

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Задача заключается в определении оптимального маршрута объезда n городов по критерию времени, стоимости или длине маршрута. Эта задача связана с определением гамильтонова цикла минимальной длины.

Основным методом решения таких задач является **метод ветвей и границ**. Сущность метода заключается в том, что все множество допустимых решений задачи делится на последовательно уменьшающиеся подмножества с помощью процедуры ветвления. В результате находится последовательность объезда пунктов (маршрут), протяженность которого меньше любого другого возможного варианта, т.е. строится оптимальный кольцевой маршрут.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Построить оптимальный кольцевой маршрут для неографа $G(X,Y)$ (рис. 10.36) с вершинами $i = \overline{1,6}$. Пропускные способности ребер указаны на графе.

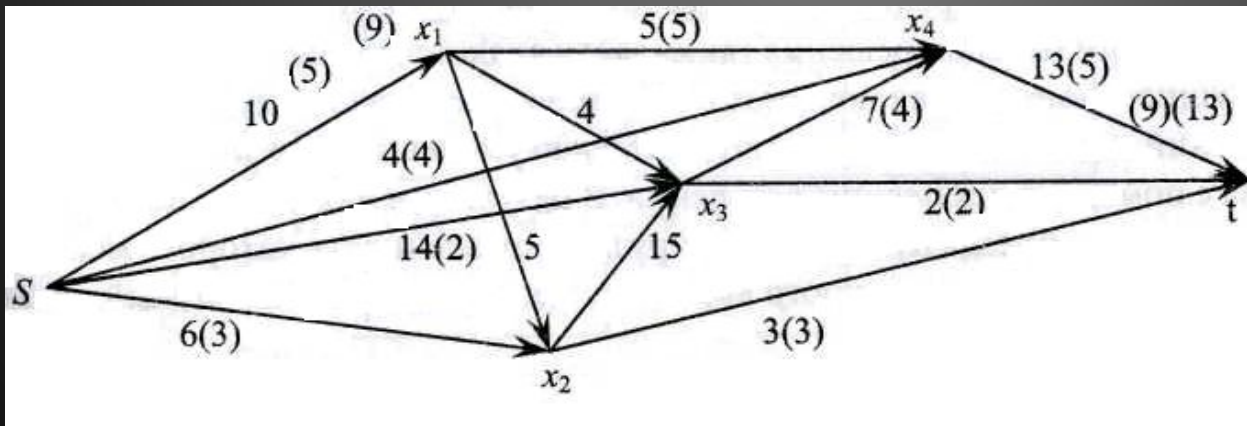
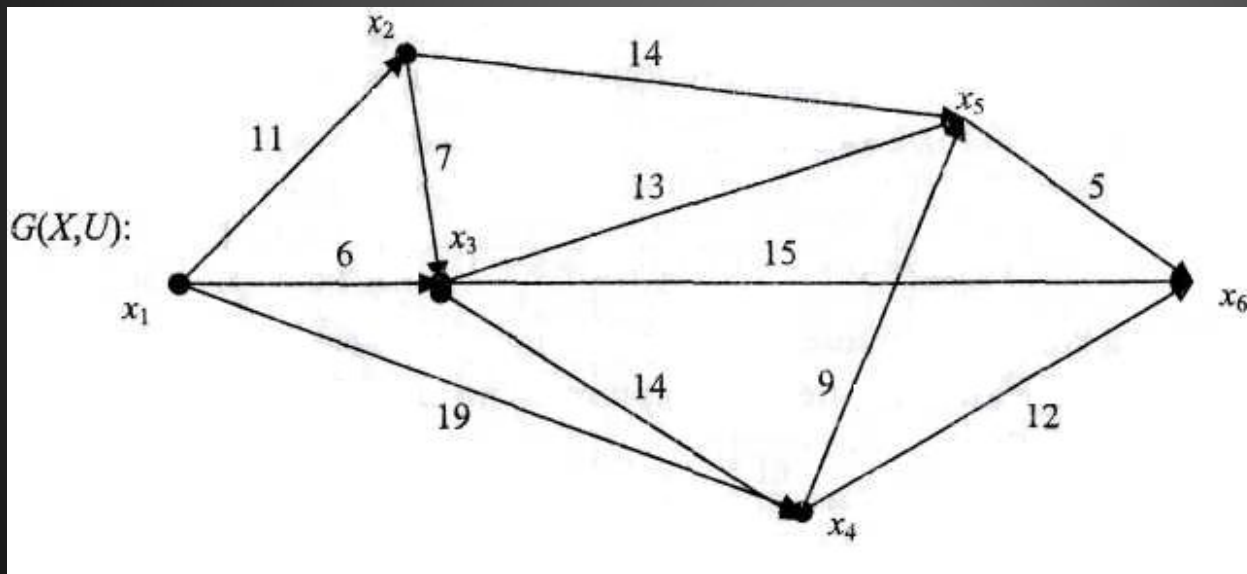


Рис. 10.36

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

1. Составим матрицу пропускных способностей ребер $C(G)$ графа $G(X,U)$ рис.10.37.



• Рис. 10.37

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Пропускную способность между однородными вершинами условно принимаем равной $c_{ii} = \infty, i = \overline{1,6}$ ности, т.е. (клетки главной диагонали матрицы C)

C_6 :

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		9	3	2	4	
x_1			0	4	5	
x_2			0			3
x_3						2
x_4						13
t						

• (10.14)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Для определения нижней границы множества выполним приведение матрицы (табл. 10.14), т.е. в каждом столбце и строке матрица должна содержать не менее одного нуля. С этой целью выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем их в правой колонке табл. 10.14.

$C(G):$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\min_k a_{ik}$
x_1	∞	11	6	18	19	21	6
x_2	11	∞	7	21	14	19	7
x_3	6	7	∞	14	13	15	6
x_4	19	21	14	∞	9	12	9
x_5	19	14	13	9	∞	5	5
x_6	21	19	15	12	5	∞	5

(10.14)

- Табл. 10.14.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Вычитая из элементов каждой строки соответствующие значения $\min a_{ik}$, получаем табл. 10.15.

$C_1(G)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	0	13	13	15
x_2	4	∞	0	14	7	12
x_3	0	1	∞	8	7	9
x_4	10	12	5	∞	0	3
x_5	14	9	8	4	∞	0
x_6	16	14	10	7	0	∞
$\min_i a_{ik}$	0	1	0	4	0	0

• Табл. 10.15

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для завершения приведения матрицы табл. 10.15 вычитаем минимальные значения в каждом столбце $\min a_{ik}$ и получим приведенную матрицу (табл. 10.16). Сумма констант приведения по строкам и столбцам матрицы составит:

$$H = 6 + 7 + 6 + 9 + 5 + 5 + 1 + 4 = 43.$$

Сумма констант приведения $H = 43$ является границей всех циклов, т.е. любой вариант кольцевого маршрута не может быть меньше этой нижней границы.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

С помощью ветвления рассматриваются циклы (последовательности обхода вершин графа), которые могут привести к построению оптимального (минимального) кольцевого маршрута.

На первом этапе построения древовидного графа множество всех циклов делится на два подмножества: первое из них включает все циклы (замкнутые маршруты) с перемещением от вершины x_i к вершине x_k , а второе множество содержит циклы без этого перемещения.

На графе ветвления от исходной вершины $H = 43$ отходят две дуги (ветви): к вершине (i, k) , изображающей первое из этих подмножеств и к вершине, указывающее второе (рис. 10.38).

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

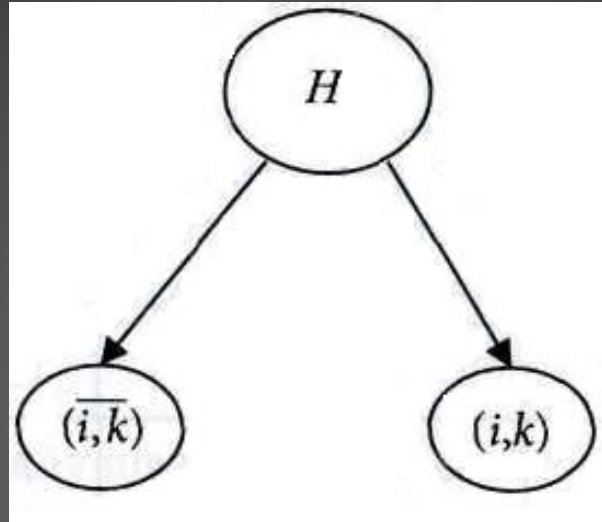


Рис. 10.38

Рассмотрим, как выбирается пара вершин (i, k) и $(i, \bar{k})$. Пара вершин (x_i, x_k) на основании $a(i, k)$, которые рассчитываются для всех клеток приведенной матрицы (10.15), содержащих нули. Для определения $a(i, k)$ в строке x_i выбирается минимальный элемент ($c_{ik} = 0$) и минимальный в столбце x_k . Эти минимальные элементы складываются, а их сумма равна значению $a(i, k)$.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- В рассматриваемом примере эти значения элементов в строках укажем справа, а в столбцах — внизу (табл. 10.16), сумму минимальных элементов запишем в клетках, содержащих нули и отметим их кружком (табл. 10.16). Вычислим $a(i,k)$ для каждой клетки с нулевыми элементами:

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	∞	4	0 (4)	9	13	15	4
x_2	4	∞	0 (4)	10	7	12	4
x_3	0 (4)	0 (4)	∞	4	7	9	0
x_4	10	11	5	∞	0 (3)	3	3
x_5	4	8	8	0 (3)	∞	0 (3)	0
x_6	16	13	10	3	0 (3)	∞	3
	4	4	0	3	0	3	

• (10.16)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$$\begin{aligned}\alpha(1,3) &= 4 + 0, & \alpha(2,3) &= 4 + 0, & \alpha(3,1) &= 0 + 4, \\ \alpha(3,2) &= 0 + 4, & \alpha(4,5) &= 3 + 0, & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3, & \alpha(6,5) &= 3 + 0.\end{aligned}$$

Запишем значения $\alpha(i,k)$ в соответствующих клетках с нулями, отмечая их кружками в табл. 10.16, выбираем наибольшее значение $\alpha(i,k)$

Таких значений в табл. 10.16 четыре. Выбираем одно из них, например, $\alpha(3,1) = 0 + 4 = 4$ (для строки x_3 и столбца x_1).

Вычеркивая их, получаем табл. 10.17, в которой нуль, расположенный в строке x_1 и столбце x_3 , заменяем на ∞ , так как вершина x_3 не должна иметь цикла (3,1), т.е. $c_{13} = \infty$

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	∞	9	13	15
x_2	∞	0	10	7	12
x_4	11	5	∞	0	3
x_5	8	8	0	∞	0
x_6	13	10	3	0	∞

• (10.17)

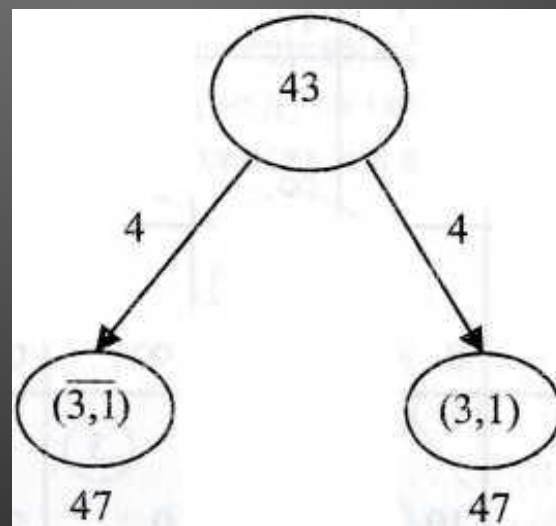


Рис. 10.39

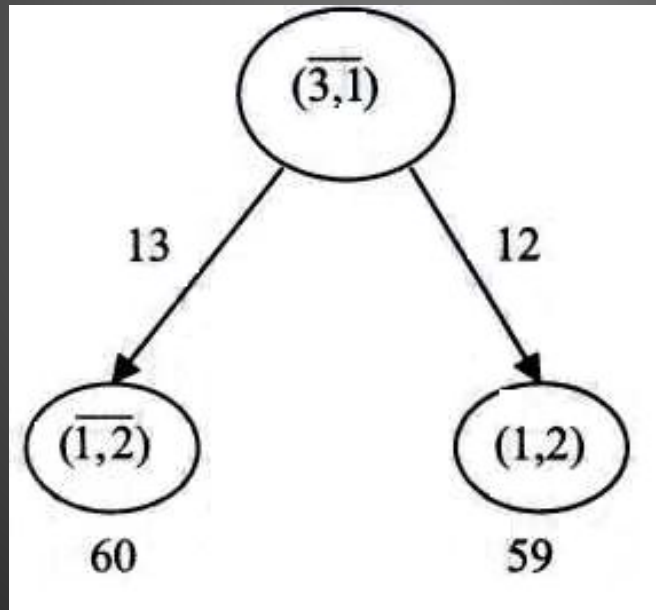
ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Определяем ребро ветвления, деля множества маршрутов на два $(\overline{3,1})$ и $(3,1)$, рис. 10.39. Нижняя граница вершины $(\overline{3,1})$ представляет сумму значений нижней границы предыдущей вершины, $\alpha(\overline{3,1}) = 4$, и $H(\overline{3,1}) = 43 + 4 = 47$.
- Для определения нижней границы вершины вторым слагаемым берется сумма констант приведения матрицы 10.17. Для приведения этой матрицы из строки x_1 следует вычесть минимальный элемент 4 и получим матрицу 10.18.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Сумма констант приведения равна $h = 4$.

Нижняя граница вершины $(3,1)$ составит $H(3,1) = 43 + 4 = 47$ (рис. 10.40).



• Рис. 10.40

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для получения следующей пары вершин от вершины (3,1) определим α и выберем новую пару вершин, входящих в концевой маршрут.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

В табл. 10.18 укажем минимальные элементы в строках и столбцах, записанных справа и внизу этой таблицы соответственно. Вычислим сумму констант приведения $\alpha(i,k)$ и включим их в табл. 10.18:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	(13) 0	∞	5	9	12	5
x_2	∞	(12) 0	10	7	12	7
x_4	11	5	∞	(3) 0	3	3
x_5	8	8	(3) 0	∞	(3) 0	0
x_6	13	10	3	(3) 0	∞	3
	8	5	3	0	3	

• Табл. 10.18

•

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$$\begin{aligned}\alpha(1,2) &= 5 + 8 = 13 & \alpha(2,3) &= 7 + 5 = 12, \\ \alpha(4,5) &= 3 + 0 & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3 & \alpha(6,5) &= 3 + 0.\end{aligned}$$

Принимаем вершины x_1 и x_2 с величиной приведения $\alpha(1,2) = 13$ в качестве звена в кольцевом маршруте.

В табл. 10.18 вычеркиваем столбец x_2 и получаем та

	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	∞	10	7	12
x_4	5	∞	0	3
x_5	8	0	∞	3
x_6	10	3	0	∞

Табл.10.19

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Определяем вершины ветвления для ребер $(1, \overline{1,2})$.

Нижняя граница вершины $\overline{1,2}$ определяется из условия $H(\overline{1,2}) = H(3,1) + \alpha(1,2)$, $H(\overline{1,2}) = 47 + 13 = 60$.

Для определения нижней границы вершины $(1,2)$ вторым слагаемым берем сумму констант приведения табл. 10.19, вычитая из строки x_2 $a_{25} = 7$ и в столбце x_3 величину $\alpha_{43} = 5$, чтобы матрица имела нули в каждой строке и каждом столбце.

Величина приведения

$$h = 7 + 5. H(1,2) = 47 + 7 + 5 = 59.$$

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Приведенная матрица табл. 10.20 имеет вид:

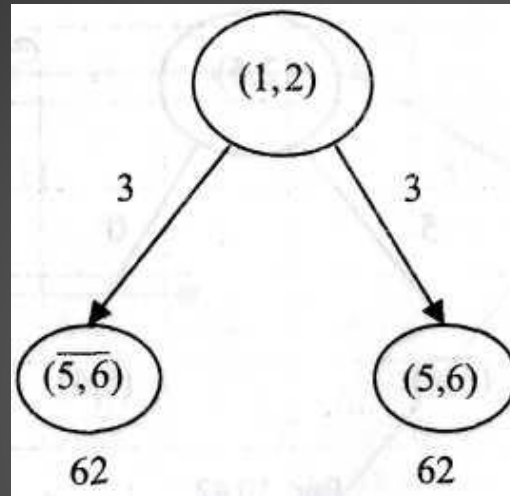
	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	∞	3	0	5	3
x_4	0	∞	0	3	0
x_5	8	0	∞	0	0
x_6	5	3	0	∞	3
	3	3	0	3	

- Табл. 10.20

- Определяем значения $\alpha(i,k)$ для клеток с нулевыми элементами:

$$\begin{aligned} \alpha(2,5) &= 3 + 0, & \alpha(4,3) &= 0 + 3 = 5, \\ \alpha(4,5) &= 0 + 0, & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3, & \alpha(6,5) &= 3 + 0. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



• Рис. 10.41

Исключаем из табл. 10.20 x_5 строку и столбец x_6 .

Получаем табл. 10.21

	x_3	x_4	x_5
x_2	∞	3	0
x_4	0	∞	0
x_6	5	3	∞

• (10.21)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

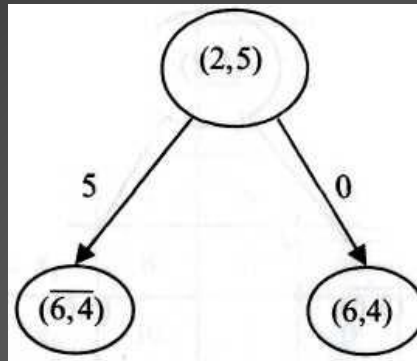
- Приведем табл. 10.21, вычитая из каждого элемента строки x_6 минимальный элемент $a_{64} = 3$, Получаем табл. 10.22 в виде:

	x_3	x_4	x_5	
x_2	∞	3	$\textcircled{3}$ 0	3
x_4	0	∞	0	0
x_6	2	$\textcircled{5}$ 0	∞	2

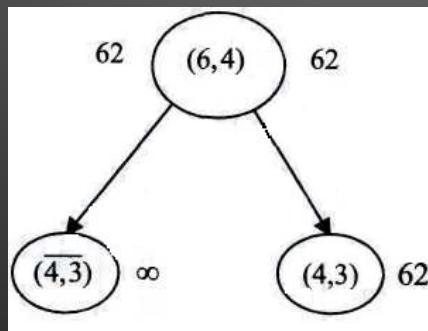
• (10.22)

- Строим подграф (рис. 10.42), исключаем в табл. 10.22 строку x_6 и столбец x_4 , так как $\alpha(6,4) = 5$. Получаем табл. 10.23, в которой $\alpha_{44} = 0$. Заменяем ∞ чтобы исключить цикл.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



	x_3	x_5
x_2	∞	∞ 0
x_4	∞ 0	∞



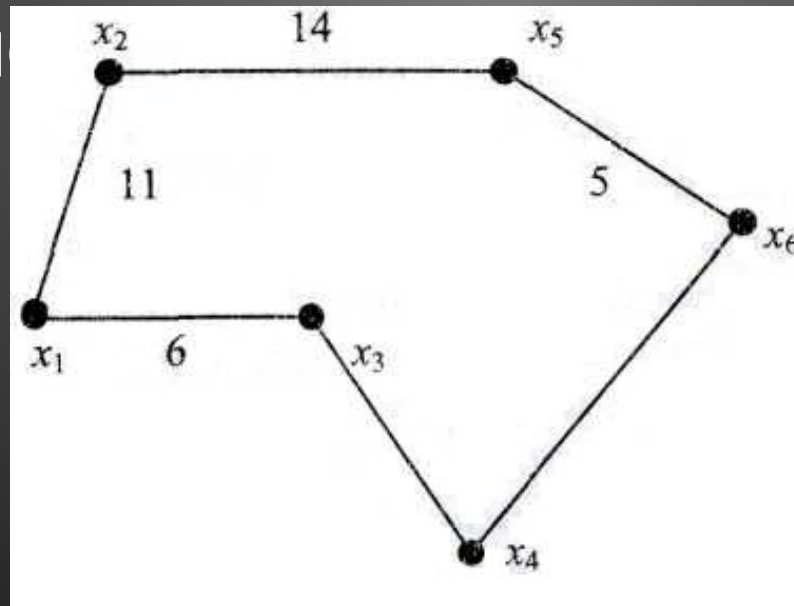
• Рис. 10.42

• (10.23)

• Рис. 10.43

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Строим древовидный граф ветвлений (рис. 10.45), соединяя отдельные элементы графа (рис. 10.39-10.43) и гамильтонов цикл обхода вершин исходного графа (рис. 10.44).

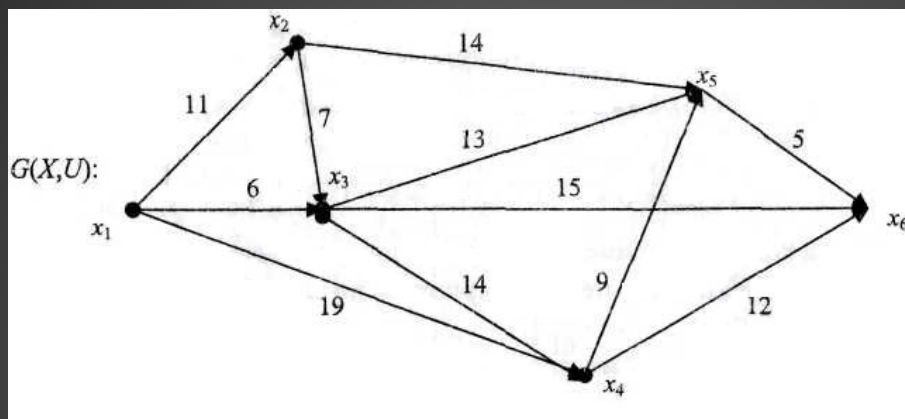


• Рис. 10.44

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Гамельтонов цикл образуют ребра (x_3, x_1) , (x_1, x_2) , (x_2, x_5) , (x_5, x_6) , (x_6, x_4) , (x_4, x_3) .
- Длина маршрута обхода вершин $x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$ графа $G(X, Y)$ (рис. 10.37) составляет $M = 6 + 11 + 14 + 5 + 12 + 14 = 62$ и совпадает с нижней границей графа (рис. 10.45).

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



• Рис.10.37

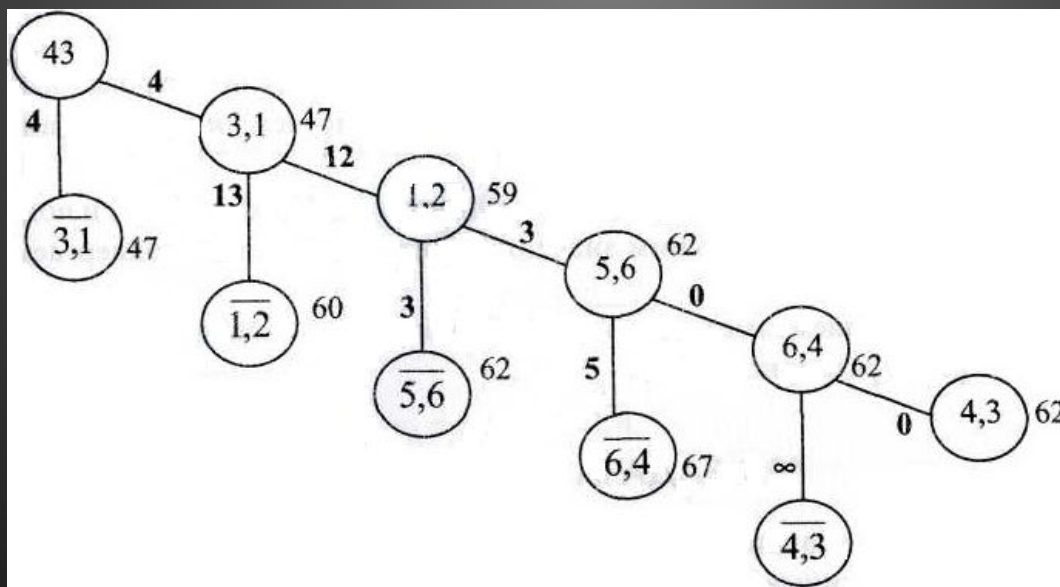


Рис. 10.45

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Последовательность решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ состоит в следующем:

1. На основании графа посещения городов составляется матрица расстояний от соответствующих вершин.
2. Проводится приведение матрицы, вычитая минимальные элементы по строкам и столбцам.
3. Определяем нижнюю границу всего множества маршрутов, складывая значения вычитаемых минимальных элементов.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

4. В каждой клетке приведенной матрицы, в которых $a_{ik} = 0$, заменяем поочередно нули на ∞ и вычисляем суммы новых констант приведения $H(x_i, x_k)$, которые записываем в клетке с нулем, отмеченной кружком.
5. Выбираем ребро ветвления (i, k) по максимальной величине суммы констант приведения H_{max} . Затем исключаем его из множества путем замены элемента матрицы $a_{ik} = \infty$. В результате будет определено подмножество маршрутов $\{(i, k)\}$.
6. В полученной матрице расстояний по строкам получаем нули, вычитая минимальное значение элементов в соответствующих строках и определяем нижнюю границу подмножества маршрутов $H(i, k)$.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

7. Включаем ребро (i,k) в маршрут, вычеркивая строку i и столбец k в приведенной матрице расстояний и заменяя симметричный элемент $a_{ik} = \infty$ для исключения образования негамельтонова цикла.
8. Приводим сокращенную матрицу (получаем нули в строках вычитанием минимального элемента) и определяем нижнюю границу подмножества $H(i,k)$.
9. Сравниваем нижние границы подмножеств $H(i,k)$ и $H(\underline{i},\underline{k})$ и подмножество с меньшим значением нижней границы подвергаем ветвлению.
10. Определяем гамельтонов цикл при получении окончательной матрицы размерности 2×2 .