Производная по направлению. Градиент. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Нахождение наибольших и наименьших значений.

Семинар 24

Пусть функция u = f (x, y, z) непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку M(x,y,z) и проведем из нее вектор **S**, направляющие косинусы которого *cosα, cosβ, cosγ*. На векторе **S** на расстоянии Δs от его начала найдем точку M1(x+Δx, y+Δy, z+Δz), где $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Представим полное приращение функции *f* в виде:

$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \delta\Delta x + \varepsilon\Delta y + \lambda\Delta z,$ где $\lim_{\Delta s \to 0} \delta = \lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \lambda = 0.$

После деления на Δs получаем: $\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \delta\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon\frac{\Delta y}{\Delta s} + \lambda\frac{\Delta z}{\Delta s}$.

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s}\cos\gamma,$ предыдущее равенство можно переписать в виде: $\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma + \delta\cos\alpha + \varepsilon\cos\beta + \lambda\cos\gamma$ (1)

<u>**Определение**</u> **Предел отношения** $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ **при** $\Delta s \to 0$ **называется производной от функции u = f (x, y, z) по направлению вектора S и обозначается** $\frac{\partial u}{\partial s}$**.**

При этом из (1) получаем: $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$ (2)

<u>**Определение**</u> **Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции u = f (x, y, z) в этой точке, называется градиентом функции u = f (x, y, z).**

Обозначение: grad u = $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

Экстремумы функции

<u>**Определение 1**</u>**.** Точка M_0 (x_0 , y_0) называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0.

<u>**Определение 2**</u>**.** Точка M_0 (x_0 , y_0) называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если M_0 (x_0 , y_0) – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.

Определение 3. Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются стационарными точками этой функции.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки M_0 (x_0 , y_0) , являющейся стационарной точкой функции $z = f(x, y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C.$ Тогда:

1) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 максимум, если $AC - B^2 > 0$, $A < 0$;
2) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если $AC - B^2 > 0$, $A > 0$;
3) экстремум в критической точке отсутствует, если $AC - B^2 < 0$;
4) если $AC - B^2 = 0$, необходимо дополнительное исследование.

Условный экстремум.

<u>Определение</u> Если аргументы функции *$f(x1, x2, \ldots, xn)$* связаны дополнительными условиями в виде m уравнений *$(m < n)$: $\varphi 1(x1, x2, \ldots, xn) = 0$, $\varphi 2(x1, x2, \ldots, xn) = 0$, …, $\varphi m(x1, x2, \ldots, xn) = 0$,* (1), где функции φi имеют непрерывные частные производные, то уравнения (1) называются **уравнениями связи.**

<u>Определение</u> Экстремум функции *$f(x1, x2, \ldots, xn)$* при выполнении условий (1) называется **условным экстремумом**.

<u>Определение</u> Функция *$L(x1, x2, \ldots, xn) = f(x1, x2, \ldots, xn) + \lambda 1\varphi 1(x1, x2, \ldots, xn) + \lambda 2\varphi 2(x1, x2, \ldots, xn) + \ldots + \lambda m\varphi m(x1, x2, \ldots, xn)$,* (2), где λi – некоторые постоянные, называется **функцией Лагранжа**, а числа λi **– неопределенными множителями Лагранжа.**

Теорема (необходимые условия условного экстремума). Условный экстремум функции z = f (x, y) при наличии уравнения связи φ (x, y) = 0 может достигаться только в стационарных точках функции Лагранжа *$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.*

Примеры с решениями

1. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке M(1;1) в направлении вектора L, составляющего угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси OX.

Решение. Найдем значения частных производных в точке M:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y; \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2.$ Так как $\cos\alpha = \cos 60° = 1/2; \sin\alpha = \sin 60° = \sqrt{3}/2$

то $\frac{\partial z}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}7$

2. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке M(3;2;1) в направлении вектора $\overline{MN}$, где N(5;4;2).

Решение. Найдем вектор $\overline{MN}$ и его направляющие косинусы:

$\overline{MB} = (5-3)i + (4-2)j + (2-1)k = 2i + 2j + k; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}; \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{3}$

Вычислим значения частных производных в точке M:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 12; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 36$, следовательно $\frac{\partial z}{\partial s} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{2} = 22\frac{2}{3}$

3. Найти величину и направление градиента функции $u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ в точке $M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$

Решение. Найдем частные производные и вычислим их значения в точке M.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \sec^2 x - 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y\cos y; \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \cos ec^2 z; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 1; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = \frac{3}{8}; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$

Следовательно,

$(grad u)_M = i + \frac{3}{8}j; |grad u|_M = \sqrt{1^2 + (3/8)^3} = \frac{\sqrt{73}}{8}$ $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}; \cos\beta = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}$

3. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3; \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6;$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; y = 3; M(0;3).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке М: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ и составляем дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0;$ Следовательно, в точке М(0;3) заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$

4. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)(\frac{x}{3} + \frac{y}{4})$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{3};$ Находим из $\begin{cases} 8x + y - 188 = 0 \\ x + 6y - 141 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 21; y = 20; M(21;20).$

Находим значения частных производных второго порядка в точке М:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$ и составляем дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0;$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0; A < 0;$$

Следовательно, в точке М(0;3) заданная функция имеет максимум. Значение функции в этой точке $z_{\max} = 282$

5. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $z^2 = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением xy/2=S, т. е. xy-2S=0. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдем ее частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \lambda y; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \lambda x;$

Так как x>0,y>0, то из системы уравнений $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -2; x = y = \sqrt{2S} \\ xy/2 = S \end{cases}$.

Гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

Примеры для самостоятельного решения

1.Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке M(1;1) в направлении вектора **s=6i+8j.**

2.Найти производную функции $u = \arcsin(z / \sqrt{x^2 + y^2})$ в точке M(1;1;1) в направлении вектора $\overline{MN}$, где N(3;2;3).

3.Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке M(1;2;1) в направлении вектора **r=2i+4j+4k.**

4.Найти величину и направление градиента функции u=xyz в точке M(2;1;1).

5.Найти экстремумы функций: 1) $z = xy^2(1 - x - y);...2) z = x^3 + y^3 - 15xy$

$3) z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3};...4) z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2+y^2)} - 1)$

6.Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны уравнением x/3+y/4=1

7.Найти наименьшее и наибольшее значение функции z=xy в круге $x^2 + y^2 \leq 1$