Семинар 27

Функциональные ряды
Степенные ряды

Ряд, элементами которого являются функции, называется функциональным рядом.

Обозначение $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ (*), где $u_n(x)$ - определены и непрерывны в одном и том же интервале.

Ряд (*) для одних значений x может сходиться, а для других расходиться.

Значение $x = x_0$, при котором числовой ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x_0)+...$ сходится, называется <u>точкой сходимости ряда</u> (*).

Совокупность всех точек сходимости ряда называется областью сходимости ряда, или говорят, что ряд сходится в данной области. Областью сходимости обычно бывает какой-либо интервал оси OX.

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$ - n –ая частичная сумма;

$r_n(x)$ – остаток ряда. Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x); \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

<u>**Определение**</u>

Функциональный ряд $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ (*) называется правильно сходящимся в области D, принадлежащей области сходимости ряда, если в области D все его элементы по абсолютной величине не превосходят соответствующих элементов некоторого числового ряда с положительными элементами. Это значит, что во всех точках области D должно выполняться неравенство $|u_n| \le M_n$, где M_n - элемент сходящегося ряда $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$Этот ряд называется мажорирующим по отношению к ряду (*).

Свойства правильно сходящихся рядов

Сформулируем основные теоремы о правильно сходящихся рядах, которые дают ответ на вопрос о переносе на ряды свойств сумм конечного числа функций. Во всех теоремах предполагается, что область правильной сходимости ряда есть некоторый интервал оси *OX.*

Теорема 1 Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.

Так ряд $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ сходится правильно в любом интервале. Следовательно, его сумма S(x) – непрерывная функция.

<u>Теорема 2</u> Если ряд из непрерывных функций правильно сходится, то интеграл от суммы ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов от этих функций: $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ...$ (*)

Короткая формулировка. Правильно сходящийся ряд можно <u>поэлементно интегрировать.</u>

<u>Теорема 3</u>

Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна S(x), а ряд из производных $u_n'(x)$ сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда S'(x) равна сумме ряда из производных

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ...$$

Короткая формулировка. Если ряд, составленный из производных сходящегося ряда, сходится правильно, то его можно поэлементно дифференцировать.

Определение

Степенным рядом называется функциональный ряд $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, элементы которого произведения постоянных $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ на степенные функции с целыми показателями степеней от разности $x - x_0$. a_i - коэффициенты степенного ряда (обычно действительные функции).

В частности, если $x_0 = 0$,то мы будем иметь степенной ряд, расположенный по степеням x , т.е. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$

Теорема Абеля

Если степенной ряд (*) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, т. е. при всяком x , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

Область сходимости степенного ряда

Здесь возможны три случая:

Здесь возможны три случая:

1. Область сходимости состоит только из одной точки $x=0$, то есть ряд расходится для всех значений x, кроме $x=0$.

2. Область сходимости состоит из всех точек оси OX, то есть ряд сходится при всех значениях x.

3. Область сходимости состоит более чем из одной точки оси OX, причем есть точки оси, не принадлежащие области сходимости.

Таким образом, для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех x по модулю меньшим R ($|x| < R$), ряд абсолютно сходится, а для всех $|x|>R$ ряд расходится.

При $x=R$ и $x=-R$ различные варианты:

А) ряд сходится в обеих точках.

Б) ряд сходится в одной из точек.

В) ряд расходится в обеих точках.

Определение

Радиусом сходимости степенного ряда (*) называется такое число R, что для любых x, $|x|<R$, степенной ряд сходится, а для всех x, $|x|>R$, расходится. Интервал $(-R,R)$ называется интервалом сходимости. Считаем, что если ряд расходится для любого x, кроме $x=0$, $R=0$. Если ряд сходится при всех x, то считаем $R=+\infty$ или $R=\infty$.

Для ряда $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ центр интервала сходимости в точке $x=x_0$ (а не $x=0$) и интервал сходимости (x_0-R,x_0+R).

Способ отыскания радиуса сходимости степенного ряда

Отметим, что для нахождения радиуса сходимости можно исследовать ряд, составленный из абсолютных величин элементов исходного ряда, то есть $|a_0|+|a_1||x|+\ldots+|a_n||x^n|+\ldots$(**) так как интервалы сходимости ряда (*) и ряда (**) совпадают. К ряду (**) применим признак Даламбера.

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет содержать $|x|$ или степень $|x|$.

Для тех значений x, при которых получаемый предел меньше 1, ряд сходится, а для тех, при которых $x>1$, ряд расходится.

Отсюда следует, что значения $|x|$, при которых этот предел равен 1, и будет являться радиусом сходимости ряда. Может случиться, что найденный предел при всех x будет равен 0. Это означает, что ряд (*) сходится при всех x и $R = \infty$. Наоборот, если для любых x кроме $x=0$ предел равен бесконечности, то ряд будет везде расходиться, кроме $x=0$, то есть $R=0$.

Примеры с решениями

1. Дан функциональный ряд $\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots$ Исследовать сходимость ряда в точках $x=0$ и $x=1$.

Решение: В точке $x=0$ получаем ряд $2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \ldots$

Применим признак Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} = 2 > 1$ - ряд расходится. В точке $x=1$ получаем ряд $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots$ По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3} < 1$

ряд расходится.

2. Найти область сходимости ряда $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{1}{1+x^6}+\ldots$

Решение.Общий элемент ряда $u_n=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ Если $|x|<1$,то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}=1\neq 0$, следовательно ряд расходится. Если $|x|=1$, то также получаем расходящийся Ряд $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2}+\ldots$

Если $|x|>1$, то элементы заданного ряда меньше элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}+\ldots$, т.е ряд сходится при $|x|>1$.

3.Исследовать сходимость степенного ряда $x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\ldots$

Решение.

Найдем радиус сходимости ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})=1$

Следовательно, ряд сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получаем расходящийся гармонический ряд. Если $x=-1$, то получаем знакочередующийся ряд, который условно сходится по признаку Лейбница. Итак, область сходимости степенного ряда определяется неравенством $-1 \le x < 1$.

4. Исследовать сходимость степенного ряда $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$

Решение.

Найдем радиус сходимости ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1$

Тогда ряд сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $-1<x-2<1$, т.е. $1<x<3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получаем сходящийся ряд обратных квадратов. Если $x=-1$, то получаем знакочередующийся ряд обратных квадратов, который является абсолютно сходящимся. Итак, область сходимости степенного ряда определяется неравенством $1 \le x \le 3$.

5.Исследовать сходимость степенного ряда $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.
Ряд сходится только при x-5=0, т.е. в точке x=5.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти области сходимости функциональных рядов:

1) $1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$ 2) $1+\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3^x}+\ldots+\dfrac{1}{n^x}+\ldots$ 3) $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{2^2(x^2+1)}+\ldots$

2. Найти области сходимости ст. рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$ 3) $\sum\dfrac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

3. Найти сумму ряда, используя поэлементное дифференцирование или интегрирование:

1) $x^2-3x^4+5x^6-\ldots+(-1)^n(2n+1)x^{2n+2}+\ldots$

2) $\dfrac{x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$