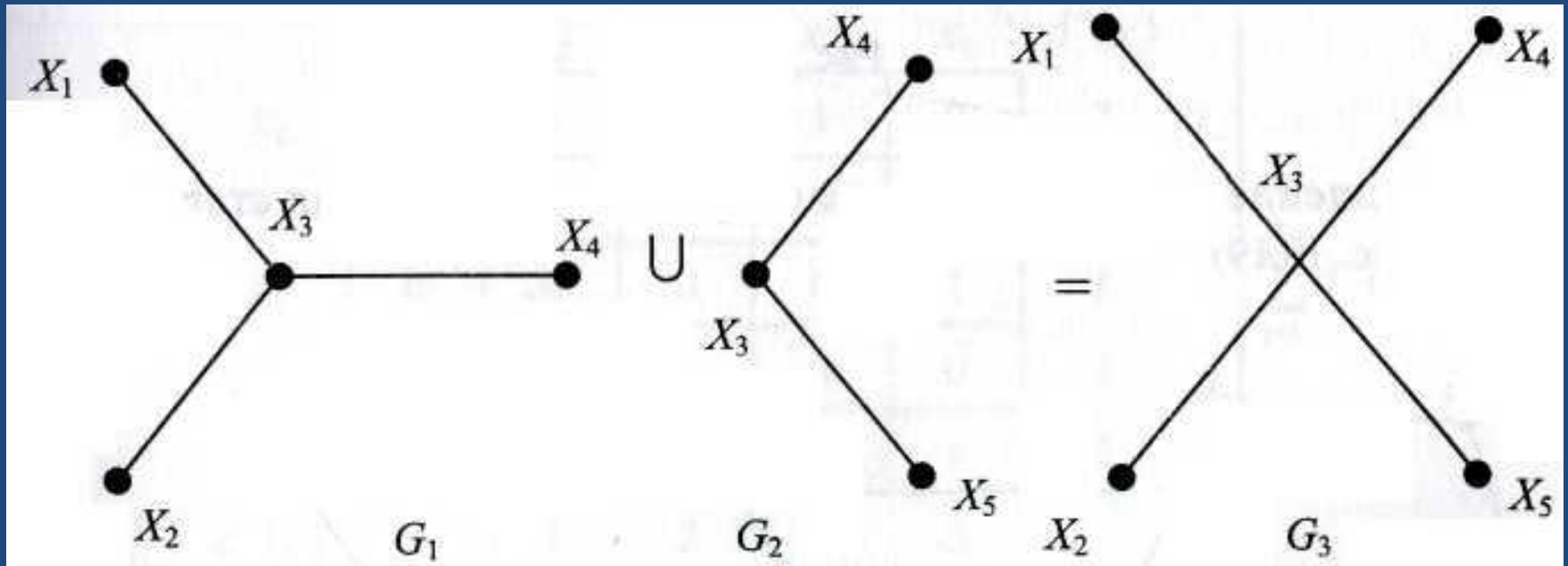


# ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- **Удаление вершин или ребер** — это операция, с помощью которой можно из заданного графа  $G = (X, U)$  получить граф с меньшим числом элементов (вершин и ребер).
- **Добавление ребра** — это операции по соединению несмежных вершин графа.
- **Объединение графов.** Граф  $G_3$  является наложением графов  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 10.16).

# ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ



• Рис. 10.16

# ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 4. Произведение двух графов  $G_1$  и  $G_2$  есть граф  $G$ , для которого  $x_1 \cdot x_2 = G$  (рис. 10.17)

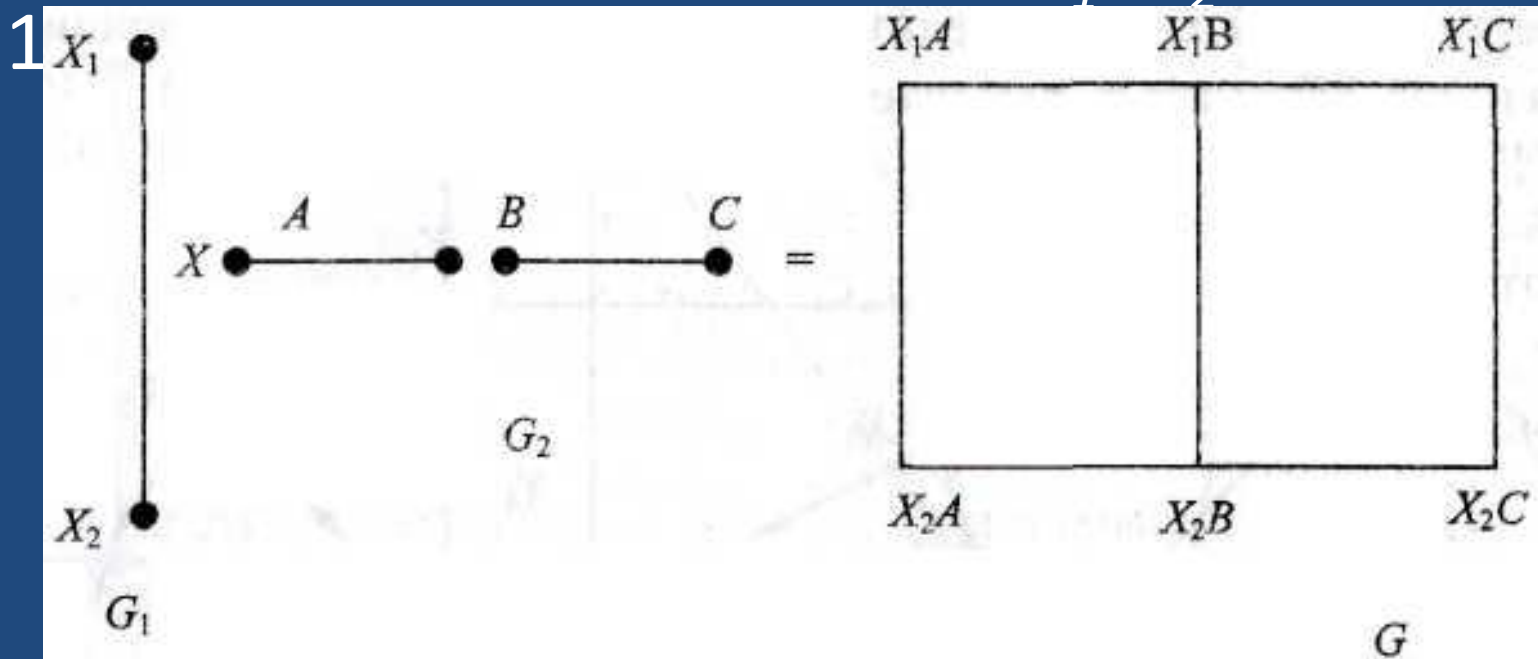


Рис. 10.17

# ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 5. Стягивание ребра означает отождествление смежных вершин (рис. 10.18).

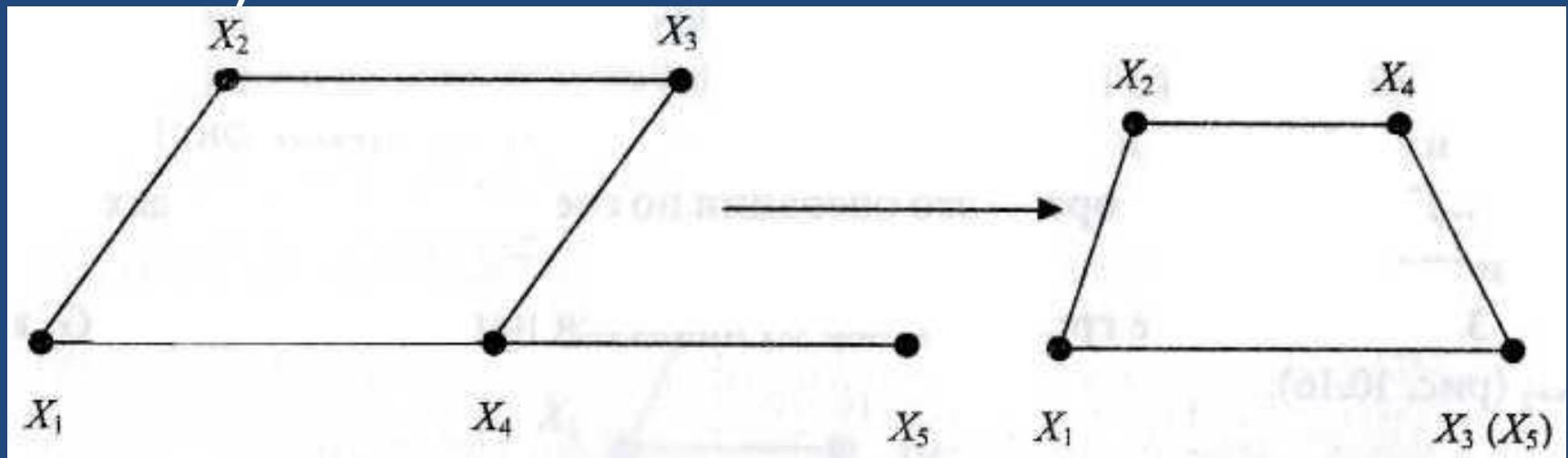


Рис. 10.18

# ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 6. Расщепление вершин — это операция двойственная стягиванию

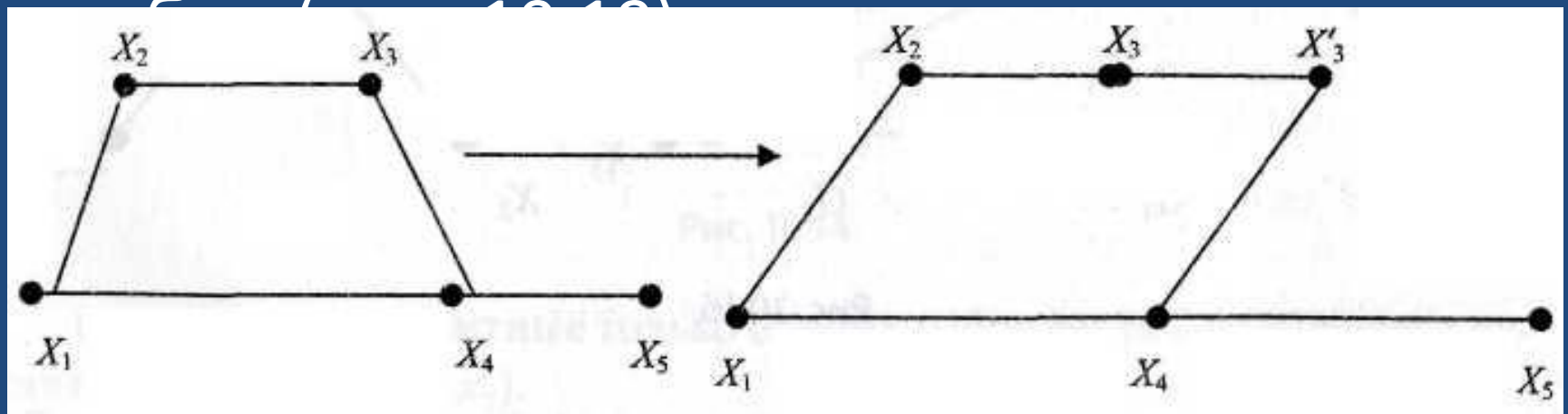


Рис. 10.19

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Графы можно задавать с помощью матриц. Построим некоторые из них.

Матрицей смежности вершин графа

называется квадратная матрица  $A = \{a_{ik}\}$  размером  $n \times n$ , у которой строки и столбцы соответствуют вершинам, а элементы  $a_{ik}$  определяют из условий:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_k \text{ смежны, т.е. существует дуга } (x_i, x_k); \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Для орграфа (рис. 10.20) построить матрицу смежности  $A(G)$ .

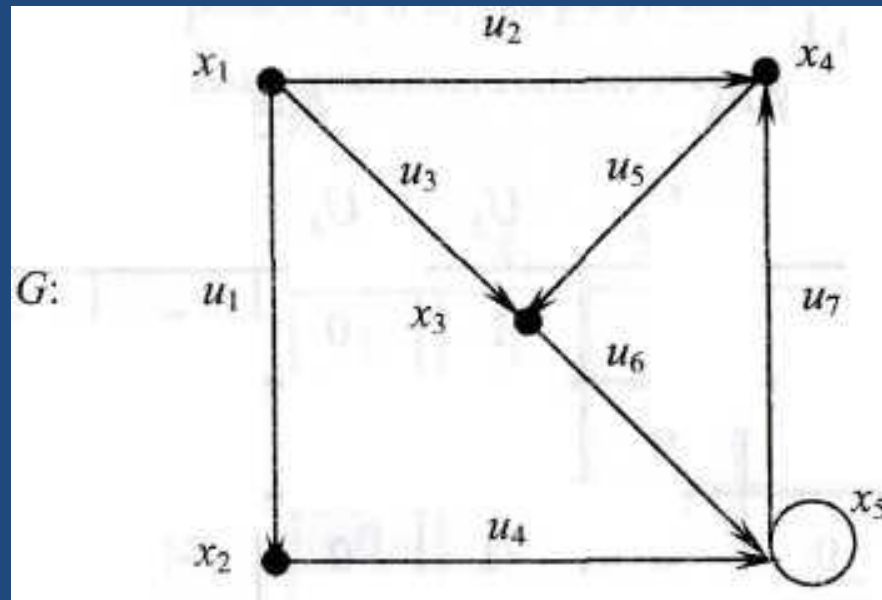


Рис. 10.20

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$A(G) =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$d^+(x_i)$
$x_1$	0	1	1	1	0	3
$x_2$	0	0	0	0	1	1
$x_3$	0	0	0	0	1	1
$x_4$	0	0	1	0	0	1
$x_5$	0	0	0	1	1	2
$d^-(x_i)$	0	1	2	2	3	

$\left. \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \\ \text{Row 4} \\ \text{Row 5} \end{array} \right\} \sum_{i=1}^5 d^+(x_i) = 8;$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\sum_{i=1}^5 d^-(x_i) = 8.}$



# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей инциденций  $B(G) = \{b_{ik}\}$  орграфа  $G = (X, U)$  называется прямоугольная матрица размерности  $n \times m$  ( $n$  — число вершин графа,  $m$  — количество дуг), элементы которой удовлетворяют

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } u = (x_i, x_k); \\ -1, & \text{если } x_i \text{ является концевой вершиной дуги } u = (x_i, x_k); \\ 0, & \text{если } x_i \text{ не является вершиной дуги } u_k, \text{ т.е. вершина } x_i \\ & \text{и дуга } u_k \text{ неинцидентны;} \\ 2, & \text{если дуга } u_k = (x_i, x_i) \text{ является петлей.} \end{cases}$$

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- В матрице инциденций для неографа при ее построении элементы -1 следует заменить на 1.
- Построим матрицу  $B(G)$  инциденций для орграфа  $G$  (рис. 10.20).

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$	$U_8$
$x_1$	1	1	1	0	0	0	0	0
$x_2$	-1	0	0	1	0	0	0	0
$x_3$	0	0	-1	0	-1	1	0	0
$x_4$	0	-1	0	0	1	0	-1	0
$x_5$	0	0	0	-1	0	-1	1	2

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей пропускных способностей дуг  $C(G) = \{c_{ik}\}$  графа  $G$  называется квадратная матрица размерности  $n \times n$ , элементы которой определяют из условий:

$$c_{ik} = \begin{cases} c_{ik} & \text{— величина, равная значению пропускной способности дуги;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицу пропускных способностей дуг  $C = (G)$  можно построить на основании матрицы смежности  $A = (G)$ , в которой 1 заменяются значением  $c_{ik}$  пропускной способности соответствующей дуги графа.

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей достижимостей  $D(G) = \{d_{jk}\}$  графа  $G$  называется квадратная матрица размерности  $n \times n$  ( $n$  — число вершин орграфа), элементы которой удовлетво

$C(G) :$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	0	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{14}$	0
$x_2$	0	0	0	0	$C_{25}$
$x_3$	0	0	0	0	$C_{35}$
$x_4$	0	0	1	$C_{43}$	0
$x_5$	0	0	0	$C_{45}$	$C_{55}$

# МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$$d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_k \text{ достижима из вершины } x_i, \\ & \text{т.е. для вершин } x_k \text{ и } x_i \text{ орграфа можно указать путь;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$D(G) :$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	1	1	1	1	0
$x_2$	0	1	1	1	1
$x_3$	0	0	1	1	1
$x_4$	0	0	1	1	1
$x_5$	0	0	1	1	1

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Граф  $G(X, U)$ , в котором все вершины соединены простой цепью называется **СВЯЗНЫМ**.

Отношение связности вершин графа называется **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ**. Классы эквивалентности по отношению к СВЯЗНОСТИ называются **КОМПОНЕНТАМИ СВЯЗНОСТИ** графа, или компонентой связности графа называется его связный подграф.

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

На рис. 10.22, а граф имеет две компоненты связности, на рис. 10.20, б у графа 3 компоненты связности.

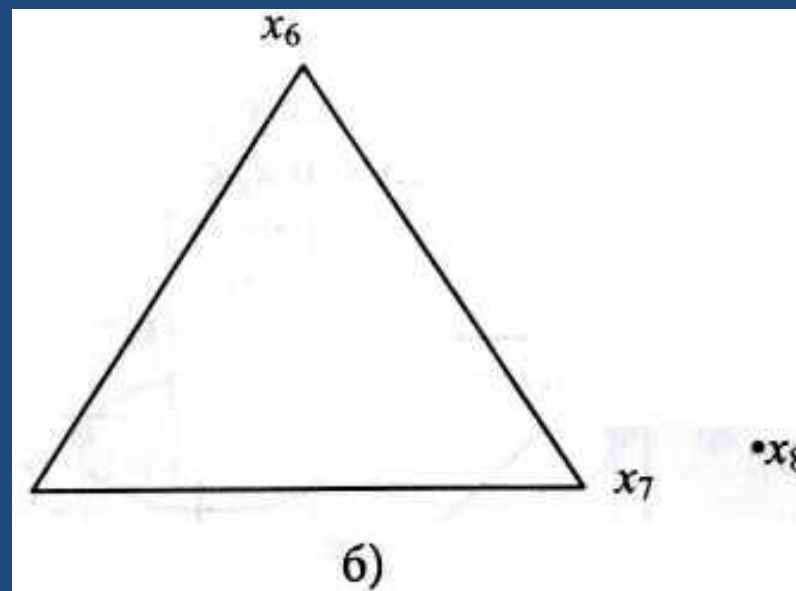
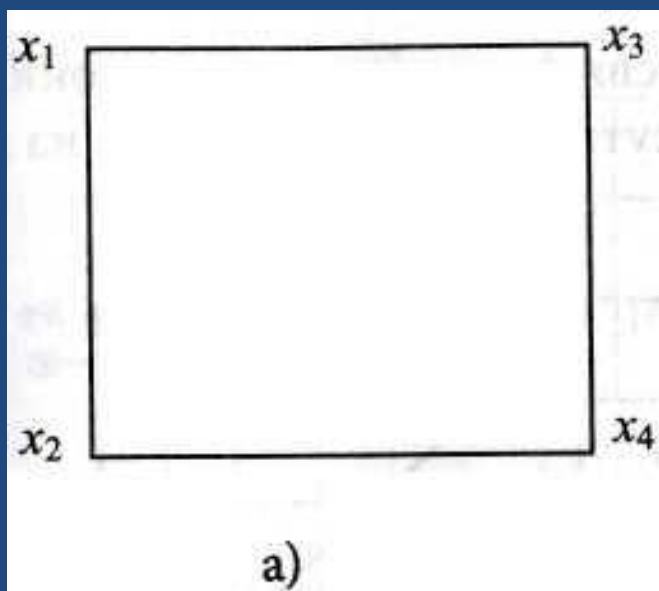


Рис. 10.22

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Число компонент связности графа  $G$  обозначается  $k(G)$ .

Граф  $G$  является **связным**, когда  $k(G) = 1$ .

Если  $k(G) > 1$ , то граф называется **несвязным**. Например, для графа на рис. 10.24  $k(G) = 1$ , для графа (рис. 10.25)  $k(G) = 2$  и для графа  $G$ , представленного на рис. 10.26,  $k(G) = 3$ .

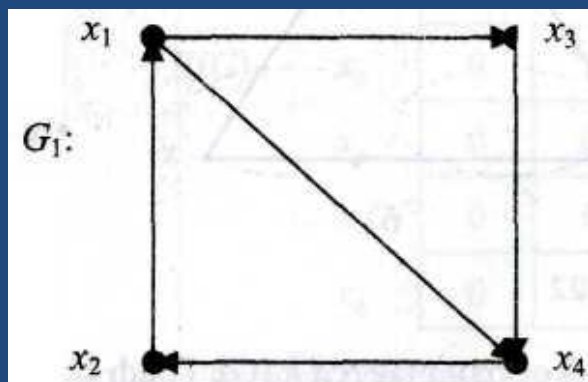


Рис. 10.24

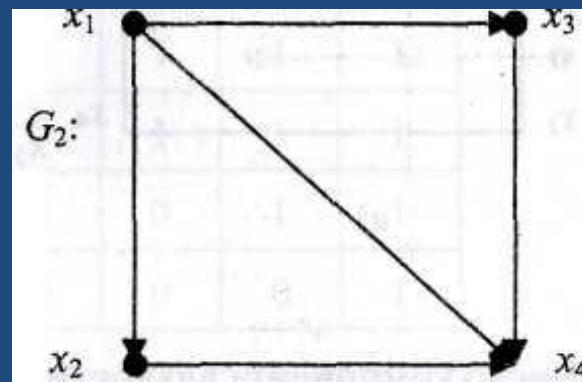


Рис. 10.25



# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Вершина графа  $G$  называется **точкой сочленения**, если ее удаление увеличивает число компонент связности.

**Мостом** называется ребро графа, удаление которого увеличивает число компонент связности.

**Блоком** называется связный граф, не имеющий точек сочленения.

На рис. 10.23, в графе  $G$ : вершины  $x_3$  и  $x_4$  являются точками сочленения, ребро  $U_4(x_3, x_4)$  называется мостом и связные подграфы  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\{x_4, x_5, x_6\}$ ,  $\{x_5, x_6, x_7\}$ ,  $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$  являются блоками.

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

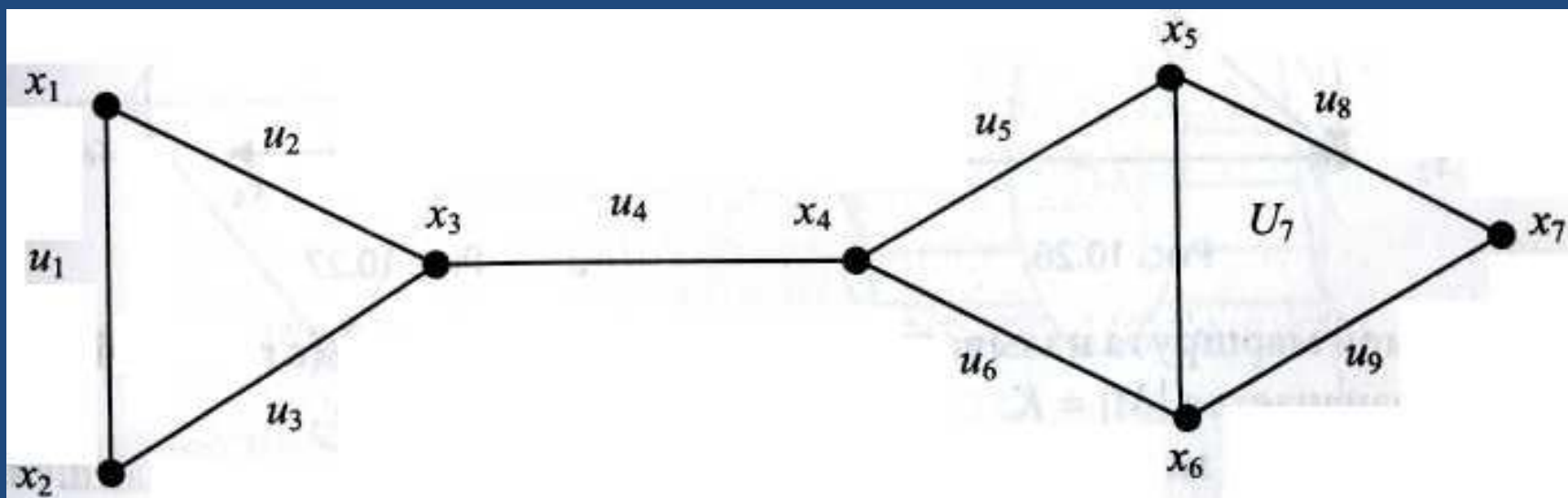


РИС. 10.23

**Теорема.** Граф  $G = (X, U)$  связан тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух графов.

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф  $G_1$  называется **сильно связным** графом или **сильным**, если для любых различных двух вершин  $x_i$  и  $x_k$  существует по крайней мере один путь, соединяющий эти вершины, т.е. любые две вершины взаимно достижимые (рис. 10.24).

Орграф  $G_2$  называется **односторонне связным** или **односторонним**, если для двух вершин  $x_i$  и  $x_k$  существует путь либо из  $x_i$  в  $x_k$ , либо из  $x_k$  в  $x_i$  (рис. 10.25).

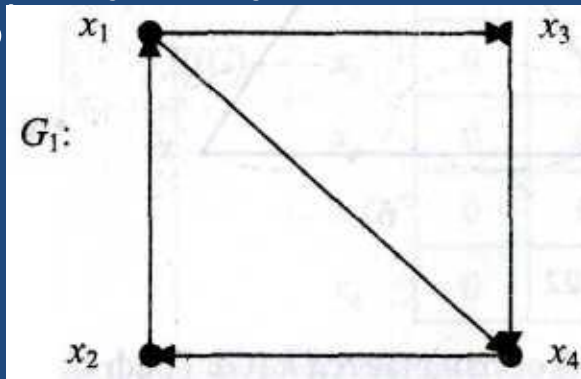


Рис. 10.24

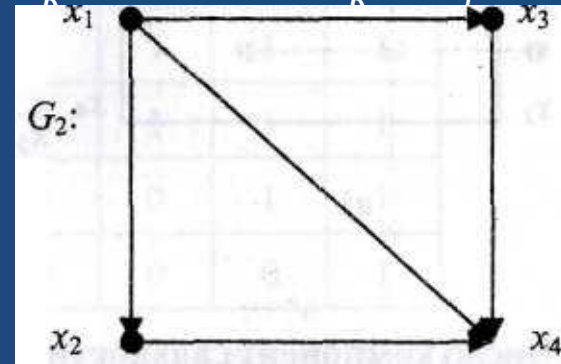


Рис. 10.25

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф  $G_3$  называется **слабосвязным** или **слабым**, если для двух любых вершин графа существует по крайней мере один маршрут (рис. 10.26).
- Орграф  $G_4$  называется **несвязным**, если для некоторой пары вершин его не существует маршрута, соединяющего

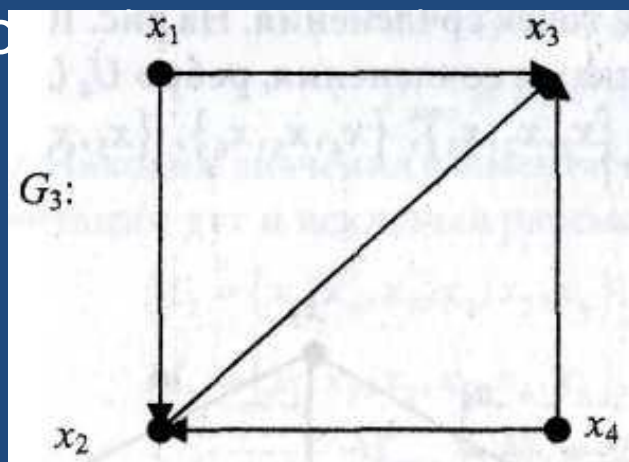


Рис. 10.26

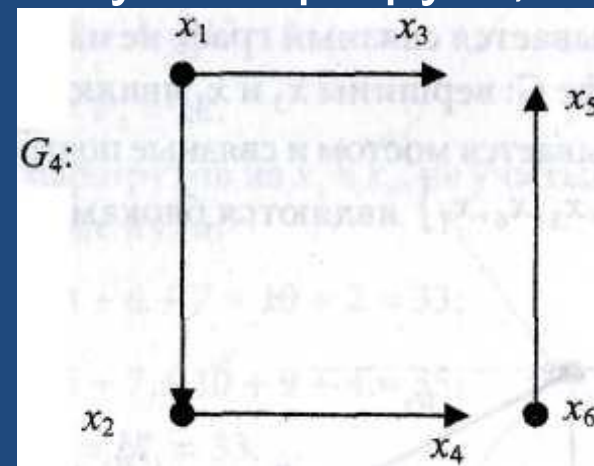
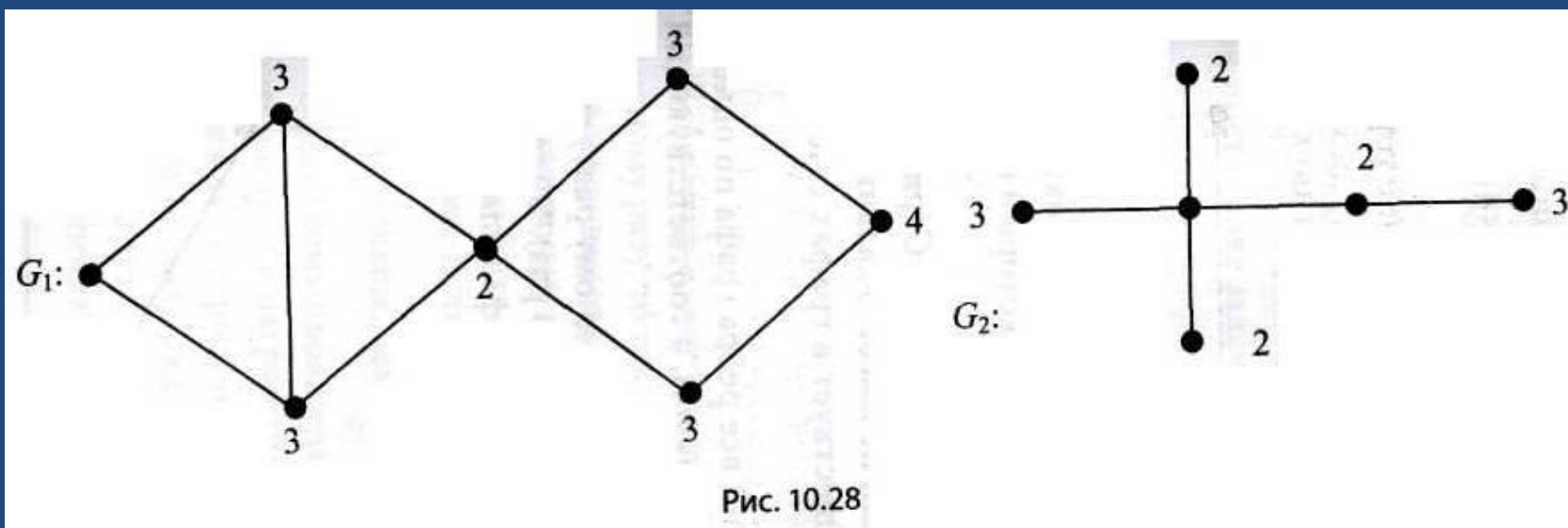


Рис. 10.27

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Длиной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями). Обозначается  $|M| = K$ .
- Расстоянием между вершинами  $x_i$  и  $x_k$  называется длина кратчайшей цепи, а сама кратчайшая цепь называется **геодезической**. Обозначается расстояние  $l(x_i, x_k)$ .
- **Диаметром графа**  $G$  (обозначается  $D(G)$ ) называется длина наибольшей геодезической.
- **Эксцентриситетом**  $e(x_i)$  вершины  $x_i$  в связном графе  $G(X, U)$  называется максимальное расстояние от вершины до других вершин графа  $G$ .
- **Радиусом**  $R(G)$  графа  $G$  называется наименьший из эксцентриситетов вершин.
- Вершина  $x_i$  называется **центральной**, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, т.е.  $e(x_i) = R(G)$ .

# СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ



- На рис. 10.28 указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов  $G_1$  и  $G_2$ .
- Вершины, составляющие центры, выделены.

# Циклы Эйлера и Гамильтона

- Задача Эйлера (о кенигсбергских мостах) заключается в нахождении маршрута путем обхода семи мостов по одному разу, который начинается и оканчивается в одной части города, рис. 10.29.
- При решении задачи (рис. 10.29, а) Эйлер составил граф  $G$  (рис. 10.29, б) и доказал, что поставленная задача решений не имеет. Указанный замкнутый маршрут, называемый циклом, существует в графах с четными степенями вершин.

# Циклы Эйлера и Гамильтона

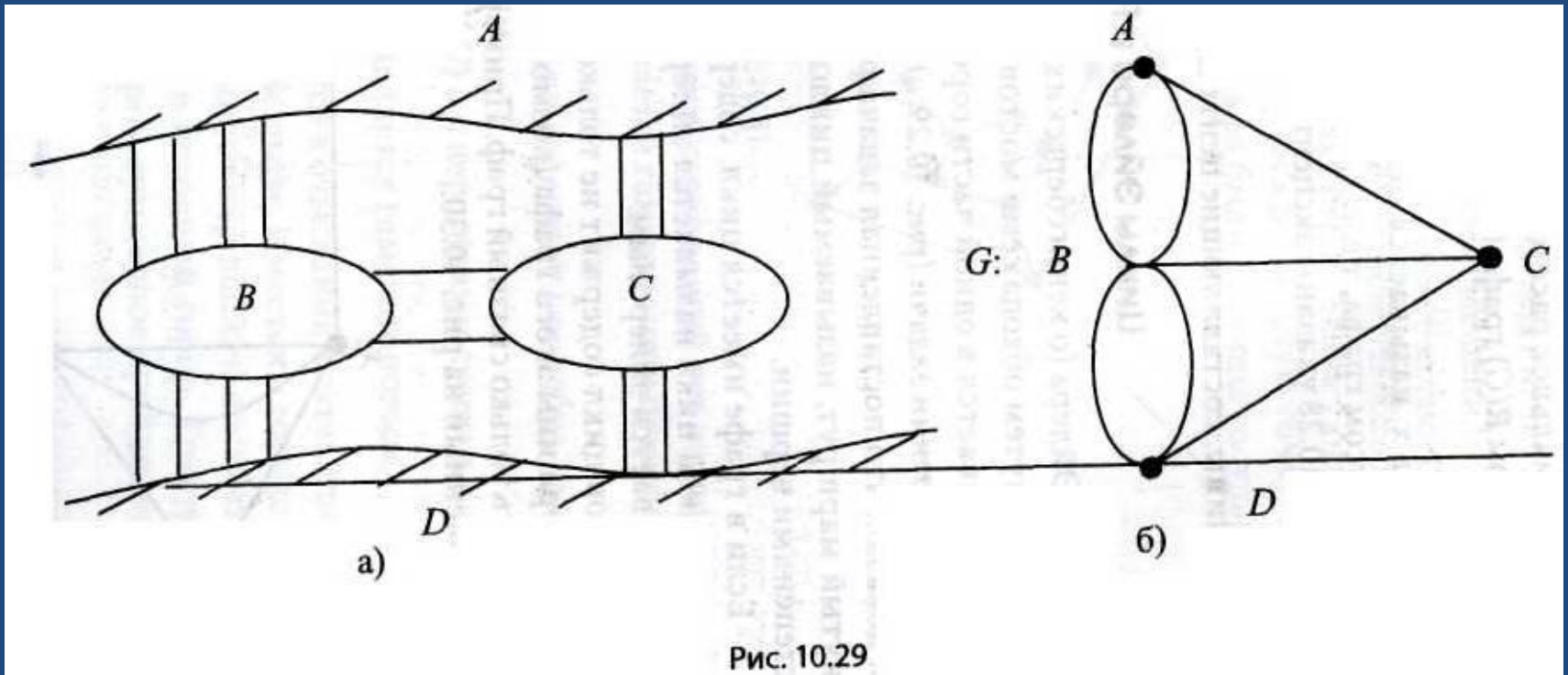


Рис. 10.29

Если в графе имеется цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а соответствующий граф называется эйлеровым.



# Циклы Эйлера и Гамильтона

Эйлеров цикл содержит не только все ребра (по одному разу) графа, но и все вершины этого графа (возможно по несколько раз).

Эйлеровым может быть только связный граф.

Примером такого графа является граф, представленный на рис. 10.30.

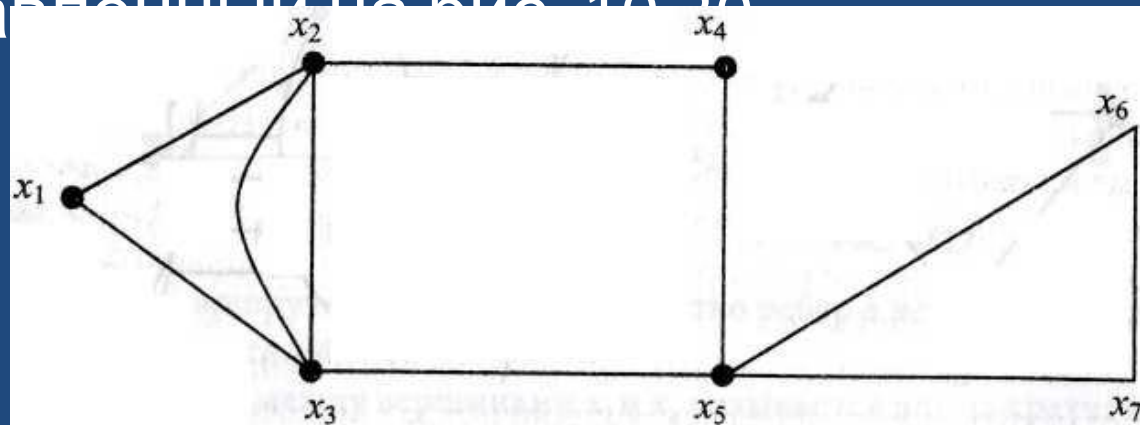


Рис. 10.30

# Циклы Эйлера и Гамильтона

- Теорема Эйлера. Если граф  $G = (X, U)$  связан и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны:
  - $G = (X, U)$  — эйлеров граф.
  - Каждая вершина имеет четную степень.
  - Множество ребер можно разбить на простые цепи.

# Циклы Эйлера и Гамельтона

Название **гамельтоновых циклов**

произошло от задачи о кругосветном путешествии, сформированной У.

Гамельтоном: Необходимо обойти все вершины графа, диаграмма которого представляла укладку додекаэдра (рис. 10.31), по одному разу и вернуться в исходную точку. В начальной постановке задачи вершинами графа были столицы государств.

# Циклы Эйлера и Гамильтона

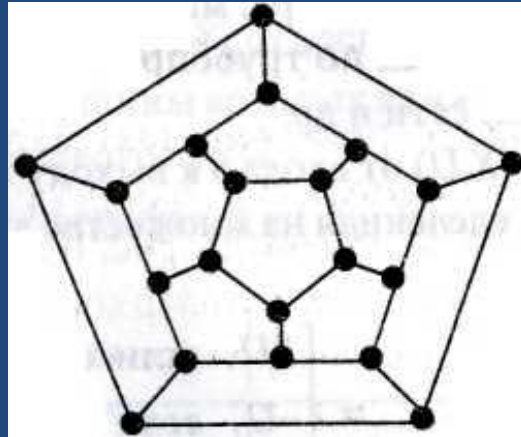


Рис. 10.31

- Если граф имеет простейший цикл, содержащий все вершины графа по одному разу, то такой цикл называется **гамильтоновым циклом**, а граф называется **гамильтоновым**.
- Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа, но сам граф может быть только связным.

# Циклы Эйлера и Гамильтона

**Теорема.** Если в графе  $G = (X, U)$  с  $n$  вершинами степень каждой вершины не меньше  $\frac{n}{2}$ , то граф является гамильтоновым.

**Задача коммивояжера** заключается в отыскании кратчайшего гамильтонова цикла в нагруженном полном графе.

*Имеется  $n$  городов, расстояние между которыми известны, коммивояжер должен посетить все  $n$  городов по одному разу, вернувшись в исходный город. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.*

# Циклы Эйлера и Гамильтона

- Составляя задачи отыскания эйлеровых и гамельтоновых циклов, следует отметить, что внешне формулировки задач похожи, однако они оказываются принципиально различными с точки зрения практического применения.
- Эйлером получено просто проверяемое необходимое и достаточное условие существования в графиках эйлерова цикла.
- Для гамельтоновых графов таких условий нет, поэтому алгоритма построения таких циклов нет.