Семинар 29

Двойные интегралы. Свойства двойных интегралов. Способы вычисления двойных интегралов.

Пусть *f(x,y)* – функция, ограниченная в некоторой замкнутой ограниченной области *D*.

δ_i- частичная область области *D*. $\Delta\delta_i$ - площадь частичной области δ_i

$P_i(x_i, y_i) \in \delta_i, f(x_i, y_i)$ значение функции в точке $P_i(x_i, y_i)$

Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i$ (*)

Сумма (*) называется <u>интегральной суммой</u> для функции *f(x,y)* в области *D*, соответствующей данному разбиению области *D* на *n* – частичных областей.

<u>Определение</u>

Двойным интегралом от функции *f(x,y)* по области *D* называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к 0 наибольшего диаметра частичных областей

Запись $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\delta_i = \iint_D f(x, y)d\delta$

«Двойной интеграл от функции *f(x,y)* по области *D*»

$f(x,y)d\delta$ - выражение; *f(x,y)* – подынтегральная функция;

$d\delta$ - элемент площади; *D* – область интегрирования.

Свойства двойных интегралов

1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\iint_D [f_1(x,y)+\ldots+f_n(x,y)]d\delta = \iint_D f_1(x,y)d\delta + \ldots + \iint_D f_n(x,y)d\delta$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за символ двойного интеграла: $\iint_D cf(x,y)d\delta = c\iint_D f(x,y)d\delta$

3. Если область *D* разбита на две области D_1, D_2 без общих внутренних точек, то:

$$\iint_D f(x,y)d\delta = \iint_{D_1} f(x,y)d\delta + \iint_{D_2} f(x,y)d\delta$$

4. Если во всех точках области *D* функция $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то:

$$\iint_D f(x,y)d\delta \geq \iint_D \varphi(x,y)d\delta$$

5. Значение двойного интеграла заключено между произведениями наименьшего (m) и наибольшего (M) значений подынтегральной функции в области D на площадь области интегрирования: $mS \le \iint\limits_D f(x,y)d\delta \le MS$, где S - площадь области D.

6. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, то есть: $\iint\limits_D f(x,y)d\delta = f(\alpha,\beta)S, -- f(\alpha,\beta)$ - <u>среднее значение функции</u> $f(x,y)$ в области D

При вычислении $\iint\limits_D f(x,y)d\delta$ элемент $d\delta$ удобнее представлять в следующем виде.

Область D в плоскости OXY разбивается на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x=const$, $y=const$. Эти прямые соответственно параллельны OX и OY. Частичные области прямоугольники. Площадь каждой частичной области не примыкающей к границе D , будет равна произведению $\Delta x \cdot \Delta y$.

Поэтому запишем

$$\iint_D f(x,y)d\delta=\iint_D f(x,y)dxdy \quad (*)$$

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad (**)$$ $$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \quad (***)$$

Если область D – прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, то есть имеет вид, представленный на рисунке, то пределы интегрирования – постоянные величины

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Замена переменных в двойном интеграле

Полярные координаты

При вычислении определенных интегралов важную роль играет правило замены переменной, согласно которому при соблюдении соответствующих условий имеет место $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$

Обычно функция $x = \varphi(u)$ монотонна; тогда она осуществляет взаимнооднозначное соответствие между точками интервала $[u_1, u_2]$ изменения переменной *u* и точками интервала $[x_1, x_2]$ изменения переменной *x*. Заменяя $x = \varphi(u)$

Правило замены переменной в двойном интеграле достаточно сложное. Приведем формулу замены.

При переходе в двойном интеграле от переменных *x,y* к новым переменным *u,v*: *x=x(u,v), y=y(u,v)* (*) формула замены такова

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f[x(u,v), y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$ (**), где

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{dv} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Есть функциональный определитель Якоби (Якобиан) составленный из частных производных функций (*), то есть

$$d\delta = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Старая область интегрирования D заменяется на новую область D^* по переменным *u,v*. Новое выражение для $d\delta$ называется элементом площади в координатах *u,v*.

Применим формулу (**) к преобразованию с помощью полярных координат (обозначения общепринятые)

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi (-\pi \le \varphi \le \pi)$

Якобиан будет равен $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\cdot r\cdot\cos\varphi - (-r\cdot\sin\varphi)\cdot\sin\varphi = r$

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$ (***), где D и – D^* соответствующие друг другу области в плоскостях OXY и $O_1 r\varphi$ (здесь r и φ рассматриваются как декартовы координаты точки).

Примеры с решениями

1. Вычислить $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy$ если D – прямоугольник $0\le x\le 4, 1\le y\le e$

Решение. Имеем $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy=\int\limits_0^4 xdx\int\limits_1^e \ln y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\cdot\left[y\ln y-y\right]_1^e=8(e-e+1)=8$

2. Вычислить $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy$

Решение. Имеем $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$

$\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9$

3. Перейдя к полярным координатам вычислить $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ если D – I четверть круга $x^2+y^2\le a^2$

Решение. Полагая $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ имеем

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^a\rho^2 d\theta=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\Big|_0^a d\theta=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi a^3}{6}$$

4. Вычислить $\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$, где D –кольцо между окружностями $x^2+y^2=e^2, x^2+y^2=e^4$

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \iint_D \ln\rho^2 \rho d\rho d\theta = 2\iint \rho\ln\rho d\rho d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} \rho\ln\rho d\rho$$

Взяв по частям интеграл, зависящий от ρ получим $2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho - \frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2} d\theta = \pi e^2(3e^2-1)$

5. Вычислить интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$

Решение

a) Интегрируем сначала по y, затем по x

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy = \int_0^1 [xy+\frac{y^2}{2}]\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})dx = (\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10})\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

b) Интегрируем сначала по x, затем по y

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x+y)dx = \int_0^1 [\frac{x^2}{2}+xy]\Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{3y^2}{2})dy = (\frac{y^2}{4} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{2})\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить $\iint\limits_D y\ln x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $xy = 1, y = \sqrt{x}, x = 2$

2. Вычислить $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D – треугольник с вершинами A(2;3), B(7;2), C(4;5).

3. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy, \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$

4. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$, если D – квадрат, ограниченный прямыми *x+y=1, x-y=1, x+y=3, x-y=-1*

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

a) $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, если область D – круг $x^2+y^2 \le \pi^2$

b) $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$, - область D ограничена полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$ и осью OX.

c) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, - область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$

d) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ если область D ограничена линиями: $x^2+y^2=\pi^2/9$

$x^2+y^2=\pi^2$