Презентация по Математическому Анализу Семинар 34

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ (1) относительно y, y' называется линейным.

Если функция $Q(x) = 0$, то уравнение **(1)** принимает вид $y' + P(x)y = 0$ **(2)** называется однородным линейным дифференциальным уравнением. В этом случае переменные разделяются и общее решение уравнения **(2)** есть $y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$ **(3)**

Для решения неоднородного линейного уравнения **(1)** применяем так называемый метод вариации произвольной постоянной.

Этот метод состоит в том, что сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, то есть соотношение **(3).**

Затем, полагая в этом соотношении величину ***C*** функцией от ***x***, ищем решение неоднородного уравнения **(1)** в виде **(3).**

Для этого подставляем в уравнение **(1)** y, y', определяемые из **(3)**, и из полученного дифференциального уравнения определяем функцию ***C(x).***

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения **(1)** получаем в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Для решения линейного уравнения **(1)** можно также применить подстановку $y=uv$ (4)

, где ***u, v*** – функции от x.

Тогда уравнение **(1)** примет вид:

$$[u'+P(x)u]v+v'u=Q(x) \qquad (5)$$

Если потребовать, чтобы $u'+P(x)u=0$ **(6),** то из **(6)** найдем ***u***, затем из **(5)** найдем ***v***, а следовательно, из **(4)** найдем ***y***.

Уравнение Бернулли

Уравнение 1-го порядка вида $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0; \alpha \neq 1$, называется уравнением Бернулли. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z=y^{1-\alpha}$

Можно также непосредственно применять подстановку ***y=uv***, или метод вариации произвольной постоянной.

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $y'+\frac{2y}{x}=x^{3}$

<u>Решение</u>. Замена ***y=uv***.

Далее решаем систему уравнений: $\begin{cases} u'+P(x)u=0 \\ v'u=Q(x) \end{cases}$, то есть в нашем случае

$$\begin{cases} u'+\dfrac{2}{x}u=0 \\ v'u=x^{3} \end{cases}$$

Первое уравнение – уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2u}{x}\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{2dx}{x}\Rightarrow\ln u=-2\ln x\Rightarrow u=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow v'\left(-\frac{1}{x^2}\right)=x^3\Rightarrow v'=-x^5\Rightarrow v=-\frac{x^6}{6}+c$$

Следовательно, $y=-\frac{1}{x^2}(c-\frac{x^6}{6})$

2. Решить уравнение $y'=tgx\cdot y+\cos x$

__**Решение**__. Соответствующее однородное уравнение есть $y'-tgx\cdot y=0$.

Решая его, получим $y=\frac{C}{\cos x}$.

Считая ***C*** функцией от ***x***, дифференцируя, находим $y'=\frac{1}{\cos x}\frac{dC}{dx}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}C$.

Подставляя ***y*** и ***y’*** в исходное уравнение, получим:

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dC}{dx}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}C=tgx\frac{C}{\cos x}+\cos x\Rightarrow\frac{dC}{dx}=\cos^2 x\Rightarrow C(x)=\int\cos^2 xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1\right)\frac{1}{\cos x}$$

3. Решить уравнение $$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Решение. Это – уравнение Бернулли $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

Полагаем ***y=uv***, получим:

$$u'v + uv' = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \Rightarrow v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv} \qquad \textbf{(*)}$$

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения $u' - \frac{4}{x}u = 0 \Rightarrow u = x^4$

Подставляя это выражение в уравнение **(*)**, получим:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4} \Rightarrow v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

Следовательно, общее решение получим в виде:

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

4. Решить уравнение $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$

Решение. Это – уравнение Бернулли.

Проинтегрируем его методом вариации произвольной постоянной.

Для этого интегрируем сначала соответствующее линейное однородное уравнение $y'+\frac{y}{x}=0$, решение которого $y=\frac{C}{x}$.

Далее, ищем решение исходного уравнения Бернулли, полагая

$$y=\frac{C(x)}{x},\ y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$$

Подстановка ***y, y'*** в исходное уравнение дает

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4\Rightarrow\frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x}\Rightarrow-\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C\Rightarrow C(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{3\ln(C/x)}}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}$$

Примеры для самостоятельного решения.

Решить уравнения:

1. $xy' - y = x^2 \cos x$
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
3. $y'\cos x + y = 1 - \sin x$
4. $(1 + x^2)y' + y = arctgx$
5. $y'\sin x - y\cos x = 1; y(\pi/2) = 0$
6. $y'(x + y^2) = y$
7. $y' + 3ytg3x = \sin 6x; y(0) = 1/3$
8. $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$
9. $(y^4 + 2x)y' = y$
10. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$
11. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$