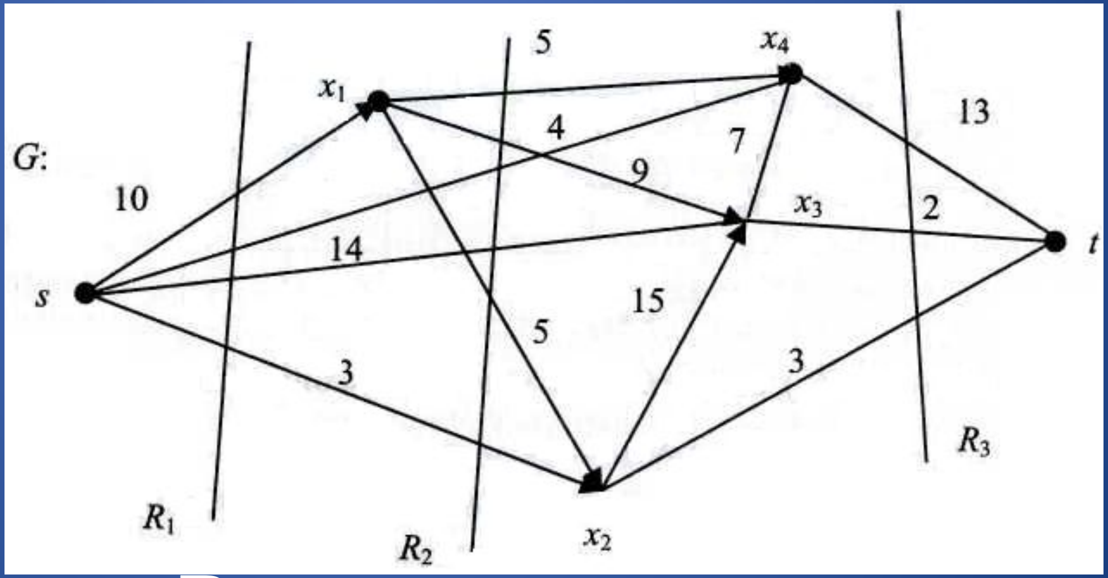

Рис. 10.34

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Решение.

Начальное значение потока полагаем равным нулю $V_o = 0$.

Построим увеличивающие пути от S к стоку *t:*

$P_l = \{s, x_1, x_4, t\}$, $\varphi_1 = \min(10; 5; 13) = 5$.

Запишем значение $\varphi_1 = 5$ в скобках на соответствующих дугах рассматриваемого пути. Для пути (рис. 10.36)

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

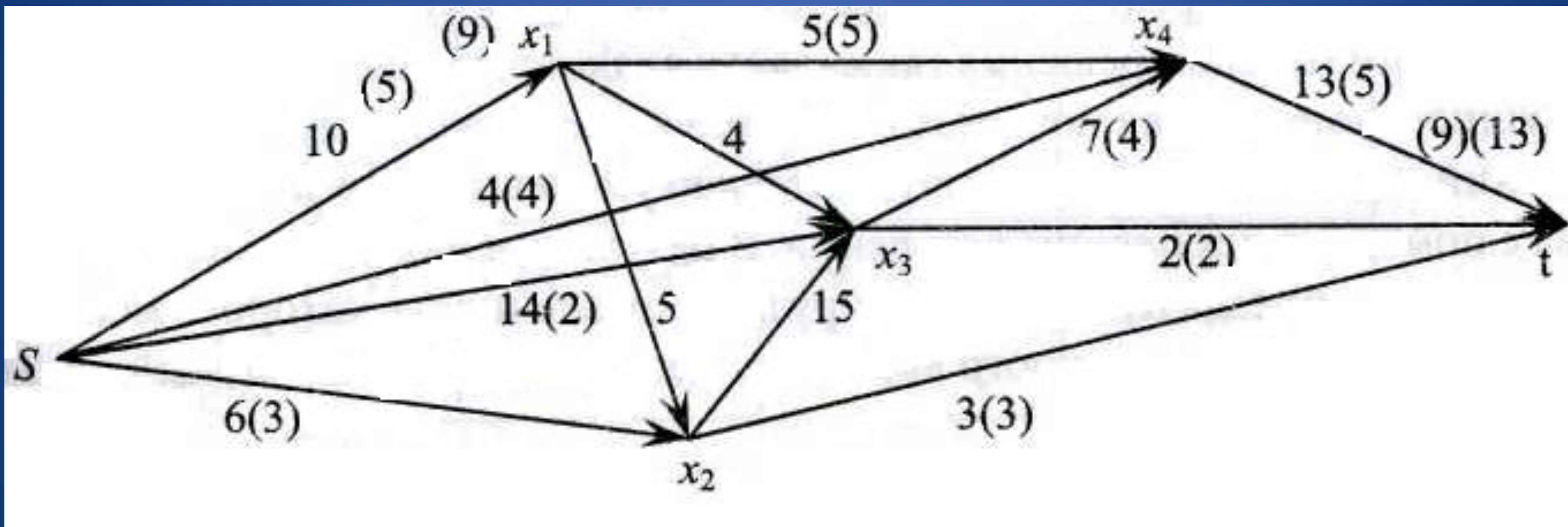

Рис. 10.36

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

$P_2 = \{s, x_4, t\}$, $\varphi_2 = \min(4; 13-5) = 4$.

Отметим на дугах пути P_2 величину $\varphi_2 = 4$. Для пути

$P_3 = \{s, x_1, x_3, x_4, t\}$, $\varphi_3 = \min(10-5; 9; 7; 13-9) = 4$.

Запишем величину $\varphi 3 = 4$ на дугах пути $P3$. Аналогично запишем пути P_i на дугах которых отметим соответствующие величины φ_i:

$P_4 = \{s, x_3, t\}$, $\varphi_4 = \min(14; 2) = 2$;

$P_5 = \{s, x_2, t\}$, $\varphi_5 = \min(6; 3) = 3$.

Пример 10.2.
Задача о максимальном потоке

Увеличивающих путей больше нет. Построим максимальный поток $П_{max}$ заданной сети (Рис.10.36)

Величина максимального потока равна сумме минимальных значений $φ_i$, i = 1,2,3,4,5

$$П_{max} = 5 + 4 + 4 + 2 + 3 = 18.$$

Значение минимального разреза $R_{min} = 18$.

Ответ: $П_{max} = R_{min} = 18$.